

Valószínűségszámítás

Benke János Marcell

Bolyai Intézet, Szegedi Tudományegyetem

2018/2019 őszi félév

Miről lesz szó a félév során?

A sztochasztika három fő területe:

Valószínűségszámítás, statisztika, sztochasztikus folyamatok.

Miről lesz szó a félév során?

A sztochasztika három fő területe:

Valószínűségszámítás, statisztika, sztochasztikus folyamatok.

Valószínűségszámítás: kísérletek matematikai modellezése.

Miről lesz szó a félév során?

A sztochasztika három fő területe:

Valószínűségszámítás, statisztika, sztochasztikus folyamatok.

Valószínűségszámítás: kísérletek matematikai modellezése.

Például a következő kérdésekre keresünk válaszokat:

- Mennyi az esélye, hogy nyerünk a lottón?

Miről lesz szó a félév során?

A sztochasztika három fő területe:

Valószínűségszámítás, statisztika, sztochasztikus folyamatok.

Valószínűségszámítás: kísérletek matematikai modellezése.

Például a következő kérdésekre keresünk válaszokat:

- Mennyi az esélye, hogy nyerünk a lottón?
- Mennyi az esélye, hogy egy r sugarú kör körvonalán illetve a körlapján véletlenszerűen választott két pont távolsága nagyobb, mint $\sqrt{2}r$?

Miről lesz szó a félév során?

A sztochasztika három fő területe:

Valószínűségszámítás, statisztika, sztochasztikus folyamatok.

Valószínűségszámítás: kísérletek matematikai modellezése.

Például a következő kérdésekre keresünk válaszokat:

- Mennyi az esélye, hogy nyerünk a lottón?
- Mennyi az esélye, hogy egy r sugarú kör körvonalán illetve a körlapján véletlenszerűen választott két pont távolsága nagyobb, mint $\sqrt{2}r$?
- Mennyi egy játék igazságos ára?

Miről lesz szó a félév során?

A sztochasztika három fő területe:

Valószínűségszámítás, statisztika, sztochasztikus folyamatok.

Valószínűségszámítás: kísérletek matematikai modellezése.

Például a következő kérdésekre keresünk válaszokat:

- Mennyi az esélye, hogy nyerünk a lottón?
- Mennyi az esélye, hogy egy r sugarú kör körvonalán illetve a körlapján véletlenszerűen választott két pont távolsága nagyobb, mint $\sqrt{2}r$?
- Mennyi egy játék igazságos ára?
- Mennyi az esélye, hogy egy izzó még egy napig fog működni, feltéve, hogy már 10 éves?

Miről lesz szó a félév során?

A sztochasztika három fő területe:

Valószínűségszámítás, statisztika, sztochasztikus folyamatok.

Valószínűségszámítás: kísérletek matematikai modellezése.

Például a következő kérdésekre keresünk válaszokat:

- Mennyi az esélye, hogy nyerünk a lottón?
- Mennyi az esélye, hogy egy r sugarú kör körvonalán illetve a körlapján véletlenszerűen választott két pont távolsága nagyobb, mint $\sqrt{2}r$?
- Mennyi egy játék igazságos ára?
- Mennyi az esélye, hogy egy izzó még egy napig fog működni, feltéve, hogy már 10 éves?
- Miért késnek mindig a buszok?

Miről lesz szó a félév során?

A sztochasztika három fő területe:

Valószínűségszámítás, statisztika, sztochasztikus folyamatok.

Valószínűségszámítás: kísérletek matematikai modellezése.

Például a következő kérdésekre keresünk válaszokat:

- Mennyi az esélye, hogy nyerünk a lottón?
- Mennyi az esélye, hogy egy r sugarú kör körvonalán illetve a körlapján véletlenszerűen választott két pont távolsága nagyobb, mint $\sqrt{2}r$?
- Mennyi egy játék igazságos ára?
- Mennyi az esélye, hogy egy izzó még egy napig fog működni, feltéve, hogy már 10 éves?
- Miért késnek mindig a buszok?
- Mit állít a hétköznapi életben is használatos nagy számok törvénye?

Előzetes tematika:

- 2018.09.28. Klasszikus valószínűségi mező. Geometriai valószínűségi mező. Feladatok.
- 2018.09.29. Függetlenség. Feltételes valószínűség. Feladatok.
- 2018.10.06. Diszkrét valószínűségi változók. Nevezetes diszkrét eloszlások. Várható érték, variancia. Feladatok.
- 2018.10.27. Eloszlásfüggvény. Folytonos valószínűségi változók. Nevezetes folytonos eloszlások. Feladatok.
- 2018.11.09. A normális eloszlás, de Moivre-Laplace tétel, centrális határeloszlástétel. Feladatok.
- 2018.11.24. Kovariancia, korreláció, lineáris regresszió. Nagy szám törvények. (Konzultáció)
- 2018.12.08. **Dolgozat.**

A dolgozat pótlására illetve javítására a vizsgaidőszakban lesz lehetőség egy alkalommal.

- Órai kivetített anyag, feladatok, segédanyagok → Coospace
- Nagy-György Judit, Oszvényiné Krauczi Éva, Székely László. Valószínűségszámítás és statisztika példatár. Polygon Jegyzettár, 2010.
- Rényi Alfréd. Valószínűségszámítás. Tankönyvkiadó, 1973.

Véletlen kísérletek, események, valószínűség

Valószínűségszámítás: kísérletek matematikai modellezése.

Véletlen kísérletek, események, valószínűség

Valószínűségszámítás: kísérletek matematikai modellezése.

Kísérlet: egy véletlentől függő jelenség megfigyelése.

Kimenetek (elemi események): a kísérlet lehetséges eredményei.

Eseménytér: az elemi események halmaza.

Esemény: a kísérlet kimenetelére vonatkozó állítás.

Esemény valószínűsége: az esemény bekövetkezésének esélye.

Véletlen kísérletek, események, valószínűség

Valószínűségszámítás: kísérletek matematikai modellezése.

Kísérlet: egy véletlentől függő jelenség megfigyelése.

Kimenetek (elemi események): a kísérlet lehetséges eredményei.

Eseménytér: az elemi események halmaza.

Esemény: a kísérlet kimenetelére vonatkozó állítás.

Esemény valószínűsége: az esemény bekövetkezésének esélye.

Példa

Kísérlet: Dobunk egy szabályos hatoldalú dobókockával.

Eseménytér:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Események:

$$A = \text{Páros számot dobunk.} = \{2, 4, 6\}$$

$$B = \text{Ötnél kisebbet dobunk.} = \{1, 2, 3, 4\}$$

Biztos esemény

Az az esemény, ami mindig bekövetkezik. Be lehet azonosítani az $\Omega \subseteq \Omega$ halmazzal.

Lehetetlen esemény

Az az esemény, ami sohasem következik be. Be lehet azonosítani az $\emptyset \subseteq \Omega$ halmazzal.

Biztos esemény

Az az esemény, ami mindig bekövetkezik. Be lehet azonosítani az $\Omega \subseteq \Omega$ halmazzal.

Lehetetlen esemény

Az az esemény, ami sohasem következik be. Be lehet azonosítani az $\emptyset \subseteq \Omega$ halmazzal.

Diszjunkt események

Azt mondjuk, hogy az A és B események **diszjunktak (kizáróak)**, ha egyszerre nem következhetnek be.

Az A és B események akkor és csak akkor diszjunktak, ha $A \cdot B = \emptyset$.

Egymást tartalmazó események

Azt mondjuk, hogy az A esemény **maga után vonja** a B eseményt, ha az A esemény bekövetkezése esetén mindig bekövetkezik a B esemény is. Jelölése: $A \Rightarrow B$.

Az A esemény pontosan akkor vonja maga után a B eseményt, ha $A \subseteq B$.

Műveletek eseményekkel

- Az A és B események **összege (uniója)** az az esemény, amely pontosan akkor következik be, amikor az A és B események közül legalább az egyik bekövetkezik. Jelölése: $A \cup B$. Be lehet azonosítani az $A \cup B \subseteq \Omega$ halmazzal.
- Az A és B események **szorzata (metszete)** az az esemény, amely pontosan akkor következik be, amikor az A és B események mindegyike bekövetkezik. Jelölése: $A \cdot B$ vagy AB vagy $A \cap B$. Be lehet azonosítani az $A \cap B \subseteq \Omega$ halmazzal.
- Egy A esemény **ellentett (komplementer) eseménye** az az esemény, ami pontosan akkor következik be, amikor az A esemény nem következik be. Jelölése: $\bar{A}$. Be lehet azonosítani az $\Omega \setminus A \subseteq \Omega$ halmazzal.
- Az A és B esemény **különbsége** az az esemény, ami pontosan akkor következik be, amikor az A esemény bekövetkezik, a B esemény pedig nem. Jelölése: $A \setminus B$. Be lehet azonosítani az $A \setminus B \subseteq \Omega$ halmazzal.

A műveletek tulajdonságai

- kommutativitás: $A \cup B = B \cup A$
 $A \cap B = B \cap A$
- asszociativitás: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cap C$
- idempotencia: $A \cup A = A$
 $A \cap A = A$
- disztibutivitás:
 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- de Morgan azonosságok:
 $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$
 $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$
- különbség:
 $A \setminus B = A \cap \bar{B}$

Feladat

Háromszor feldobunk egy dobókockát. Legyen $A_i, i = 1, 2, 3$ az az esemény, hogy az i . dobás hatos. Írjuk fel az alábbi eseményeket az A_i események segítségével!

- Nem dobunk hatost. =

Feladat

Háromszor feldobunk egy dobókockát. Legyen $A_i, i = 1, 2, 3$ az az esemény, hogy az i . dobás hatos. Írjuk fel az alábbi eseményeket az A_i események segítségével!

- Nem dobunk hatost. $= \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} =$

Feladat

Háromszor feldobunk egy dobókockát. Legyen $A_i, i = 1, 2, 3$ az az esemény, hogy az i . dobás hatos. Írjuk fel az alábbi eseményeket az A_i események segítségével!

- Nem dobunk hatost. $= \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} = \overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}$.
- Az első dobás hatos, és a második nem hatos. $=$

Feladat

Háromszor feldobunk egy dobókockát. Legyen $A_i, i = 1, 2, 3$ az az esemény, hogy az i . dobás hatos. Írjuk fel az alábbi eseményeket az A_i események segítségével!

- Nem dobunk hatost. $= \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} = \overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}$.
- Az első dobás hatos, és a második nem hatos. $= A_1 \cap \overline{A_2}$.
- A három dobás közül pontosan kettő hatos. $=$

Feladat

Háromszor feldobunk egy dobókockát. Legyen $A_i, i = 1, 2, 3$ az az esemény, hogy az i . dobás hatos. Írjuk fel az alábbi eseményeket az A_i események segítségével!

- Nem dobunk hatost. $= \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} = \overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}$.
- Az első dobás hatos, és a második nem hatos. $= A_1 \cap \overline{A_2}$.
- A három dobás közül pontosan kettő hatos. $=$

$$(A_1 \cap A_2 \cap \overline{A_3}) \cup (A_1 \cap \overline{A_2} \cap A_3) \cup (\overline{A_1} \cap A_2 \cap A_3)$$

Eseményalgebra

Egy Ω eseménytér bizonyos eseményeiből álló $\mathcal{A}$ rendszert **eseményalgebrának** nevezünk, ha tartalmazza a biztos eseményt, és zárt a komplementerképzésre és a véges unióképzésre.

Példa

Például eseményalgebrát alkot Ω összes részhalmazának $\mathcal{A} := 2^\Omega$ rendszere.

Természetes az a feltevés, hogy egy kísérlettel kapcsolatos események rendszere eseményalgebrát alkot.

Eseményalgebra

Egy Ω eseménytér bizonyos eseményeiből álló $\mathcal{A}$ rendszert **eseményalgebrának** nevezünk, ha tartalmazza a biztos eseményt, és zárt a komplementerképzésre és a véges unióképzésre.

Példa

Például eseményalgebrát alkot Ω összes részhalmazának $\mathcal{A} := 2^\Omega$ rendszere.

Természetes az a feltevés, hogy egy kísérlettel kapcsolatos események rendszere eseményalgebrát alkot.

σ -algebra

Egy eseményalgebrát **σ -algebrának** nevezünk, ha zárt a megszámlálható unióképzésre.

Gyakoriság, relatív gyakoriság

Ha egy A eseménnyel kapcsolatban n darab véletlen, egymástól függetlenül lezajlott kísérletet hajtunk végre, akkor A **gyakorisága** az a szám, ahányszor A bekövetkezik. Tehát ez egy véletlen mennyiség, melynek lehetséges értékei $0, 1, 2, \dots, n$. Jelölése: $k_n(A)$.

Az A esemény **relatív gyakorisága**: $r_n(A) := \frac{k_n(A)}{n}$. Ez is egy véletlen szám, melynek lehetséges értékei $0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 1$.

Gyakoriság, relatív gyakoriság

Ha egy A eseménnyel kapcsolatban n darab véletlen, egymástól függetlenül lezajlott kísérletet hajtunk végre, akkor A **gyakorisága** az a szám, ahányszor A bekövetkezik. Tehát ez egy véletlen mennyiség, melynek lehetséges értékei $0, 1, 2, \dots, n$. Jelölése: $k_n(A)$.

Az A esemény **relatív gyakorisága**: $r_n(A) := \frac{k_n(A)}{n}$. Ez is egy véletlen szám, melynek lehetséges értékei $0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 1$.

Az a tapasztalat, hogy ha n -et növeljük, azaz minél többször hajtjuk végre a kísérletet, akkor az A esemény relatív gyakorisága egy szám körül ingadozik. Ezt a számot fogjuk az A esemény $P(A)$ valószínűségének nevezni.

$$r_n(A) = \frac{k_n(A)}{n} \approx P(A)$$

A relatív gyakoriság tulajdonságai

- Egy A esemény relatív gyakorisága mindig 0 és 1 közé esik.

$$0 \leq r_n(A) \leq 1.$$

- A biztos esemény relatív gyakorisága mindig 1. $r_n(\Omega) = 1$.
- Ha A és B diszjunkt események, akkor

$$r_n(A \cup B) = r_n(A) + r_n(B).$$

- Ha $A_1, A_2, \dots$ páronként diszjunkt események, akkor

$$r_n(A_1 \cup A_2 \cup \dots) = r_n(A_1) + r_n(A_2) + \dots$$

Valószínűségi mező

A valószínűségi mező egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ hármas, ahol

- Ω egy nemüres halmaz, az eseménytér,
- $\mathcal{A} \subseteq 2^\Omega$ az Ω bizonyos részhalmazából álló σ -algebra, az események rendszere,
- $P : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$ olyan leképezés, amelyre teljesülnek az alábbiak:
 - 1 $P(\Omega) = 1$,
 - 2 σ -additív, azaz $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ páronként diszjunkt események esetén

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Egy A esemény esetén a $P(A)$ számot az A **valószínűségének**, a $P : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$ leképezést pedig **valószínűségeloszlásnak** vagy röviden **eloszlásnak** illetve **valószínűségi mértéknek** nevezzük.

A valószínűség tulajdonságai

- $P(\emptyset) = 0$. (A σ -additivitásból következik $A_1 = A_2 = \dots = \emptyset$ választással.)
- Véges additivitás: ha $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ páronként diszjunktak, akkor

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i).$$

- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$. (Igaz, mivel $\Omega = A \cup \bar{A}$ diszjunkt felbontás, így a véges additivitásból következik.)
- $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$.
- Monotonitás: ha $A \Rightarrow B$, azaz $A \subset B$, akkor $P(A) \leq P(B)$.

A valószínűség további tulajdonságai

- Szubadditivitás: Ha $A_1, A_2, \dots$ tetszőleges események egy véges vagy végtelen sorozata, akkor

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots) \leq P(A_1) + P(A_2) + \dots$$

- Két esemény összegének valószínűsége tetszőleges A, B események esetén

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

- Három esemény összegének valószínűsége tetszőleges A, B, C események esetén

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) \\ &\quad - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C). \end{aligned}$$

A Poincaré (szita)-formula

Tetszőleges $A_1, A_2, \dots, A_n$ események esetén

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}).$$

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + \dots + P(A_n)$$

– kettes metszetek valószínűsége

+ hármas metszetek valószínűsége

$\vdots$

$\pm P(A_1 \cap \dots \cap A_n).$

Feladat

Egy társaságban az emberek 40 százaléka beszél angolul, 35 százaléka németül, 30 százaléka franciául. 15 százalék beszél angolul és németül, 20 százalék angolul és franciául, 20 százalék németül és franciául. Végül az emberek 10 százaléka beszéli mindhárom nyelvet. Tekintsük azt a kísérletet, hogy véletlenszerűen kiválasztunk egy embert a társaságból.

Feladat

Egy társaságban az emberek 40 százaléka beszél angolul, 35 százaléka németül, 30 százaléka franciául. 15 százalék beszél angolul és németül, 20 százalék angolul és franciául, 20 százalék németül és franciául. Végül az emberek 10 százaléka beszéli mindhárom nyelvet. Tekintsük azt a kísérletet, hogy véletlenszerűen kiválasztunk egy embert a társaságból. A kísérlet lehetséges kimenetelei az emberek a társaságban, tehát az eseménytér maga a társaság.

A = a kiválasztott ember beszél angolul

B = a kiválasztott ember beszél németül

C = a kiválasztott ember beszél franciául

Feladat

Egy társaságban az emberek 40 százaléka beszél angolul, 35 százaléka németül, 30 százaléka franciául. 15 százalék beszél angolul és németül, 20 százalék angolul és franciául, 20 százalék németül és franciául. Végül az emberek 10 százaléka beszéli mindhárom nyelvet. Tekintsük azt a kísérletet, hogy véletlenszerűen kiválasztunk egy embert a társaságból. A kísérlet lehetséges kimenetelei az emberek a társaságban, tehát az eseménytér maga a társaság.

A = a kiválasztott ember beszél angolul

B = a kiválasztott ember beszél németül

C = a kiválasztott ember beszél franciául

$$P(A) = 0,4 \quad P(B) = 0,35 \quad P(C) = 0,3$$

Feladat

Egy társaságban az emberek 40 százaléka beszél angolul, 35 százaléka németül, 30 százaléka franciául. 15 százalék beszél angolul és németül, 20 százalék angolul és franciául, 20 százalék németül és franciául. Végül az emberek 10 százaléka beszéli mindhárom nyelvet. Tekintsük azt a kísérletet, hogy véletlenszerűen kiválasztunk egy embert a társaságból. A kísérlet lehetséges kimenetelei az emberek a társaságban, tehát az eseménytér maga a társaság.

A = a kiválasztott ember beszél angolul

B = a kiválasztott ember beszél németül

C = a kiválasztott ember beszél franciául

$$P(A) = 0,4 \quad P(B) = 0,35 \quad P(C) = 0,3 \quad P(A \cap B) = 0,15$$

$$P(A \cap C) = 0,2 \quad P(B \cap C) = 0,2$$

Feladat

Egy társaságban az emberek 40 százaléka beszél angolul, 35 százaléka németül, 30 százaléka franciául. 15 százalék beszél angolul és németül, 20 százalék angolul és franciául, 20 százalék németül és franciául. Végül az emberek 10 százaléka beszéli mindhárom nyelvet. Tekintsük azt a kísérletet, hogy véletlenszerűen kiválasztunk egy embert a társaságból. A kísérlet lehetséges kimenetelei az emberek a társaságban, tehát az eseménytér maga a társaság.

A = a kiválasztott ember beszél angolul

B = a kiválasztott ember beszél németül

C = a kiválasztott ember beszél franciául

$$P(A) = 0,4 \quad P(B) = 0,35 \quad P(C) = 0,3 \quad P(A \cap B) = 0,15$$

$$P(A \cap C) = 0,2 \quad P(B \cap C) = 0,2 \quad P(A \cap B \cap C) = 0,1$$

Feladat

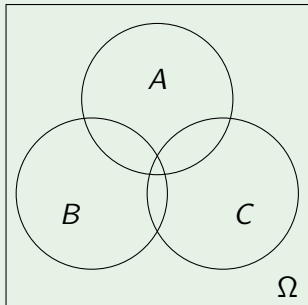
Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy a kiválasztott ember

- nem beszél angolul.

Feladat

Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy a kiválasztott ember

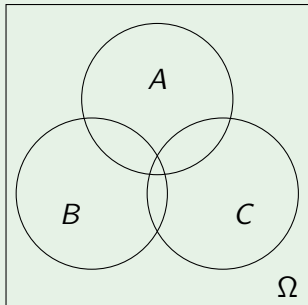
- nem beszél angolul.



Feladat

Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy a kiválasztott ember

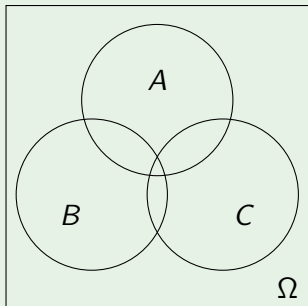
- nem beszél angolul. $P(\bar{A}) =$



Feladat

Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy a kiválasztott ember

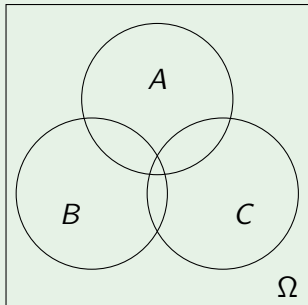
- nem beszél angolul. $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,4 = 0,6$.



Feladat

Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy a kiválasztott ember

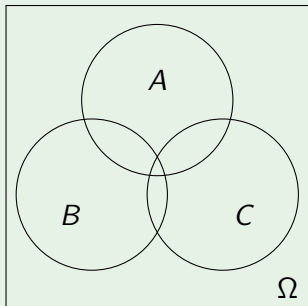
- nem beszél angolul. $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,4 = 0,6$.
- beszél angolul, de franciául nem.



Feladat

Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy a kiválasztott ember

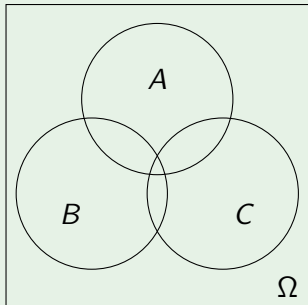
- nem beszél angolul. $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,4 = 0,6$.
- beszél angolul, de franciául nem.
 $P(A \setminus C) =$



Feladat

Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy a kiválasztott ember

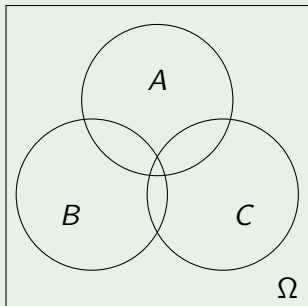
- nem beszél angolul. $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,4 = 0,6$.
- beszél angolul, de franciául nem.
 $P(A \setminus C) = P(A) - P(A \cap C) = 0,4 - 0,2 = 0,2$.



Feladat

Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy a kiválasztott ember

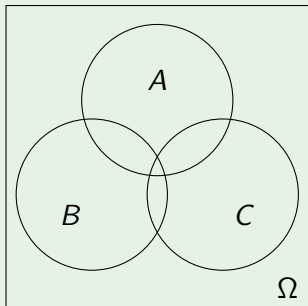
- nem beszél angolul. $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,4 = 0,6$.
- beszél angolul, de franciául nem.
 $P(A \setminus C) = P(A) - P(A \cap C) = 0,4 - 0,2 = 0,2$.
- pontosan csak angolul beszél.



Feladat

Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy a kiválasztott ember

- nem beszél angolul. $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,4 = 0,6$.
- beszél angolul, de franciául nem.
 $P(A \setminus C) = P(A) - P(A \cap C) = 0,4 - 0,2 = 0,2$.

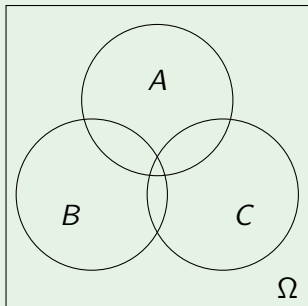


- pontosan csak angolul beszél. $P(A \setminus (B \cup C))$

Feladat

Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy a kiválasztott ember

- nem beszél angolul. $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,4 = 0,6$.
- beszél angolul, de franciául nem.
 $P(A \setminus C) = P(A) - P(A \cap C) = 0,4 - 0,2 = 0,2$.

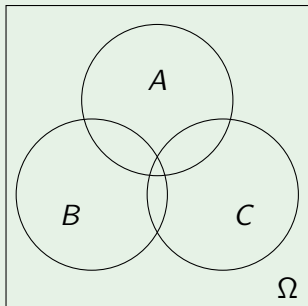


- pontosan csak angolul beszél. $P(A \setminus (B \cup C)) = P(A) - P(A \cap (B \cup C)) =$

Feladat

Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy a kiválasztott ember

- nem beszél angolul. $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,4 = 0,6$.
- beszél angolul, de franciául nem.
 $P(A \setminus C) = P(A) - P(A \cap C) = 0,4 - 0,2 = 0,2$.

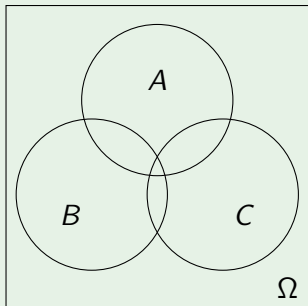


- pontosan csak angolul beszél. $P(A \setminus (B \cup C)) = P(A) - P(A \cap (B \cup C)) = P(A) - P((A \cap B) \cup (A \cap C))$

Feladat

Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy a kiválasztott ember

- nem beszél angolul. $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,4 = 0,6$.
- beszél angolul, de franciául nem.
 $P(A \setminus C) = P(A) - P(A \cap C) = 0,4 - 0,2 = 0,2$.

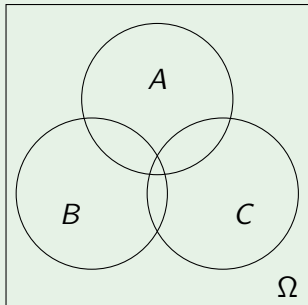


- pontosan csak angolul beszél. $P(A \setminus (B \cup C))$
 $= P(A) - P(A \cap (B \cup C)) = P(A) - P((A \cap B) \cup (A \cap C))$
 $= P(A) - P(A \cap B) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

Feladat

Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy a kiválasztott ember

- nem beszél angolul. $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,4 = 0,6$.
- beszél angolul, de franciául nem.
 $P(A \setminus C) = P(A) - P(A \cap C) = 0,4 - 0,2 = 0,2$.



- pontosan csak angolul beszél. $P(A \setminus (B \cup C))$
 $= P(A) - P(A \cap (B \cup C)) = P(A) - P((A \cap B) \cup (A \cap C))$
 $= P(A) - P(A \cap B) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C)$
 $= 0,4 - 0,15 - 0,2 + 0,1 = 0,15$.

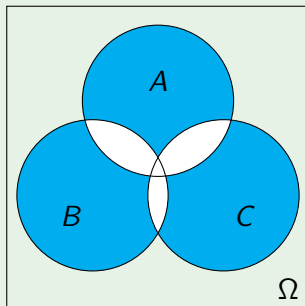
Feladat

- D = pontosan egy nyelven beszél.

Feladat

- $D =$ pontosan egy nyelven beszél.

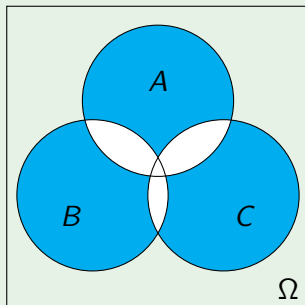
$$P(D) = P(A \setminus (B \cup C)) + P(B \setminus (A \cup C)) + P(C \setminus (A \cup B)).$$



Feladat

- $D =$ pontosan egy nyelven beszél.

$$P(D) = P(A \setminus (B \cup C)) + P(B \setminus (A \cup C)) + P(C \setminus (A \cup B)).$$

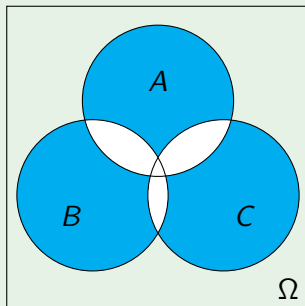


- beszél németül vagy franciául.

Feladat

- $D =$ pontosan egy nyelven beszél.

$$P(D) = P(A \setminus (B \cup C)) + P(B \setminus (A \cup C)) + P(C \setminus (A \cup B)).$$

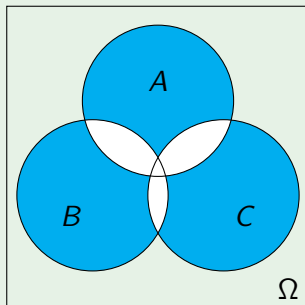


- beszél németül vagy franciául. $P(B \cup C) =$

Feladat

- $D =$ pontosan egy nyelven beszél.

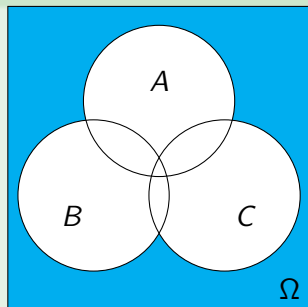
$$P(D) = P(A \setminus (B \cup C)) + P(B \setminus (A \cup C)) + P(C \setminus (A \cup B)).$$



- beszél németül vagy franciául. $P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C) = 0,35 + 0,3 - 0,2 = 0,45$.

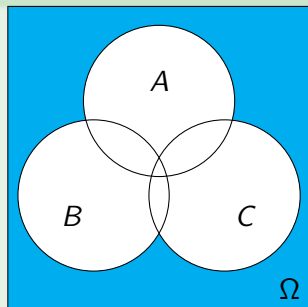
Feladat

- egyik nyelven sem beszél.



Feladat

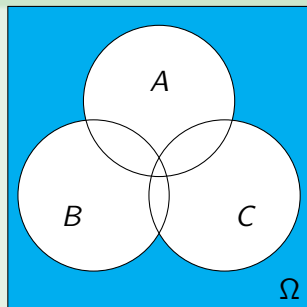
- egyik nyelven sem beszél.
 $P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) = ?$



Feladat

- egyik nyelven sem beszél.

$$P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) = ?$$
$$= P(\overline{A \cup B \cup C})$$



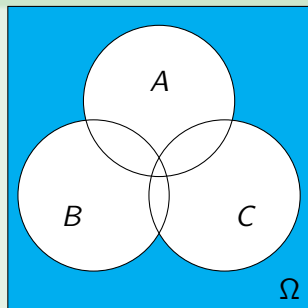
Feladat

- egyik nyelven sem beszél.

$$P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) = ?$$

$$= P(\overline{A \cup B \cup C})$$

$$= 1 - P(A \cup B \cup C).$$



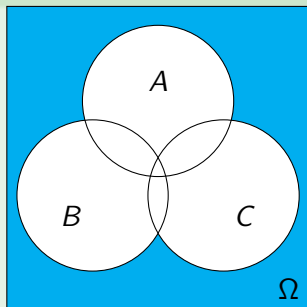
Feladat

- egyik nyelven sem beszél.

$$P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) = ?$$

$$= P(\overline{A \cup B \cup C})$$

$$= 1 - P(A \cup B \cup C).$$



$$P(\text{egyik nyelven sem beszél}) = 1 - P(\text{legalább egy nyelvet beszél}).$$

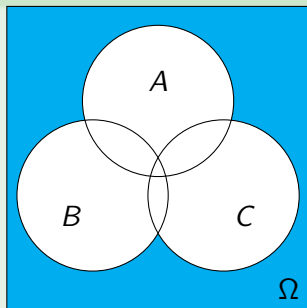
Feladat

- egyik nyelven sem beszél.

$$P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) = ?$$

$$= P(\overline{A \cup B \cup C})$$

$$= 1 - P(A \cup B \cup C).$$



$$P(\text{egyik nyelven sem beszél}) = 1 - P(\text{legalább egy nyelvet beszél}).$$

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$$

$$- P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

$$= 0,4 + 0,35 + 0,3 - 0,15 - 0,2 - 0,2 + 0,1 = 0,6.$$

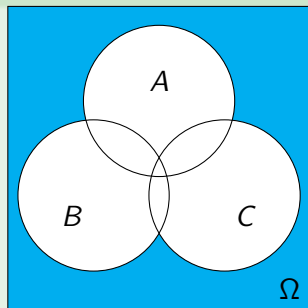
Feladat

- egyik nyelven sem beszél.

$$P(\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}) = ?$$

$$= P(\overline{A \cup B \cup C})$$

$$= 1 - P(A \cup B \cup C).$$



$$P(\text{egyik nyelven sem beszél}) = 1 - P(\text{legalább egy nyelvet beszél}).$$

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$$

$$- P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

$$= 0,4 + 0,35 + 0,3 - 0,15 - 0,2 - 0,2 + 0,1 = 0,6.$$

Tehát a válasz: $1 - 0,6 = 0,4$.

Diszkrét valószínűségi mezők

Azt mondjuk, hogy egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező **diszkrét valószínűségi mező**, ha Ω diszkrét, azaz véges vagy megszámlálhatóan végtelen elemszámú.

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N, \dots\}$$

$$\mathcal{A} = 2^\Omega.$$

Klasszikus valószínűségi mezők

Diszkrét valószínűségi mezők

Azt mondjuk, hogy egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező **diszkrét valószínűségi mező**, ha Ω diszkrét, azaz véges vagy megszámlálhatóan végtelen elemszámú.

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N, \dots\}$$

$$\mathcal{A} = 2^\Omega.$$

Tetszőleges $A \in \mathcal{A}$ esemény előáll az

$$A = \bigcup_{i: \omega_i \in A} \{\omega_i\}$$

diszjunkt felbontás alakjában, így

$$P(A) = \sum_{i: \omega_i \in A} P(\{\omega_i\}).$$

Tehát ahhoz, hogy egy tetszőleges esemény valószínűségét kiszámíthassuk, elegendő tudni a kimenetek valószínűségeit:

Eloszlás

A $\{p_1, p_2, \dots\}$ számsorozat **eloszlást** alkot, ha

$$p_i := P(\{\omega_i\}), \quad i = 1, 2, \dots$$

Tehát ahhoz, hogy egy tetszőleges esemény valószínűségét kiszámíthassuk, elegendő tudni a kimenetek valószínűségeit:

Eloszlás

A $\{p_1, p_2, \dots\}$ számsorozat **eloszlást** alkot, ha

$$p_i := P(\{\omega_i\}), \quad i = 1, 2, \dots$$

Eloszlások karakterizációja

Egy $\{p_1, p_2, \dots\}$ számsorozat akkor és csak akkor eloszlás, ha

- ❶ nemnegatív számokból áll, $p_i \geq 0$, $i = 1, 2, \dots$,
- ❷ összege 1,

$$\sum_i p_i = 1.$$

Tehát ahhoz, hogy egy tetszőleges esemény valószínűségét kiszámíthassuk, elegendő tudni a kimenetek valószínűségeit:

Eloszlás

A $\{p_1, p_2, \dots\}$ számsorozat **eloszlást** alkot, ha

$$p_i := P(\{\omega_i\}), \quad i = 1, 2, \dots$$

Eloszlások karakterizációja

Egy $\{p_1, p_2, \dots\}$ számsorozat akkor és csak akkor eloszlás, ha

- ❶ nemnegatív számokból áll, $p_i \geq 0$, $i = 1, 2, \dots$,
- ❷ összege 1,

$$\sum_i p_i = 1.$$

$$\sum_i p_i = \sum_i P(\{\omega_i\}) = P\left(\bigcup_i \{\omega_i\}\right) = P(\Omega) = 1.$$

Klasszikus valószínűségi mező

Azt mondjuk, hogy egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező **klasszikus valószínűségi mező**, ha

- 1 Ω véges elemszámú, azaz $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_N\}$,
- 2 minden kimenetelnek azonos a valószínűsége, azaz

$$P(\{\omega_1\}) = \dots = P(\{\omega_N\}) = \frac{1}{N}.$$

Klasszikus valószínűségi mező

Azt mondjuk, hogy egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező **klasszikus valószínűségi mező**, ha

- 1 Ω véges elemszámú, azaz $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_N\}$,
- 2 minden kimenetelnek azonos a valószínűsége, azaz

$$P(\{\omega_1\}) = \dots = P(\{\omega_N\}) = \frac{1}{N}.$$

Klasszikus képlet

Tetszőleges A esemény valószínűségének kiszámítása klasszikus valószínűségi mezőn:

$$P(A) = \sum_{i: \omega_i \in A} P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{N} \sum_{i: \omega_i \in A} 1 = \frac{|A|}{N}.$$

Vagyis

$$P(A) = \frac{\text{kedvező kimenetek száma}}{\text{összes kimenetek száma}}.$$

Összeszámlálási feladatok

- Ha n különböző elem közül húzunk visszatevés nélkül úgy, hogy a sorrend számít, és kihúzzuk az összes n elemet (vagyis sorbaállítuk n elemet, ezeket **permutációknak** nevezzük), akkor a lehetőségek száma:

$$n! := 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n.$$

- Ha n különböző elem közül k elemet húzunk visszatevés nélkül ($k \leq n$) úgy, hogy a sorrend számít (ezeket **ismétlés nélküli variációknak** nevezzük), akkor a lehetőségek száma

$$n(n-1)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Összeszámlálási feladatok (folyt.)

- Ha n különböző elem közül k elemet húzunk visszatevéssel úgy, hogy a sorrend számít (ezeket **ismétléses variációknak** nevezzük), akkor a lehetőségek száma

$$n^k.$$

- Ha n különböző elem közül k elemet húzunk visszatevés nélkül ($k \leq n$) úgy, hogy a sorrend nem számít (ezeket **ismétlés nélküli kombinációknak** nevezzük), akkor a lehetőségek száma

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}.$$

Összeszámlálási feladatok (folyt.)

- Ha n különböző elem közül k elemet húzunk visszatevéssel úgy, hogy a sorrend nem számít (ezeket **ismétléses kombinációknak** nevezzük), akkor a lehetőségek száma

$$\binom{n+k-1}{k}.$$

- Adva van n kártya, amiket szétosztunk k játékos között úgy, hogy rendre $n_1, n_2, \dots, n_k$ kártyát kapjanak, ahol $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$, és az egy játékoshoz kerülő lapok sorrendje nem számít (ezeket **ismétléses permutációknak** nevezzük). Ezeknek a lehetőségeknek a száma

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}.$$

Feladat

Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy találmra választott hatjegyű telefonszám jegyei mind különbözőek?

Feladat

Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy találmra választott hatjegyű telefonszám jegyei mind különbözőek?

Mivel 0-val nem kezdődhet telefonszám így az összes lehetőség száma: $|\Omega| = 9 \cdot 10^5$.

Feladat

Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy találmányra választott hatjegyű telefonszám jegyei mind különbözőek?

Mivel 0-val nem kezdődhet telefonszám így az összes lehetőség száma: $|\Omega| = 9 \cdot 10^5$.

A = a telefonszám számjegyei különbözőek . A kedvező esetek száma: $|A| = 9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$. Tehát

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{9 \cdot 10^5} = 0,1512.$$

Feladat

Egy vendéglő egyik asztalánál 9 vendég ül, mindenki rendel egy italt: összesen 3 korsó sört, 4 pohár vörösbort és 2 pohár fehér bort. A pincér találomra osztja ki az italokat. Mennyi a valószínűsége, hogy mindenki azt kapja, amit kért?

Feladat

Egy vendéglő egyik asztalánál 9 vendég ül, mindenki rendel egy italt: összesen 3 korsó sört, 4 pohár vörösbort és 2 pohár fehér bort. A pincér találomra osztja ki az italokat. Mennyi a valószínűsége, hogy mindenki azt kapja, amit kért?

$$P(\text{mindenki azt kapja, amit kért}) = \frac{3!4!2!}{9!} = \frac{1}{1260} \approx 0,0008.$$

Feladat

Egy vendéglő egyik asztalánál 9 vendég ül, mindenki rendel egy italt: összesen 3 korsó sört, 4 pohár vörösbort és 2 pohár fehér bort. A pincér találomra osztja ki az italokat. Mennyi a valószínűsége, hogy mindenki azt kapja, amit kért?

$$P(\text{mindenki azt kapja, amit kért}) = \frac{3!4!2!}{9!} = \frac{1}{1260} \approx 0,0008.$$

Feladat

Mekkora valószínűséggel lesz telitalálatunk az 5-ös lottón?

Feladat

Egy vendéglő egyik asztalánál 9 vendég ül, mindenki rendel egy italt: összesen 3 korsó sört, 4 pohár vörösbort és 2 pohár fehér bort. A pincér találmra osztja ki az italokat. Mennyi a valószínűsége, hogy mindenki azt kapja, amit kért?

$$P(\text{mindenki azt kapja, amit kért}) = \frac{3!4!2!}{9!} = \frac{1}{1260} \approx 0,0008.$$

Feladat

Mekkora valószínűséggel lesz telitalálatunk az 5-ös lottón?

$$|\Omega| = \binom{90}{5} = 43\,949\,268.$$

A = telitalálat, azaz eltaláljuk mind az 5 számot.

$$|A| = 1.$$

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{1}{\binom{90}{5}} \approx 2,28 \cdot 10^{-8}.$$

Geometriai valószínűségi mezők

Azt mondjuk, hogy egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező **geometriai valószínűségi mező**, ha rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal.

- Az Ω eseménytér egy geometriai alakzat, melynek mértéke: $0 < \mu(\Omega) < \infty$.
- Teljesül az **egyenletességi hipotézis**, azaz az események valószínűsége egyenesen arányos az események mértékével. Tehát, minden $A \subseteq \Omega$ eseményre

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{\text{kedvező hosszúság/terület/térfogat}}{\text{összes hosszúság/terület/térfogat}}.$$

Feladat

Egy focilabdát találomra nekirúgnak egy háznak, amely fala 10 m hosszú és 5 m magas. A házon két $2 \text{ m} \times 1,5 \text{ m}$ -es ablak van. Egyenletes eloszlást feltételezve mennyi annak a valószínűsége, hogy ablakot talál a labda?

Feladat

Egy focilabdát találomra nekirúgnak egy háznak, amely fala 10 m hosszú és 5 m magas. A házon két $2 \text{ m} \times 1,5 \text{ m}$ -es ablak van. Egyenletes eloszlást feltételezve mennyi annak a valószínűsége, hogy ablakot talál a labda?

A ház fala véges területű, valamint egyenletes eloszlást feltételezünk, tehát teljesül az egyenletességi hipotézis, így geometriai valószínűségi mezővel dolgozhatunk.

Feladat

Egy focilabdát találomra nekirúgnak egy háznak, amely fala 10 m hosszú és 5 m magas. A házon két $2 \text{ m} \times 1,5 \text{ m}$ -es ablak van. Egyenletes eloszlást feltételezve mennyi annak a valószínűsége, hogy ablakot talál a labda?

A ház fala véges területű, valamint egyenletes eloszlást feltételezünk, tehát teljesül az egyenletességi hipotézis, így geometriai valószínűségi mezővel dolgozhatunk.

$$\mu(\Omega) = 10 \cdot 5 = 50 \text{ m}^2.$$

A = Valamelyik ablakot találja el a labda.

$$\mu(A) = 2 \cdot 2 \cdot 1,5 = 6 \text{ m}^2.$$

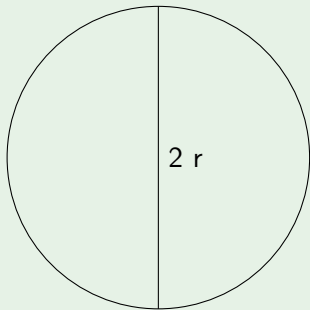
$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{6}{50} = 0,12.$$

Feladat

Egy r sugarú körvonalon megjelölünk egy pontot. Ezután a körlapon találomra választunk egy másik pontot. Mennyi a valószínűsége, hogy a két pont távolsága nagyobb, mint $\sqrt{2}r$?

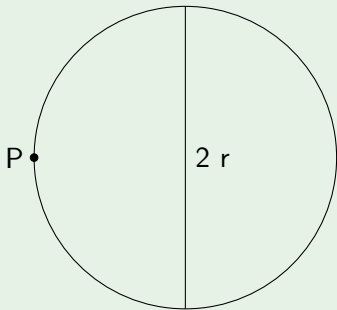
Feladat

Egy r sugarú körvonalon megjelölünk egy pontot. Ezután a körlapon találmra választunk egy másik pontot. Mennyi a valószínűsége, hogy a két pont távolsága nagyobb, mint $\sqrt{2}r$?



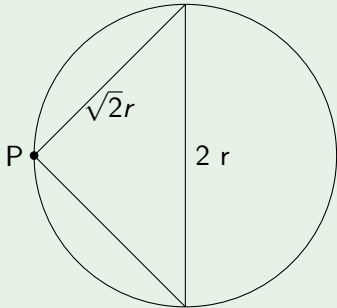
Feladat

Egy r sugarú körvonalon megjelölünk egy pontot. Ezután a körlapon találmra választunk egy másik pontot. Mennyi a valószínűsége, hogy a két pont távolsága nagyobb, mint $\sqrt{2}r$?



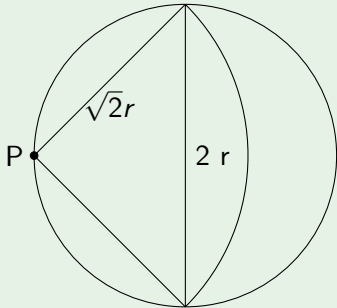
Feladat

Egy r sugarú körvonalon megjelölünk egy pontot. Ezután a körlapon találmra választunk egy másik pontot. Mennyi a valószínűsége, hogy a két pont távolsága nagyobb, mint $\sqrt{2}r$?



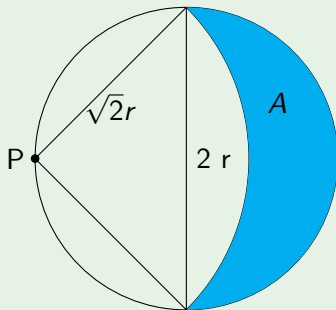
Feladat

Egy r sugarú körvonalon megjelölünk egy pontot. Ezután a körlapon találmra választunk egy másik pontot. Mennyi a valószínűsége, hogy a két pont távolsága nagyobb, mint $\sqrt{2}r$?



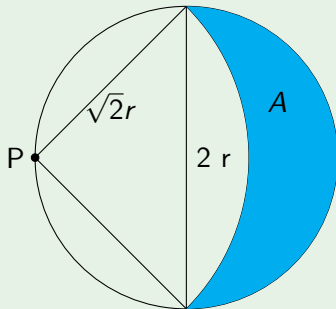
Feladat

Egy r sugarú körvonalon megjelölünk egy pontot. Ezután a körlapon találmra választunk egy másik pontot. Mennyi a valószínűsége, hogy a két pont távolsága nagyobb, mint $\sqrt{2}r$?



Feladat

Egy r sugarú körvonalon megjelölünk egy pontot. Ezután a körlapon taláломra választunk egy másik pontot. Mennyi a valószínűsége, hogy a két pont távolsága nagyobb, mint $\sqrt{2}r$?



$$\mu(\Omega) = r^2\pi.$$

$$\mu(A) = r^2\pi - \frac{r^2\pi}{2} - \frac{(\sqrt{2}r)^2\pi}{4} + \frac{(\sqrt{2}r)^2}{2} = r^2.$$

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{r^2}{r^2\pi} = \frac{1}{\pi}.$$

Előfordulhat, hogy egy véletlen kísérletet véghajtva nem ismerjük a kísérlet aktuális kimenetelét, de rendelkezünk valamilyen információval ezzel a kimenetellel kapcsolatban, és ezen háttérinformáció mellett szeretnénk bizonyos események valószínűségét meghatározni.

Például Texas Hold'em póker esetén kiszámolható, hogy mekkora valószínűséggel lesz pókerünk. Viszont ha kézbe két azonos értékű lapot tartunk, akkor a póker valószínűsége megnő.

Példa

Szabályos dobókockával dobunk, és legyen A az az esemény, hogy páratlan számot dobunk. Ekkor $P(A) = 1/2$. Adjuk meg A valószínűségét, ha rendelkezünk az alábbi információkkal.

Példa

Szabályos dobókockával dobunk, és legyen A az az esemény, hogy páratlan számot dobunk. Ekkor $P(A) = 1/2$. Adjuk meg A valószínűségét, ha rendelkezünk az alábbi információkkal.

- Tudjuk, hogy prímszámot dobtunk. Ekkor az 1, 4, 6 kimenetek nem következhetek be, ezért $P(A) = 2/3$.

Példa

Szabályos dobókockával dobunk, és legyen A az az esemény, hogy páratlan számot dobunk. Ekkor $P(A) = 1/2$. Adjuk meg A valószínűségét, ha rendelkezünk az alábbi információkkal.

- Tudjuk, hogy prímszámot dobtunk. Ekkor az 1, 4, 6 kimenetek nem következhetek be, ezért $P(A) = 2/3$.
- Tudjuk, hogy 5-nél kisebbet dobtunk. Ekkor az 5 és a 6 kimenetel nem következhetett be, így $P(A) = 2/4 = 1/2$.

Példa

Szabályos dobókockával dobunk, és legyen A az az esemény, hogy páratlan számot dobunk. Ekkor $P(A) = 1/2$. Adjuk meg A valószínűségét, ha rendelkezünk az alábbi információkkal.

- Tudjuk, hogy prímszámot dobtunk. Ekkor az 1, 4, 6 kimenetek nem következhetek be, ezért $P(A) = 2/3$.
- Tudjuk, hogy 5-nél kisebbet dobtunk. Ekkor az 5 és a 6 kimenetel nem következhetett be, így $P(A) = 2/4 = 1/2$.
- Tudjuk, hogy 3-ast vagy 5-öst dobtunk. Ekkor $P(A) = 2/2 = 1$, ugyanis most a háttérinformáció maga után vonja az A eseményt.

Példa

Szabályos dobókockával dobunk, és legyen A az az esemény, hogy páratlan számot dobunk. Ekkor $P(A) = 1/2$. Adjuk meg A valószínűségét, ha rendelkezünk az alábbi információkkal.

- Tudjuk, hogy prímszámot dobtunk. Ekkor az 1, 4, 6 kimenetek nem következhetek be, ezért $P(A) = 2/3$.
- Tudjuk, hogy 5-nél kisebbet dobtunk. Ekkor az 5 és a 6 kimenetel nem következhetett be, így $P(A) = 2/4 = 1/2$.
- Tudjuk, hogy 3-ast vagy 5-öst dobtunk. Ekkor $P(A) = 2/2 = 1$, ugyanis most a háttérinformáció maga után vonja az A eseményt.
- Tudjuk, hogy páros számot dobtunk. Ekkor $P(A) = 0/3 = 0$, ami nem meglepő, hiszen most a háttérinformáció kizárja az A eseményt.

Feltételes relatív gyakoriság

Ha n független kísérletet végzünk, akkor az A esemény **feltételes relatív gyakorisága azon feltétel mellett, hogy a B esemény bekövetkezett**

$$r_n(A|B) := \frac{k_n(A \cap B)}{k_n(B)} = \frac{r_n(A \cap B)}{r_n(B)}.$$

Tehát a feltételes relatív gyakoriság azt méri, hogy az A esemény mekkora hányadában következik be azon végrehajtásoknak, amikor a B is bekövetkezik.

Feltételes relatív gyakoriság

Ha n független kísérletet végzünk, akkor az A esemény **feltételes relatív gyakorisága azon feltétel mellett, hogy a B esemény bekövetkezett**

$$r_n(A|B) := \frac{k_n(A \cap B)}{k_n(B)} = \frac{r_n(A \cap B)}{r_n(B)}.$$

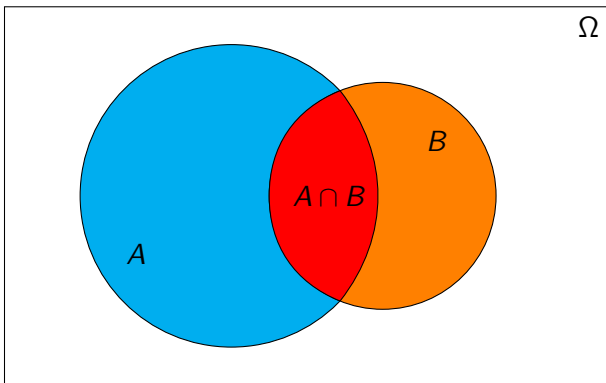
Tehát a feltételes relatív gyakoriság azt méri, hogy az A esemény mekkora hányadában következik be azon végrehajtásoknak, amikor a B is bekövetkezik.

Feltételes valószínűség

Tegyük fel, hogy $P(B) > 0$. Ekkor az A eseménynek a B eseményre vett **feltételes valószínűsége**

$$P(A|B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

$$P(A|B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$



Az A esemény „aránya a B eseményen belül”.

Példa

A korábbi dobókockás feladatban a kérdéses feltételes valószínűségek a definíció segítségével is kiszámíthatóak:

A = páratlan számot dobunk.

- B = prímszámot dobunk

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{2/6}{1/2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

- B = 5-nél kisebbet dobunk

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{2/6}{4/6} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

A feltételes valószínűség tulajdonságai

A feltételes valószínűség valószínűség

Legyen B egy pozitív valószínűségű esemény. Ekkor a B eseményre vett feltételes valószínűség valószínűségi mérték.

A feltételes valószínűség tulajdonságai

A feltételes valószínűség valószínűség

Legyen B egy pozitív valószínűségű esemény. Ekkor a B eseményre vett feltételes valószínűség valószínűségi mérték.

Ebből az következik, hogy a feltételes valószínűségre is teljesülnek a valószínűségi mértékek korábban vett azonosságai:

- Minden A eseményre $0 \leq P(A | B) \leq 1$.
- A biztos és a lehetetlen esemény: $P(\Omega | B) = 1$, $P(\emptyset | B) = 0$.
- Monotonitás: ha $A_1 \subseteq A_2$, akkor $P(A_1 | B) \leq P(A_2 | B)$.
- A komplementer esemény: $P(\bar{A} | B) = 1 - P(A | B)$.
- Additivitás: ha $A_1, A_2, \dots$ kizáró események egy véges vagy végtelen sorozata, akkor

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots | B) = P(A_1 | B) + P(A_2 | B) + \dots$$

- Szita-formula

Láncszabály

Legyenek $A_1, \dots, A_n$ olyan események, melyekre $P(A_1 \cap \dots \cap A_n) > 0$. Ekkor

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) P(A_2 | A_1) P(A_3 | A_1 \cap A_2) \dots \\ P(A_n | A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}).$$

Láncszabály

Legyenek $A_1, \dots, A_n$ olyan események, melyekre $P(A_1 \cap \dots \cap A_n) > 0$. Ekkor

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) P(A_2 | A_1) P(A_3 | A_1 \cap A_2) \dots P(A_n | A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}).$$

Bizonyítás. A feltételes valószínűség definíciójával:

$$\begin{aligned} & P(A_1) P(A_2 | A_1) P(A_3 | A_1 \cap A_2) \dots P(A_n | A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) \\ &= P(A_1) \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1)} \frac{P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}{P(A_1 \cap A_2)} \dots \frac{P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1} \cap A_n)}{P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})} \\ &= P(A_1 \cap \dots \cap A_n). \end{aligned}$$

Bayes-formula

Legyen A és B pozitív valószínűségű esemény. Ekkor

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}.$$

Bayes-formula

Legyen A és B pozitív valószínűségű esemény. Ekkor

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}.$$

Bizonyítás. A láncszabály alkalmazásával:

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}.$$

Bayes-formula

Legyen A és B pozitív valószínűségű esemény. Ekkor

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}.$$

Bizonyítás. A láncszabály alkalmazásával:

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}.$$

Teljes eseményrendszer

Azt mondjuk, hogy a $B_1, \dots, B_n$ események **teljes eseményrendszert** alkotnak, ha teljesítik az alábbi tulajdonságokat:

- páronként diszjunktak,
- együttesen lefedik az eseményteret: $B_1 \cup \dots \cup B_n = \Omega$,
- mindegyik valószínűsége pozitív.

A teljes valószínűség tétele és a Bayes-tétel

Legyen $B_1, \dots, B_n$ egy teljes eseményrendszer, és tekintsünk egy tetszőleges A eseményt. Ekkor teljesülnek az alábbi összefüggések:

- **Teljes valószínűség tétele:**

$$P(A) = P(A | B_1) P(B_1) + \dots + P(A | B_n) P(B_n).$$

- **Bayes-tétel:** Ha $P(A) > 0$, akkor

$$P(B_j | A) = \frac{P(A | B_j) P(B_j)}{\sum_{i=1}^n P(A | B_i) P(B_i)}.$$

A teljes valószínűség tétele és a Bayes-tétel

Legyen $B_1, \dots, B_n$ egy teljes eseményrendszer, és tekintsünk egy tetszőleges A eseményt. Ekkor teljesülnek az alábbi összefüggések:

- **Teljes valószínűség tétele:**

$$P(A) = P(A | B_1) P(B_1) + \dots + P(A | B_n) P(B_n).$$

- **Bayes-tétel:** Ha $P(A) > 0$, akkor

$$P(B_j | A) = \frac{P(A | B_j) P(B_j)}{\sum_{i=1}^n P(A | B_i) P(B_i)}.$$

Bizonyítás. Az additivitás és a láncszabály alkalmazásával:

$$P(A) = P(A \cap B_1) + \dots + P(A \cap B_n) = P(A | B_1) P(B_1) + \dots + P(A | B_n) P(B_n).$$

A Bayes-formulát és a teljes valószínűség tételt használva pedig:

$$P(B_j | A) = \frac{P(A | B_j) P(B_j)}{P(A)} = \frac{P(A | B_j) P(B_j)}{\sum_{i=1}^n P(A | B_i) P(B_i)}.$$

Feladat

Egy kalapban 5 fehér, 5 piros és 5 zöld golyó van. Három golyót kiveszünk taláломra visszatevés nélkül. Mennyi a valószínűsége, hogy az első golyó piros, a második fehér és a harmadik ismét piros lesz?

Feladat

Egy kalapban 5 fehér, 5 piros és 5 zöld golyó van. Három golyót kiveszünk taláломra visszatevés nélkül. Mennyi a valószínűsége, hogy az első golyó piros, a második fehér és a harmadik ismét piros lesz?

A_1 = Az első golyó piros.

A_2 = A második golyó fehér.

A_3 = A harmadik golyó piros.

Feladat

Egy kalapban 5 fehér, 5 piros és 5 zöld golyó van. Három golyót kiveszünk taláломra visszatevés nélkül. Mennyi a valószínűsége, hogy az első golyó piros, a második fehér és a harmadik ismét piros lesz?

A_1 = Az első golyó piros.

A_2 = A második golyó fehér.

A_3 = A harmadik golyó piros.

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) =$$

Feladat

Egy kalapban 5 fehér, 5 piros és 5 zöld golyó van. Három golyót kiveszünk taláломra visszatevés nélkül. Mennyi a valószínűsége, hogy az első golyó piros, a második fehér és a harmadik ismét piros lesz?

A_1 = Az első golyó piros.

A_2 = A második golyó fehér.

A_3 = A harmadik golyó piros.

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) P(A_2 | A_1) P(A_3 | A_1 \cap A_2)$$

$$= \frac{5}{15} \frac{5}{14} \frac{4}{13} = \frac{10}{273}.$$

Feladat

Egy csomagolóüzembe négy termelő szállít almát. A leadott gyümölcs tizede származik az első, három tizede a második, és két ötöde a harmadik termelőtől. Az egyes termelők esetén a leadott mennyiség 40, 50, 20 illetve 100 százaléka elsőosztályú.

- Ha véletlenszerűen kiválasztunk egy almát, akkor mennyi a valószínűsége annak, hogy az alma elsőosztályú?

Feladat

Egy csomagolóüzembe négy termelő szállít almát. A leadott gyümölcs tizede származik az első, három tizede a második, és két ötöde a harmadik termelőtől. Az egyes termelők esetén a leadott mennyiség 40, 50, 20 illetve 100 százaléka elsőosztályú.

- Ha véletlenszerűen kiválasztunk egy almát, akkor mennyi a valószínűsége annak, hogy az alma elsőosztályú?

A = A kiválasztott alma elsőosztályú.

B_i = A kiválasztott alma az i -edik termelőtől van, $i = 1, 2, 3, 4$.

Feladat

Egy csomagolóüzembe négy termelő szállít almát. A leadott gyümölcs tizede származik az első, három tizede a második, és két ötöde a harmadik termelőtől. Az egyes termelők esetén a leadott mennyiség 40, 50, 20 illetve 100 százaléka elsőosztályú.

- Ha véletlenszerűen kiválasztunk egy almát, akkor mennyi a valószínűsége annak, hogy az alma elsőosztályú?

A = A kiválasztott alma elsőosztályú.

B_i = A kiválasztott alma az i -edik termelőtől van, $i = 1, 2, 3, 4$.

$$P(B_1) = 0,1 \quad P(B_2) = 0,3 \quad P(B_3) = 0,4 \quad P(B_4) = 0,2$$

Feladat

Egy csomagolóüzembe négy termelő szállít almát. A leadott gyümölcs tizede származik az első, három tizede a második, és két ötöde a harmadik termelőtől. Az egyes termelők esetén a leadott mennyiség 40, 50, 20 illetve 100 százaléka elsőosztályú.

- Ha véletlenszerűen kiválasztunk egy almát, akkor mennyi a valószínűsége annak, hogy az alma elsőosztályú?

A = A kiválasztott alma elsőosztályú.

B_i = A kiválasztott alma az i -edik termelőtől van, $i = 1, 2, 3, 4$.

$$P(B_1) = 0,1 \quad P(B_2) = 0,3 \quad P(B_3) = 0,4 \quad P(B_4) = 0,2$$

$$P(A|B_1) = 0,4 \quad P(A|B_2) = 0,5 \quad P(A|B_3) = 0,2 \quad P(A|B_4) = 1$$

Feladat

Egy csomagolóüzembe négy termelő szállít almát. A leadott gyümölcs tizede származik az első, három tizede a második, és két ötöde a harmadik termelőtől. Az egyes termelők esetén a leadott mennyiség 40, 50, 20 illetve 100 százaléka elsőosztályú.

- Ha véletlenszerűen kiválasztunk egy almát, akkor mennyi a valószínűsége annak, hogy az alma elsőosztályú?

A = A kiválasztott alma elsőosztályú.

B_i = A kiválasztott alma az i -edik termelőtől van, $i = 1, 2, 3, 4$.

$$P(B_1) = 0,1 \quad P(B_2) = 0,3 \quad P(B_3) = 0,4 \quad P(B_4) = 0,2$$

$$P(A|B_1) = 0,4 \quad P(A|B_2) = 0,5 \quad P(A|B_3) = 0,2 \quad P(A|B_4) = 1$$

$$P(A) =$$

Feladat

Egy csomagolóüzembe négy termelő szállít almát. A leadott gyümölcs tizede származik az első, három tizede a második, és két ötöde a harmadik termelőtől. Az egyes termelők esetén a leadott mennyiség 40, 50, 20 illetve 100 százaléka elsőosztályú.

- Ha véletlenszerűen kiválasztunk egy almát, akkor mennyi a valószínűsége annak, hogy az alma elsőosztályú?

A = A kiválasztott alma elsőosztályú.

B_i = A kiválasztott alma az i -edik termelőtől van, $i = 1, 2, 3, 4$.

$$P(B_1) = 0,1 \quad P(B_2) = 0,3 \quad P(B_3) = 0,4 \quad P(B_4) = 0,2$$

$$P(A|B_1) = 0,4 \quad P(A|B_2) = 0,5 \quad P(A|B_3) = 0,2 \quad P(A|B_4) = 1$$

$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + \dots + P(A|B_4)P(B_4) = 0,47.$$

Feladat

- Feltéve, hogy az alma másodosztályú, mennyi annak a valószínűsége, hogy a harmadik termelő szállította be?

Feladat

- Feltéve, hogy az alma másodosztályú, mennyi annak a valószínűsége, hogy a harmadik termelő szállította be?

$$P(B_3 | \bar{A}) =$$

Feladat

- Feltéve, hogy az alma másodosztályú, mennyi annak a valószínűsége, hogy a harmadik termelő szállította be?

$$\begin{aligned} P(B_3 | \bar{A}) &= \frac{P(\bar{A} | B_3) P(B_3)}{P(\bar{A})} = \frac{(1 - P(A | B_3)) P(B_3)}{1 - P(A)} \\ &= \frac{0,8 \cdot 0,4}{0,53} = 0,604. \end{aligned}$$

Két esemény függetlensége

Legyen A és B két tetszőleges esemény. Azt mondjuk, hogy a két esemény **független** egymástól, ha

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Két esemény függetlensége

Legyen A és B két tetszőleges esemény. Azt mondjuk, hogy a két esemény **független** egymástól, ha

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

A függetlenséggel ekvivalens tulajdonságok

Ha A és B pozitív valószínűségű események, akkor az alábbiak ekvivalensek:

- A és B független egymástól.
- $P(A | B) = P(A)$.
- $P(B | A) = P(B)$.

Két esemény függetlensége

Legyen A és B két tetszőleges esemény. Azt mondjuk, hogy a két esemény **független** egymástól, ha

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

A függetlenséggel ekvivalens tulajdonságok

Ha A és B pozitív valószínűségű események, akkor az alábbiak ekvivalensek:

- A és B független egymástól.
- $P(A | B) = P(A)$.
- $P(B | A) = P(B)$.

Bizonyítás. Ha A és B függetlenek. akkor

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A).$$

Ha pedig $P(A|B) = P(A)$, akkor a láncszabállyal

$$P(A \cap B) = P(A|B) P(B) = P(A) P(B).$$

Ha pedig $P(A|B) = P(A)$, akkor a láncszabállyal

$$P(A \cap B) = P(A|B) P(B) = P(A) P(B).$$

Példa

Korábbi példában láttuk, hogy szabályos dobókockadobás esetén ha
 A = páratlan számot dobunk,
 B = 5-nél kisebbet dobunk,
akkor

$$P(A|B) = P(A) = \frac{1}{2}.$$

Tehát a két esemény független egymástól.

Ha pedig $P(A|B) = P(A)$, akkor a láncszabállyal

$$P(A \cap B) = P(A|B) P(B) = P(A) P(B).$$

Példa

Korábbi példában láttuk, hogy szabályos dobókockadobás esetén ha
 A = páratlan számot dobunk,
 B = 5-nél kisebbet dobunk,
akkor

$$P(A|B) = P(A) = \frac{1}{2}.$$

Tehát a két esemény független egymástól.

Ugyanezt a definíció segítségével is megkapjuk:

$$P(A) = \frac{1}{2} \quad P(B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Ha pedig $P(A|B) = P(A)$, akkor a láncszabállyal

$$P(A \cap B) = P(A|B) P(B) = P(A) P(B).$$

Példa

Korábbi példában láttuk, hogy szabályos dobókockadobás esetén ha
 A = páratlan számot dobunk,
 B = 5-nél kisebbet dobunk,
akkor

$$P(A|B) = P(A) = \frac{1}{2}.$$

Tehát a két esemény független egymástól.

Ugyanezt a definíció segítségével is megkapjuk:

$$P(A) = \frac{1}{2} \quad P(B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \quad P(A)P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

Ha pedig $P(A|B) = P(A)$, akkor a láncszabállyal

$$P(A \cap B) = P(A|B) P(B) = P(A) P(B).$$

Példa

Korábbi példában láttuk, hogy szabályos dobókockadobás esetén ha
 A = páratlan számot dobunk,
 B = 5-nél kisebbet dobunk,
akkor

$$P(A|B) = P(A) = \frac{1}{2}.$$

Tehát a két esemény független egymástól.

Ugyanezt a definíció segítségével is megkapjuk:

$$P(A) = \frac{1}{2} \quad P(B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \quad P(A)P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

$$P(A \cap B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \quad \text{tehát} \quad P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Több esemény függetlensége

Legyen $A_1, A_2, \dots$ eseményeknek egy véges vagy végtelen sorozata.

- Azt mondjuk, hogy az események **páronként függetlenek**, ha bármely kettő független egymástól, tehát tetszőleges A_i és A_j különböző eseményeket választva

$$P(A_i \cap A_j) = P(A_i) P(A_j).$$

- Azt mondjuk, hogy az események **(teljesen) függetlenek**, ha közülük tetszőleges $A_{i_1}, \dots, A_{i_n}$ különböző eseményeket kiválasztva

$$P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_n}) = P(A_{i_1}) \dots P(A_{i_n}).$$

Kapcsolat a kétfajta függetlenség között

Ha az $A_1, A_2, \dots$ események teljesen függetlenek, akkor páronként is függetlenek.

Az állítás megfordítása azonban nem igaz, tehát a páronkénti függetlenségből nem következik a teljes függetlenség.

Kapcsolat a kétfajta függetlenség között

Ha az $A_1, A_2, \dots$ események teljesen függetlenek, akkor páronként is függetlenek.

Az állítás megfordítása azonban nem igaz, tehát a páronkénti függetlenségből nem következik a teljes függetlenség.

Bizonyítás. Ha az események teljesen függetlenek, akkor $n = 2$ mellett következik a páronkénti függetlenség.

Kapcsolat a kétfajta függetlenség között

Ha az $A_1, A_2, \dots$ események teljesen függetlenek, akkor páronként is függetlenek.

Az állítás megfordítása azonban nem igaz, tehát a páronkénti függetlenségből nem következik a teljes függetlenség.

Bizonyítás. Ha az események teljesen függetlenek, akkor $n = 2$ mellett következik a páronkénti függetlenség.

Ellenpélda, ami cáfolja a megfordítást:

Feldobunk két szabályos pénzérmét, egy 10 és egy 20 forintost.

A = fejet dobunk a 10 forintos érmével,

B = fejet dobunk a 20 forintos érmével,

C = összesen 1 fejet dobunk.

Megmutatható, hogy a három esemény páronként független.

Viszont teljesen nem függetlenek:

$$P(A \cap B \cap C) = 0 \neq P(A)P(B)P(C) = \frac{1}{8}.$$

Diszkrét valószínűségi változók

Valószínűségi változó

Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező, és $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ függvény. Ekkor ξ egy **valószínűségi változó (vagy véletlen változó)**, ha tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén $\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) \leq x\} \in \mathcal{A}$.

Tehát egy valószínűségi változó egy véletlen szám, ami a kísérlet kimenetelétől függ.

Diszkrét valószínűségi változók

Valószínűségi változó

Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező, és $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ függvény. Ekkor ξ egy **valószínűségi változó (vagy véletlen változó)**, ha tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén $\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) \leq x\} \in \mathcal{A}$.

Tehát egy valószínűségi változó egy véletlen szám, ami a kísérlet kimenetelétől függ.

A definíció miatt a $\{\xi \leq x\}$, $\{\xi \geq x\}$, $\{\xi = x\}$, $\{x_1 < \xi < x_2\}$, ... halmazok események, így vizsgálhatjuk ezek valószínűségét.

Diszkrét valószínűségi változók

Valószínűségi változó

Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező, és $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ függvény. Ekkor ξ egy **valószínűségi változó (vagy véletlen változó)**, ha tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén $\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) \leq x\} \in \mathcal{A}$.

Tehát egy valószínűségi változó egy véletlen szám, ami a kísérlet kimenetelétől függ.

A definíció miatt a $\{\xi \leq x\}$, $\{\xi \geq x\}$, $\{\xi = x\}$, $\{x_1 < \xi < x_2\}$, ... halmazok események, így vizsgálhatjuk ezek valószínűségét.

Példa

Tekintsük a szabályos kockadobást.

$$\xi(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{ha } \omega = \{1\}, \\ 2, & \text{ha } \omega = \{2\}, \\ \vdots & \\ 6, & \text{ha } \omega = \{6\}. \end{cases} \quad P(\{\xi = i\}) = P(\xi = i) = \frac{1}{6}, \quad i = 1, 2, \dots, 6.$$

Diszkrét valószínűségi változó

A ξ valószínűségi változó **diszkrét**, ha lehetséges értékeinek halmaza, a $\{\xi(\omega) : \omega \in \Omega\} = \{x_1, x_2, \dots\}$ értékkészlet megszámlálható számosságú.

A ξ diszkrét valószínűségi változó **eloszlása, súlyfüggvénye** a lehetséges értékek valószínűségeiből képzett sorozat:

$$p_i = P(\xi = x_i).$$

Diszkrét valószínűségi változó

A ξ valószínűségi változó **diszkrét**, ha lehetséges értékeinek halmaza, a $\{\xi(\omega) : \omega \in \Omega\} = \{x_1, x_2, \dots\}$ értékkészlet megszámlálható számosságú.

A ξ diszkrét valószínűségi változó **eloszlása, súlyfüggvénye** a lehetséges értékek valószínűségeiből képzett sorozat:

$$p_i = P(\xi = x_i).$$

Példa

Két dobókockával dobva, a dobott számok összegét jelölje ξ .
Határozzuk meg ξ eloszlását!

Diszkrét valószínűségi változó

A ξ valószínűségi változó **diszkrét**, ha lehetséges értékeinek halmaza, a $\{\xi(\omega) : \omega \in \Omega\} = \{x_1, x_2, \dots\}$ értékkészlet megszámlálható számosságú.

A ξ diszkrét valószínűségi változó **eloszlása, súlyfüggvénye** a lehetséges értékek valószínűségeiből képzett sorozat:

$$p_i = P(\xi = x_i).$$

Példa

Két dobókockával dobva, a dobott számok összegét jelölje ξ .
Határozzuk meg ξ eloszlását!

Ekkor ξ egy diszkrét valószínűségi változó, lehetséges értékei:
 $\xi \in \{2, 3, \dots, 12\}$.

Diszkrét valószínűségi változó

A ξ valószínűségi változó **diszkrét**, ha lehetséges értékeinek halmaza, a $\{\xi(\omega) : \omega \in \Omega\} = \{x_1, x_2, \dots\}$ értékészlet megszámlálható számosságú.

A ξ diszkrét valószínűségi változó **eloszlása, súlyfüggvénye** a lehetséges értékek valószínűségeiből képzett sorozat:

$$p_i = P(\xi = x_i).$$

Példa

Két dobókockával dobva, a dobott számok összegét jelölje ξ . Határozzuk meg ξ eloszlását!

Ekkor ξ egy diszkrét valószínűségi változó, lehetséges értékei: $\xi \in \{2, 3, \dots, 12\}$.

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p_i	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Diszkrét valószínűségi változó várható értéke

Legyen ξ egy diszkrét valószínűségi változó $x_1, x_2, \dots$ lehetséges értékekkel. Ekkor az

$$\mathbb{E}(\xi) := \sum_k x_k P(\xi = x_k)$$

mennyiséget a ξ **várható értékének** nevezzük, amennyiben ez a sor abszolút konvergens, azaz $\sum_k |x_k| P(\xi = x_k) < \infty$.

Példa

Várhatóan mennyi lesz két kockadobás eredményének összege?

Diszkrét valószínűségi változó várható értéke

Legyen ξ egy diszkrét valószínűségi változó $x_1, x_2, \dots$ lehetséges értékekkel. Ekkor az

$$\mathbb{E}(\xi) := \sum_k x_k P(\xi = x_k)$$

mennyiséget a ξ **várható értékének** nevezzük, amennyiben ez a sor abszolút konvergens, azaz $\sum_k |x_k| P(\xi = x_k) < \infty$.

Példa

Várhatóan mennyi lesz két kockadobás eredményének összege?
Legyen ξ = két szabályos kockadobás eredményének összege. Az előző példában meghatároztuk ξ eloszlását, így

$$\mathbb{E}(\xi) = \sum_{k=2}^{12} k P(\xi = k) = 2 \cdot \frac{1}{36} + 3 \cdot \frac{2}{36} + \dots + 12 \cdot \frac{1}{36} = 7.$$

A várható érték tulajdonságai

Ha ξ és η diszkrét valószínűségi változók, és $a, b \in \mathbb{R}$, akkor

- $\mathbb{E}(a\xi) = a\mathbb{E}(\xi)$ (homogenitás),
- $\mathbb{E}(\xi + \eta) = \mathbb{E}(\xi) + \mathbb{E}(\eta)$ (additivitás),
- $\mathbb{E}(a\xi + b\eta) = a\mathbb{E}(\xi) + b\mathbb{E}(\eta)$ (linearitás),
- ha ξ és η függetlenek, akkor $\mathbb{E}(\xi\eta) = \mathbb{E}(\xi)\mathbb{E}(\eta)$,
- ha $\xi \leq \eta$, akkor $\mathbb{E}(\xi) \leq \mathbb{E}(\eta)$ (monotonitás),
- ha $\xi \geq 0$, akkor $\mathbb{E}(\xi) \geq 0$ (pozitivitás),
- ha $\xi \geq 0$ és $\mathbb{E}(\xi) = 0$, akkor $P(\xi = 0) = 1$,
- $|\mathbb{E}(\xi)| \leq \mathbb{E}(|\xi|)$,
- $\mathbb{E}(|\xi\eta|) \leq \sqrt{\mathbb{E}(\xi^2)\mathbb{E}(\eta^2)}$ (Cauchy-Schwartz egyenlőtlenség).

Példa

Várhatóan mennyi lesz két kockadobás eredményének összege?

Példa

Várhatóan mennyi lesz két kockadobás eredményének összege?
Legyen ξ és η két kockadobás eredménye. Ekkor

$$\mathbb{E}(\xi) = \mathbb{E}(\eta) = \sum_{k=1}^6 k P(\xi = k) = 1 \cdot \frac{1}{6} + \cdots + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{7}{2}.$$

Példa

Várhatóan mennyi lesz két kockadobás eredményének összege?
Legyen ξ és η két kockadobás eredménye. Ekkor

$$\mathbb{E}(\xi) = \mathbb{E}(\eta) = \sum_{k=1}^6 k P(\xi = k) = 1 \cdot \frac{1}{6} + \cdots + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{7}{2}.$$

A várható érték additivitását felhasználva kapjuk, hogy

$$\mathbb{E}(\xi + \eta) = \mathbb{E}(\xi) + \mathbb{E}(\eta) = \frac{7}{2} + \frac{7}{2} = 7.$$

Valószínűségi változók függetlensége

A ξ és η valószínűségi változókat akkor nevezzük **függetleneknek**, ha tetszőleges $x, y \in \mathbb{R}$ esetén

$$P(\xi \leq x, \eta \leq y) = P(\xi \leq x) P(\eta \leq y).$$

Diszkrét valószínűségi változók függetlensége

Ha ξ diszkrét valószínűségi változó $x_1, x_2, \dots$ lehetséges értékekkel és η diszkrét valószínűségi változó $y_1, y_2, \dots$ lehetséges értékekkel, akkor ξ és η függetlensége azzal ekvivalens, hogy tetszőleges i, j esetén

$$P(\xi = x_i, \eta = y_j) = P(\xi = x_i) P(\eta = y_j).$$

Példa

Mennyi két független kockadobás eredményének szorzata?

Példa

Mennyi két független kockadobás eredményének szorzata?

Legyen ξ és η két kockadobás eredménye. Ekkor mivel ξ és η független, így

$$\mathbb{E}(\xi\eta) = \mathbb{E}(\xi) \mathbb{E}(\eta) = \frac{7}{2} \cdot \frac{7}{2} = \frac{49}{4}.$$

Példa

Mennyi két független kockadobás eredményének szorzata?

Legyen ξ és η két kockadobás eredménye. Ekkor mivel ξ és η független, így

$$\mathbb{E}(\xi\eta) = \mathbb{E}(\xi) \mathbb{E}(\eta) = \frac{7}{2} \cdot \frac{7}{2} = \frac{49}{4}.$$

Valószínűségi változó transzformáltjának várható értéke

Legyen $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény és ξ diszkrét valószínűségi változó $x_1, x_2, \dots$ lehetséges értékekkel. Ekkor

$$\mathbb{E}(g(\xi)) = \sum_k g(x_k) P(\xi = x_k),$$

amennyiben ez a sor abszolút konvergens.

Diszkrét valószínűségi változó varianciája

Egy ξ diszkrét valószínűségi változó **varianciáján, vagy szórásnégyzetén** a változó várható értékétől vett négyzetes eltérésének várható értékét értjük, azaz

$$\text{Var}(\xi) := D^2(\xi) := \mathbb{E}((\xi - \mathbb{E}(\xi))^2).$$

Diszkrét valószínűségi változó varianciája

Egy ξ diszkrét valószínűségi változó **varianciáján, vagy szórásnégyzetén** a változó várható értékétől vett négyzetes eltérésének várható értékét értjük, azaz

$$\text{Var}(\xi) := D^2(\xi) := \mathbb{E}((\xi - \mathbb{E}(\xi))^2).$$

A variancia kiszámolása

$$\begin{aligned}\text{Var}(\xi) &= \mathbb{E}(\xi^2 - 2\xi \mathbb{E}(\xi) + (\mathbb{E}(\xi))^2) = \mathbb{E}(\xi^2) - 2\mathbb{E}(\xi)\mathbb{E}(\xi) + (\mathbb{E}(\xi))^2 \\ &= \mathbb{E}(\xi^2) - (\mathbb{E}(\xi))^2.\end{aligned}$$

A valószínűségi változó transzformáltjának várható értékére vonatkozó tételből pedig $g(x) = x^2$ választással:

$$\mathbb{E}(\xi^2) = \sum_k (x_k)^2 P(\xi = x_k).$$

Az $\mathbb{E}(\xi^2)$ elnevezése: második momentum.

A variancia tulajdonságai

Ha ξ és η diszkrét valószínűségi változók és $a \in \mathbb{R}$, akkor

- $\text{Var}(\xi) \geq 0$,
- ha $\text{Var}(\xi) = 0$, akkor $P(\xi = 0) = 1$,
- $\text{Var}(\xi + a) = \text{Var}(\xi)$ (eltolásinvariancia),
- $\text{Var}(a\xi) = a^2 \text{Var}(\xi)$ (homogenitás),
- ha ξ és η függetlenek, akkor $\text{Var}(\xi + \eta) = \text{Var}(\xi) + \text{Var}(\eta)$.

A variancia tulajdonságai

Ha ξ és η diszkrét valószínűségi változók és $a \in \mathbb{R}$, akkor

- $\text{Var}(\xi) \geq 0$,
- ha $\text{Var}(\xi) = 0$, akkor $P(\xi = 0) = 1$,
- $\text{Var}(\xi + a) = \text{Var}(\xi)$ (eltolásinvariancia),
- $\text{Var}(a\xi) = a^2 \text{Var}(\xi)$ (homogenitás),
- ha ξ és η függetlenek, akkor $\text{Var}(\xi + \eta) = \text{Var}(\xi) + \text{Var}(\eta)$.

Szórás

Egy ξ valószínűségi változó szórása a változó varianciájának négyzetgyöke, azaz

$$D(\xi) := \sqrt{\text{Var}(\xi)}.$$

Feladat

Határozzuk meg két független kockadobás maximumának várható értékét, szórását.

Legyen ξ és η két kockadobás eredménye. $\zeta := \max(\xi, \eta)$.

Feladat

Határozzuk meg két független kockadobás maximumának várható értékét, szórását.

Legyen ξ és η két kockadobás eredménye. $\zeta := \max(\xi, \eta)$.

Lehetséges értékek: $\zeta \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Feladat

Határozzuk meg két független kockadobás maximumának várható értékét, szórását.

Legyen ξ és η két kockadobás eredménye. $\zeta := \max(\xi, \eta)$.

Lehetséges értékek: $\zeta \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Eloszlás:

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$

$$\mathbb{E}(\zeta) = \sum_{k=1}^6 k P(\zeta = k) = \frac{161}{36} \approx 4,47.$$

Feladat

Határozzuk meg két független kockadobás maximumának várható értékét, szórását.

Legyen ξ és η két kockadobás eredménye. $\zeta := \max(\xi, \eta)$.

Lehetséges értékek: $\zeta \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Eloszlás:

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$

$$\mathbb{E}(\zeta) = \sum_{k=1}^6 k P(\zeta = k) = \frac{161}{36} \approx 4,47.$$

$$\mathbb{E}(\zeta^2) = \sum_{k=1}^6 k^2 P(\zeta = k) = 1^2 \cdot \frac{1}{36} + \dots + 6^2 \cdot \frac{11}{36} = \frac{791}{36},$$

Feladat

Határozzuk meg két független kockadobás maximumának várható értékét, szórását.

Legyen ξ és η két kockadobás eredménye. $\zeta := \max(\xi, \eta)$.

Lehetséges értékek: $\zeta \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Eloszlás:

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$

$$\mathbb{E}(\zeta) = \sum_{k=1}^6 k P(\zeta = k) = \frac{161}{36} \approx 4,47.$$

$$\mathbb{E}(\zeta^2) = \sum_{k=1}^6 k^2 P(\zeta = k) = 1^2 \cdot \frac{1}{36} + \dots + 6^2 \cdot \frac{11}{36} = \frac{791}{36},$$

$$\text{Var}(\zeta) = \mathbb{E}(\zeta^2) - \mathbb{E}(\zeta)^2 = \frac{791}{36} - \left(\frac{161}{36}\right)^2 = \frac{2555}{1296},$$

Feladat

Határozzuk meg két független kockadobás maximumának várható értékét, szórását.

Legyen ξ és η két kockadobás eredménye. $\zeta := \max(\xi, \eta)$.

Lehetséges értékek: $\zeta \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Eloszlás:

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$

$$\mathbb{E}(\zeta) = \sum_{k=1}^6 k P(\zeta = k) = \frac{161}{36} \approx 4,47.$$

$$\mathbb{E}(\zeta^2) = \sum_{k=1}^6 k^2 P(\zeta = k) = 1^2 \cdot \frac{1}{36} + \dots + 6^2 \cdot \frac{11}{36} = \frac{791}{36},$$

$$\text{Var}(\zeta) = \mathbb{E}(\zeta^2) - \mathbb{E}(\zeta)^2 = \frac{791}{36} - \left(\frac{161}{36}\right)^2 = \frac{2555}{1296},$$

$$D(\zeta) = \sqrt{\text{Var}(\zeta)} = \sqrt{\frac{2555}{1296}} = \frac{\sqrt{2555}}{36} \approx 1,4.$$

Bernoulli-eloszlás

A ξ diszkrét valószínűségi változó **Bernoulli, vagy bináris** eloszlású változó $p \in (0, 1)$ paraméterrel, ha

$$P(\xi = 1) = p, \quad P(\xi = 0) = 1 - p.$$

Jelölése: $\xi \sim \text{Bernoulli}(p)$.

$$\mathbb{E}(\xi) = p, \quad \text{Var}(\xi) = p(1 - p).$$

Bernoulli-eloszlás

A ξ diszkrét valószínűségi változó **Bernoulli, vagy bináris** eloszlású változó $p \in (0, 1)$ paraméterrel, ha

$$P(\xi = 1) = p, \quad P(\xi = 0) = 1 - p.$$

Jelölése: $\xi \sim \text{Bernoulli}(p)$.

$$\mathbb{E}(\xi) = p, \quad \text{Var}(\xi) = p(1 - p).$$

Másképpen fogalmazva Bernoulli-kísérletnek nevezzük azt a kísérletet, aminek kétféle kimenetele van, sikeres vagy sikertelen, és a siker valószínűsége p .

Binomiális-eloszlás

A ξ diszkrét valószínűségi változó **binomiális** eloszlású változó $n \in \mathbb{N}$ és $p \in (0, 1)$ paraméterekkel, ha

$$P(\xi = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Jelölése: $\xi \sim \text{Binom}(n, p)$.

$$\mathbb{E}(\xi) = np, \quad \text{Var}(\xi) = np(1 - p).$$

Binomiális-eloszlás

A ξ diszkrét valószínűségi változó **binomiális** eloszlású változó $n \in \mathbb{N}$ és $p \in (0, 1)$ paraméterekkel, ha

$$P(\xi = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Jelölése: $\xi \sim \text{Binom}(n, p)$.

$$\mathbb{E}(\xi) = np, \quad \text{Var}(\xi) = np(1 - p).$$

Visszatevéses mintavételezés kétféle elemmel: tekintsünk egy urnát, amiben van piros és kék golyó, a pirosak aránya p . Ebből az urnából húzzunk ki n golyót visszatevéssel.

Ekkor a kihúzott piros golyók száma binomiális eloszlást követ n és p paraméterrel.

Hipergeometrikus-eloszlás

A ξ diszkrét valószínűségi változó **hipergeometrikus** eloszlású változó $n \in \mathbb{N}$, $M \in \mathbb{N}$, $N \in \mathbb{N}$, $M < N$, $n \leq N$ paraméterekkel , ha

$$P(\xi = k) = \frac{\binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Jelölése: $\xi \sim \text{Hipergeom}(n, M, N - M)$.

Hipergeometrikus-eloszlás

A ξ diszkrét valószínűségi változó **hipergeometrikus** eloszlású változó $n \in \mathbb{N}$, $M \in \mathbb{N}$, $N \in \mathbb{N}$, $M < N$, $n \leq N$ paraméterekkel, ha

$$P(\xi = k) = \frac{\binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Jelölése: $\xi \sim \text{Hipergeom}(n, M, N - M)$.

Visszatevés nélküli mintavételezés: tekintsünk egy urnát, amiben van M piros és $N - M$ kék golyó. Visszatevés nélkül húzunk n golyót.

Ekkor a kihúzott piros golyók száma hipergeometrikus eloszlást követ n , N és $N - M$ paraméterekkel.

Geometriai-eloszlás

A ξ diszkrét valószínűségi változó **geometriai** eloszlású változó $p \in (0, 1)$ paraméterrel, ha

$$P(\xi = k) = (1 - p)^{k-1}p, \quad k = 1, 2, \dots$$

Jelölése: $\xi \sim \text{Geom}(p)$.

$$\mathbb{E}(\xi) = \frac{1}{p}, \quad \text{Var}(\xi) = \frac{1 - p}{p^2}.$$

Geometriai-eloszlás

A ξ diszkrét valószínűségi változó **geometriai** eloszlású változó $p \in (0, 1)$ paraméterrel, ha

$$P(\xi = k) = (1 - p)^{k-1}p, \quad k = 1, 2, \dots$$

Jelölése: $\xi \sim \text{Geom}(p)$.

$$\mathbb{E}(\xi) = \frac{1}{p}, \quad \text{Var}(\xi) = \frac{1-p}{p^2}.$$

Tekintsünk egy kísérletet, ahol addig ismételünk egy p paraméterű Bernoulli-kísérletet, amíg sikeres nem lesz.

Ekkor az elvégzett Bernoulli-kísérletek száma geometriai eloszlást követ p paraméterrel.

Poisson-eloszlás

A ξ diszkrét valószínűségi változó **Poisson** eloszlású változó $\lambda > 0$ paraméterrel, ha

$$P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Jelölése: $\xi \sim \text{Poisson}(\lambda)$.

$$\mathbb{E}(\xi) = \lambda, \quad \text{Var}(\xi) = \lambda.$$

Poisson-eloszlás

A ξ diszkrét valószínűségi változó **Poisson** eloszlású változó $\lambda > 0$ paraméterrel, ha

$$P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Jelölése: $\xi \sim \text{Poisson}(\lambda)$.

$$\mathbb{E}(\xi) = \lambda, \quad \text{Var}(\xi) = \lambda.$$

A Poisson-eloszlást nem lehet expliciten előállítani kísérlettel, mint a korábbi nevezetes eloszlásokat. A Poisson-eloszlás egy jó közelítést ad arra, hogy egy adott időegységen belül hány esemény következik be. Például egy óra alatt hány hullócsillagot látunk az égen, vagy hogy egy nap alatt hány telefonhívás fut be egy telefonközpontba.

Feladat

Egy csavargyárban naponta 100000 csavart gyártanak le, és mindegyik csavar egymástól függetlenül 1% eséllyel lesz hibás.

- 1 Várhatóan hány csavar lesz hibás egy adott napon?

Feladat

Egy csavargyárban naponta 100000 csavart gyártanak le, és mindegyik csavar egymástól függetlenül 1% eséllyel lesz hibás.

- 1 Várhatóan hány csavar lesz hibás egy adott napon?

Legyen ξ = a hibás csavarok száma.

Lehetséges értékek:

Feladat

Egy csavargyárban naponta 100000 csavart gyártanak le, és mindegyik csavar egymástól függetlenül 1% eséllyel lesz hibás.

- 1 Várhatóan hány csavar lesz hibás egy adott napon?

Legyen ξ = a hibás csavarok száma.

Lehetséges értékek: $\xi \in \{0, 1, \dots, 100000\}$.

Feladat

Egy csavargyárban naponta 100000 csavart gyártanak le, és mindegyik csavar egymástól függetlenül 1% eséllyel lesz hibás.

- ① Várhatóan hány csavar lesz hibás egy adott napon?

Legyen ξ = a hibás csavarok száma.

Lehetséges értékek: $\xi \in \{0, 1, \dots, 100000\}$.

$\xi \sim \text{Binom}(100000, 0, 01)$.

$$\mathbb{E}(\xi) = np = 100000 \cdot 0,01 = 1000.$$

Feladat

Egy csavargyárban naponta 100000 csavart gyártanak le, és mindegyik csavar egymástól függetlenül 1% eséllyel lesz hibás.

- ① Várhatóan hány csavar lesz hibás egy adott napon?

Legyen ξ = a hibás csavarok száma.

Lehetséges értékek: $\xi \in \{0, 1, \dots, 100000\}$.

$\xi \sim \text{Binom}(100000, 0,01)$.

$$\mathbb{E}(\xi) = np = 100000 \cdot 0,01 = 1000.$$

- ② Mennyi annak a valószínűsége, hogy legalább 3 csavar hibás?

Feladat

Egy csavargyárban naponta 100000 csavart gyártanak le, és mindegyik csavar egymástól függetlenül 1% eséllyel lesz hibás.

- ① Várhatóan hány csavar lesz hibás egy adott napon?

Legyen ξ = a hibás csavarok száma.

Lehetséges értékek: $\xi \in \{0, 1, \dots, 100000\}$.

$\xi \sim \text{Binom}(100000, 0,01)$.

$$\mathbb{E}(\xi) = np = 100000 \cdot 0,01 = 1000.$$

- ② Mennyi annak a valószínűsége, hogy legalább 3 csavar hibás?

$$P(\xi \geq 3) =$$

Feladat

Egy csavargyárban naponta 100000 csavart gyártanak le, és mindegyik csavar egymástól függetlenül 1% eséllyel lesz hibás.

- ① Várhatóan hány csavar lesz hibás egy adott napon?

Legyen ξ = a hibás csavarok száma.

Lehetséges értékek: $\xi \in \{0, 1, \dots, 100000\}$.

$\xi \sim \text{Binom}(100000, 0,01)$.

$$\mathbb{E}(\xi) = np = 100000 \cdot 0,01 = 1000.$$

- ② Mennyi annak a valószínűsége, hogy legalább 3 csavar hibás?

$$P(\xi \geq 3) = 1 - P(\xi < 3) = 1 - (P(\xi = 0) + P(\xi = 1) + P(\xi = 2))$$

Feladat

Egy csavargyárban naponta 100000 csavart gyártanak le, és mindegyik csavar egymástól függetlenül 1% eséllyel lesz hibás.

- ❶ Várhatóan hány csavar lesz hibás egy adott napon?

Legyen ξ = a hibás csavarok száma.

Lehetséges értékek: $\xi \in \{0, 1, \dots, 100000\}$.

$\xi \sim \text{Binom}(100000, 0, 01)$.

$$\mathbb{E}(\xi) = np = 100000 \cdot 0,01 = 1000.$$

- ❷ Mennyi annak a valószínűsége, hogy legalább 3 csavar hibás?

$$P(\xi \geq 3) = 1 - P(\xi < 3) = 1 - (P(\xi = 0) + P(\xi = 1) + P(\xi = 2))$$

$$1 - \left((1-p)^n + np(1-p)^{n-1} + \binom{n}{2} p^2 (1-p)^{n-2} \right) =$$

Feladat

Egy csavargyárban naponta 100000 csavart gyártanak le, és mindegyik csavar egymástól függetlenül 1% eséllyel lesz hibás.

- ❶ Várhatóan hány csavar lesz hibás egy adott napon?

Legyen ξ = a hibás csavarok száma.

Lehetséges értékek: $\xi \in \{0, 1, \dots, 100000\}$.

$\xi \sim \text{Binom}(100000, 0,01)$.

$$\mathbb{E}(\xi) = np = 100000 \cdot 0,01 = 1000.$$

- ❷ Mennyi annak a valószínűsége, hogy legalább 3 csavar hibás?

$$P(\xi \geq 3) = 1 - P(\xi < 3) = 1 - (P(\xi = 0) + P(\xi = 1) + P(\xi = 2))$$

$$1 - \left((1-p)^n + np(1-p)^{n-1} + \binom{n}{2} p^2 (1-p)^{n-2} \right) = 0,99 \dots \approx 1.$$

Feladat

A kupongyűjtő problémája. Az egyik sörmárka a következő akciót találja ki, a Barcelona focicsapat 5 sztárjátékosának valamelyikét elrejt minden kupak belső oldalán. Aki mind az 5 játékos nevét összegyűjti nyer egy jegyet a BL döntőre. Várhatóan hány üveg sört kell elfogyasztanunk (vagy legalábbis megvennünk), hogy megnézhessük a döntőt?

Feladat

A kupongyűjtő problémája. Az egyik sörmárka a következő akciót találja ki, a Barcelona focicsapat 5 sztárjátékosának valamelyikét elrejt minden kupak belső oldalán. Aki mind az 5 játékos nevét összegyűjti nyer egy jegyet a BL döntőre. Várhatóan hány üveg sört kell elfogyasztanunk (vagy legalábbis megvennünk), hogy megnézhessük a döntőt?

Legyen ξ = a szükséges sörök száma.

Feladat

A kupongyűjtő problémája. Az egyik sörmárka a következő akciót találja ki, a Barcelona focicsapat 5 sztárjátékosának valamelyikét elrejt minden kupak belső oldalán. Aki mind az 5 játékos nevét összegyűjti nyer egy jegyet a BL döntőre. Várhatóan hány üveg sört kell elfogyasztanunk (vagy legalábbis megvennünk), hogy megnézhessük a döntőt?

Legyen ξ = a szükséges sörök száma.

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4 + \xi_5$$

ahol ξ_i = az i -edik különböző kupak megtalálásához szükséges sörök száma.

$$\xi_1 = 1,$$

Feladat

A kupongyűjtő problémája. Az egyik sörmárka a következő akciót találja ki, a Barcelona focicsapat 5 sztárjátékosának valamelyikét elrejt minden kupak belső oldalán. Aki mind az 5 játékos nevét összegyűjti nyer egy jegyet a BL döntőre. Várhatóan hány üveg sört kell elfogyasztanunk (vagy legalábbis megvennünk), hogy megnézhessük a döntőt?

Legyen ξ = a szükséges sörök száma.

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4 + \xi_5$$

ahol ξ_i = az i -edik különböző kupak megtalálásához szükséges sörök száma.

$$\xi_1 = 1, \quad \xi_2 \sim \text{Geom}\left(\frac{4}{5}\right),$$

Feladat

A kupongyűjtő problémája. Az egyik sörmárka a következő akciót találja ki, a Barcelona focicsapat 5 sztárjátékosának valamelyikét elrejt minden kupak belső oldalán. Aki mind az 5 játékos nevét összegyűjti nyer egy jegyet a BL döntőre. Várhatóan hány üveg sört kell elfogyasztanunk (vagy legalábbis megvennünk), hogy megnézhessük a döntőt?

Legyen ξ = a szükséges sörök száma.

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4 + \xi_5$$

ahol ξ_i = az i -edik különböző kupak megtalálásához szükséges sörök száma.

$$\begin{aligned}\xi_1 &= 1, & \xi_2 &\sim \text{Geom}\left(\frac{4}{5}\right), & \xi_3 &\sim \text{Geom}\left(\frac{3}{5}\right), \\ \xi_4 &\sim \text{Geom}\left(\frac{2}{5}\right), & \xi_5 &\sim \text{Geom}\left(\frac{1}{5}\right).\end{aligned}$$

Feladat

A kupongyűjtő problémája. Az egyik sörmárka a következő akciót találja ki, a Barcelona focicsapat 5 sztárjátékosának valamelyikét elrejt minden kupak belső oldalán. Aki mind az 5 játékos nevét összegyűjti nyer egy jegyet a BL döntőre. Várhatóan hány üveg sört kell elfogyasztanunk (vagy legalábbis megvennünk), hogy megnézhessük a döntőt?

Legyen ξ = a szükséges sörök száma.

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4 + \xi_5$$

ahol ξ_i = az i -edik különböző kupak megtalálásához szükséges sörök száma.

$$\begin{aligned}\xi_1 &= 1, & \xi_2 &\sim \text{Geom}\left(\frac{4}{5}\right), & \xi_3 &\sim \text{Geom}\left(\frac{3}{5}\right), \\ \xi_4 &\sim \text{Geom}\left(\frac{2}{5}\right), & \xi_5 &\sim \text{Geom}\left(\frac{1}{5}\right).\end{aligned}$$

$$\mathbb{E}(\xi) = \mathbb{E}(\xi_1 + \dots + \xi_5) = \mathbb{E}(\xi_1) + \dots + \mathbb{E}(\xi_5) = 1 + \frac{5}{4} + \frac{5}{3} + \frac{5}{2} + 5 = 11,42.$$

Feltétles várható érték

Legyen A egy pozitív valószínűségű esemény.

Feltétles eloszlás

Legyen X egy diszkrét valószínűségi változó. X **feltételes eloszlása az A eseményre vonatkozóan**

$$P(X = k | A).$$

Feltételes várható érték

$$\mathbb{E}(X | A) :=$$

Feltétles várható érték

Legyen A egy pozitív valószínűségű esemény.

Feltétles eloszlás

Legyen X egy diszkrét valószínűségi változó. X **feltételes eloszlása az A eseményre vonatkozóan**

$$P(X = k | A).$$

Feltételes várható érték

$$\mathbb{E}(X | A) := \sum_k k P(X = k | A).$$

Teljes várható érték tétel

Legyen $A_1, A_2, \dots$ teljes eseményrendszer. Ekkor

$$\mathbb{E}(X) =$$

Teljes várható érték tétel

Legyen $A_1, A_2, \dots$ teljes eseményrendszer. Ekkor

$$\mathbb{E}(X) = \sum_k \mathbb{E}(X | A_k) P(A_k).$$

Feladat

Dobjunk fel egy kockát és utána annyi érmét, amilyen szám a kockán adódott! Annyi forintot nyerünk, ahány fejet dobunk az érmékkel. Várhatóan mennyi lesz a nyereményünk?

Eloszlásfüggvény

Legyen ξ egy valószínűségi változó. Ekkor az $F_\xi : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$,

$$F_\xi(x) := P(\xi \leq x)$$

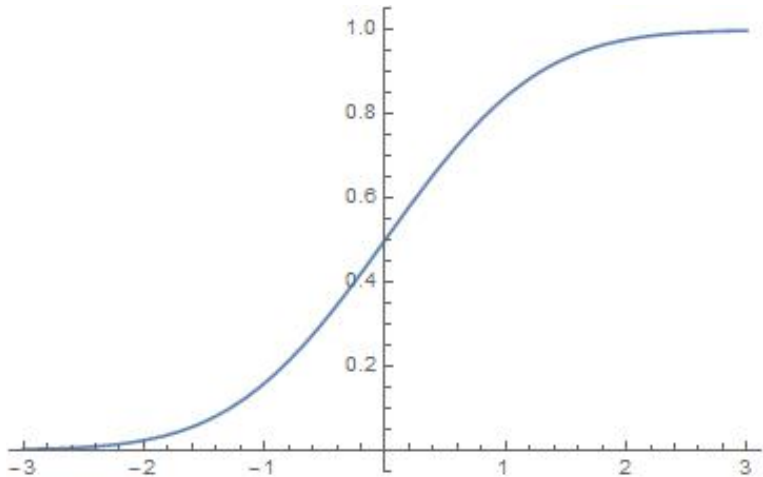
függvényt a ξ **eloszlásfüggvényének** nevezzük.

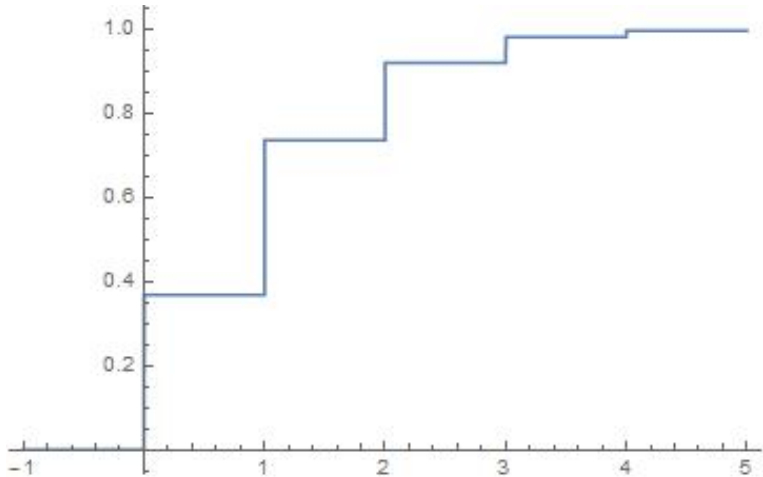
Az eloszlásfüggvény jellemzése

Egy $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ függvény akkor és csak akkor lehet eloszlásfüggvénye valamely $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ valószínűségi változónak, ha

- F monoton növekvő,
- F jobbról folytonos,
-

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1.$$





Mire lehet használni az eloszlásfüggvényt?

- Az eloszlásfüggvény karakterizálja az eloszlást, azaz ha két változónak megegyezik az eloszlásfüggvénye, akkor a két változó eloszlása ugyanaz.

Mire lehet használni az eloszlásfüggvényt?

- Az eloszlásfüggvény karakterizálja az eloszlást, azaz ha két változónak megegyezik az eloszlásfüggvénye, akkor a két változó eloszlása ugyanaz.
- Tetszőleges $c \in \mathbb{R}$ esetén

$$P(\xi \leq c) = F_\xi(c) = \lim_{x \downarrow c} F_\xi(x), \quad P(\xi < c) = \lim_{x \uparrow c} F_\xi(x)$$

azaz a $P(\xi = c)$ az F_ξ ugrása a c helyen, így

$$P(\xi = c) = F_\xi(c) - \lim_{x \uparrow c} F_\xi(x)$$

Tetszőleges $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ esetén

$$P(a < \xi \leq b) = F_\xi(b) - F_\xi(a).$$

Feladat

Legyen ξ egy véletlenszerűen választott szám a $[0, 6]$ intervallumon. Adjuk meg a ξ eloszlásfüggvényét!

Feladat

Legyen ξ egy véletlenszerűen választott szám a $[0, 6]$ intervallumon. Adjuk meg a ξ eloszlásfüggvényét!

A feladat szerint tehát ξ lehetséges értékei: $\xi \in [0, 6]$.

Feladat

Legyen ξ egy véletlenszerűen választott szám a $[0, 6]$ intervallumon. Adjuk meg a ξ eloszlásfüggvényét!

A feladat szerint tehát ξ lehetséges értékei: $\xi \in [0, 6]$.

Így $F(x) = P(\xi \leq x) = 0$, ha $x < 0$, és $F(x) = 1$, ha $x > 6$.

Feladat

Legyen ξ egy véletlenszerűen választott szám a $[0, 6]$ intervallumon. Adjuk meg a ξ eloszlásfüggvényét!

A feladat szerint tehát ξ lehetséges értékei: $\xi \in [0, 6]$.

Így $F(x) = P(\xi \leq x) = 0$, ha $x < 0$, és $F(x) = 1$, ha $x > 6$.

Tehát a továbbiakban legyen $x \in [0, 6]$ rögzített.



Feladat

Legyen ξ egy véletlenszerűen választott szám a $[0, 6]$ intervallumon. Adjuk meg a ξ eloszlásfüggvényét!

A feladat szerint tehát ξ lehetséges értékei: $\xi \in [0, 6]$.

Így $F(x) = P(\xi \leq x) = 0$, ha $x < 0$, és $F(x) = 1$, ha $x > 6$.

Tehát a továbbiakban legyen $x \in [0, 6]$ rögzített.



Feladat

Legyen ξ egy véletlenszerűen választott szám a $[0, 6]$ intervallumon. Adjuk meg a ξ eloszlásfüggvényét!

A feladat szerint tehát ξ lehetséges értékei: $\xi \in [0, 6]$.

Így $F(x) = P(\xi \leq x) = 0$, ha $x < 0$, és $F(x) = 1$, ha $x > 6$.

Tehát a továbbiakban legyen $x \in [0, 6]$ rögzített.



Feladat

Legyen ξ egy véletlenszerűen választott szám a $[0, 6]$ intervallumon. Adjuk meg a ξ eloszlásfüggvényét!

A feladat szerint tehát ξ lehetséges értékei: $\xi \in [0, 6]$.

Így $F(x) = P(\xi \leq x) = 0$, ha $x < 0$, és $F(x) = 1$, ha $x > 6$.

Tehát a továbbiakban legyen $x \in [0, 6]$ rögzített.



$$F(x) = P(\xi \leq x) = \frac{x}{6}.$$

Feladat

Legyen ξ egy véletlenszerűen választott szám a $[0, 6]$ intervallumon. Adjuk meg a ξ eloszlásfüggvényét!

A feladat szerint tehát ξ lehetséges értékei: $\xi \in [0, 6]$.

Így $F(x) = P(\xi \leq x) = 0$, ha $x < 0$, és $F(x) = 1$, ha $x > 6$.

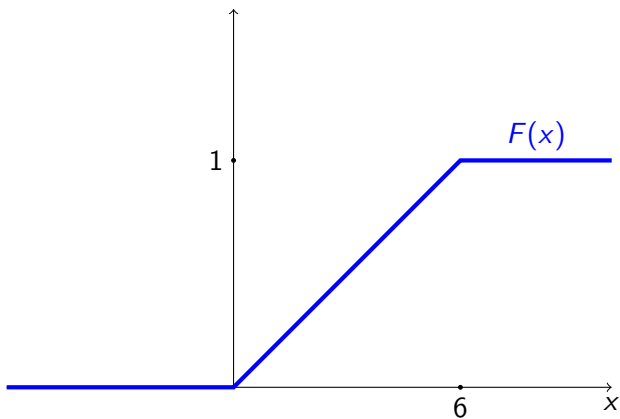
Tehát a továbbiakban legyen $x \in [0, 6]$ rögzített.



$$F(x) = P(\xi \leq x) = \frac{x}{6}.$$

Tehát

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 0, \\ \frac{x}{6}, & \text{ha } 0 \leq x \leq 6, \\ 1, & \text{ha } x > 6. \end{cases}$$



Folytonos valószínűségi változók

Ha ξ egy valószínűségi változó, és létezik olyan $f_\xi : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ függvény, melyre

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^x f_\xi(t) dt, \quad x \in \mathbb{R}$$

akkor az f_ξ függvényt a ξ **sűrűségfüggvényének** nevezzük, és azt mondjuk, hogy a ξ változó **(abszolút) folytonos valószínűségi változó**.

Folytonos valószínűségi változók

Ha ξ egy valószínűségi változó, és létezik olyan $f_\xi : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ függvény, melyre

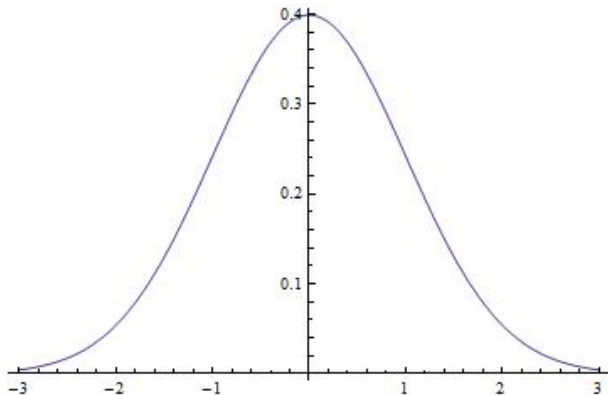
$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^x f_\xi(t) dt, \quad x \in \mathbb{R}$$

akkor az f_ξ függvényt a ξ **sűrűségfüggvényének** nevezzük, és azt mondjuk, hogy a ξ változó **(abszolút) folytonos valószínűségi változó**.

A sűrűségfüggvény jellemzése

Egy $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ függvény akkor és csak akkor lehet sűrűségfüggvénye egy valószínűségi változónak, ha

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = 1.$$



Mire lehet használni a sűrűségfüggvényt?

- A sűrűségfüggvény karakterizálja az eloszlást, azaz ha két változónak megegyezik a sűrűségfüggvénye, akkor a két változó eloszlása ugyanaz*.

Mire lehet használni a sűrűségfüggvényt?

- A sűrűségfüggvény karakterizálja az eloszlást, azaz ha két változónak megegyezik a sűrűségfüggvénye, akkor a két változó eloszlása ugyanaz*.
- Tetszőleges $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ esetén

$$P(a < \xi \leq b) = F_{\xi}(b) - F_{\xi}(a) = \int_a^b f(t)dt.$$

Ebből következik, hogy tetszőleges $c \in \mathbb{R}$ esetén

$$P(\xi = c) = 0.$$

Mire lehet használni a sűrűségfüggvényt?

- A sűrűségfüggvény karakterizálja az eloszlást, azaz ha két változónak megegyezik a sűrűségfüggvénye, akkor a két változó eloszlása ugyanaz*.
- Tetszőleges $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ esetén

$$P(a < \xi \leq b) = F_{\xi}(b) - F_{\xi}(a) = \int_a^b f(t)dt.$$

Ebből következik, hogy tetszőleges $c \in \mathbb{R}$ esetén

$$P(\xi = c) = 0.$$

- Ha az f_{ξ} sűrűségfüggvény folytonos az $x \in \mathbb{R}$ pontban, akkor

$$F'_{\xi}(x) = f_{\xi}(x).$$

Folytonos valószínűségi változó várható értéke

Legyen ξ egy folytonos valószínűségi változó, melynek sűrűségfüggvénye f_ξ . Ekkor az

$$\mathbb{E}(\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} x f_\xi(x) dx$$

mennyiséget a ξ **várható értékének** nevezzük, amennyiben ez az improprius integrál abszolút konvergens, azaz $\int_{-\infty}^{\infty} |x| f_\xi(x) dx < \infty$.

Folytonos valószínűségi változó várható értéke

Legyen ξ egy folytonos valószínűségi változó, melynek sűrűségfüggvénye f_ξ . Ekkor az

$$\mathbb{E}(\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} x f_\xi(x) dx$$

mennyiséget a ξ **várható értékének** nevezzük, amennyiben ez az improprius integrál abszolút konvergens, azaz $\int_{-\infty}^{\infty} |x| f_\xi(x) dx < \infty$.

Folytonos valószínűségi változó transzformáltjának várható értéke

Legyen $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Ha ξ egy folytonos valószínűségi változó, melynek sűrűségfüggvénye f_ξ , akkor

$$\mathbb{E}(g(\xi)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_\xi(x) dx,$$

amennyiben ez az improprius integrál abszolút konvergens.

A várható érték diszkrét valószínűségi változóknál felírt tulajdonságai a folytonos esetben is igazak.

A várható érték diszkrét valószínűségi változóknál felírt tulajdonságai a folytonos esetben is igazak.

Folytonos valószínűségi változó varianciáját ugyanúgy lehet definiálni, és számolni, mint a diszkrét esetben, azaz

$$\text{Var}(\xi) := D^2(\xi) := \mathbb{E}((\xi - \mathbb{E}(\xi))^2),$$

$$\text{Var}(\xi) = \mathbb{E}(\xi^2) - (\mathbb{E}(\xi))^2.$$

Feladat

Sűrűségfüggvények-e a következő függvények? Ha nem, akkor milyen változtatással lennének azok?

- $f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$

Feladat

Sűrűségfüggvények-e a következő függvények? Ha nem, akkor milyen változtatással lennének azok?

- $f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$

Ahhoz, hogy valamilyen változó sűrűségfüggvénye lehessen, két feltételnek kell teljesülnie:

- 1 $f(x) \geq 0$, tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén,
- 2 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.

Feladat

Sűrűségfüggvények-e a következő függvények? Ha nem, akkor milyen változtatással lennének azok?

- $f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$

Ahhoz, hogy valamilyen változó sűrűségfüggvénye lehessen, két feltételnek kell teljesülnie:

- 1 $f(x) \geq 0$, tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén,
- 2 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.

Az első feltétel teljesül, hiszen $e^{-x} > 0$ minden x esetén.

Feladat

Sűrűségfüggvények-e a következő függvények? Ha nem, akkor milyen változtatással lennének azok?

$$\bullet f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$$

Ahhoz, hogy valamilyen változó sűrűségfüggvénye lehessen, két feltételnek kell teljesülnie:

- 1 $f(x) \geq 0$, tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén,
- 2 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$.

Az első feltétel teljesül, hiszen $e^{-x} > 0$ minden x esetén.

$$\int_0^{\infty} 2e^{-2x} dx =$$

Feladat

Sűrűségfüggvények-e a következő függvények? Ha nem, akkor milyen változtatással lennének azok?

$$\bullet f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$$

Ahhoz, hogy valamilyen változó sűrűségfüggvénye lehessen, két feltételnek kell teljesülnie:

- 1 $f(x) \geq 0$, tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén,
- 2 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$.

Az első feltétel teljesül, hiszen $e^{-x} > 0$ minden x esetén.

$$\int_0^{\infty} 2e^{-2x} dx = [-e^{-2x}]_{x=0}^{\infty} =$$

Feladat

Sűrűségfüggvények-e a következő függvények? Ha nem, akkor milyen változtatással lennének azok?

$$\bullet f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$$

Ahhoz, hogy valamilyen változó sűrűségfüggvénye lehessen, két feltételnek kell teljesülnie:

- 1 $f(x) \geq 0$, tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén,
- 2 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$.

Az első feltétel teljesül, hiszen $e^{-x} > 0$ minden x esetén.

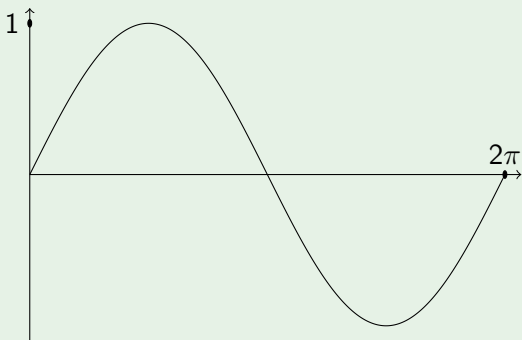
$$\int_0^{\infty} 2e^{-2x} dx = [-e^{-2x}]_{x=0}^{\infty} = \left(\lim_{x \rightarrow \infty} -e^{-2x} - (-1) \right) = 1.$$

Feladat

- $f(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 < x < 2\pi, \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$

Feladat

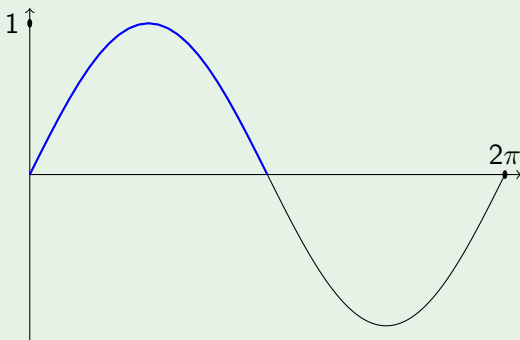
- $f(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 < x < 2\pi, \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$



Ez nem sűrűségfüggvény, hiszen $\sin x < 0$, ha $\pi < x < 2\pi$.

Feladat

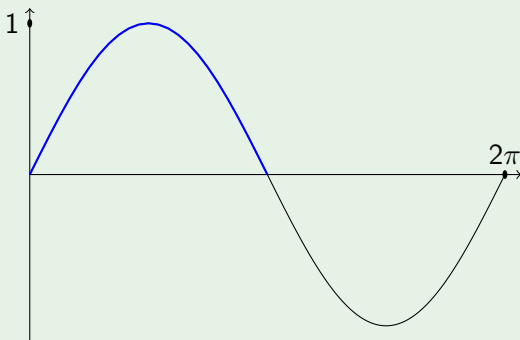
- $f(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 < x < 2\pi, \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$



Ez nem sűrűségfüggvény, hiszen $\sin x < 0$, ha $\pi < x < 2\pi$.

Feladat

- $f(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 < x < 2\pi, \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$

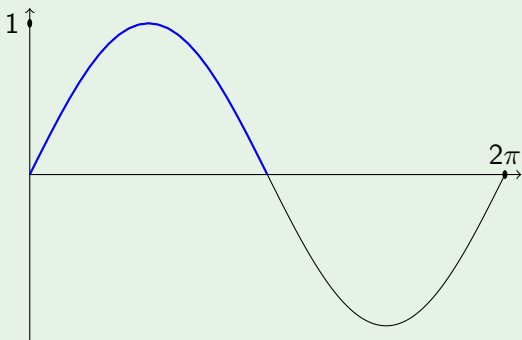


Ez nem sűrűségfüggvény, hiszen $\sin x < 0$, ha $\pi < x < 2\pi$.

$$\int_0^{\pi} \sin x dx =$$

Feladat

- $f(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 < x < 2\pi, \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$

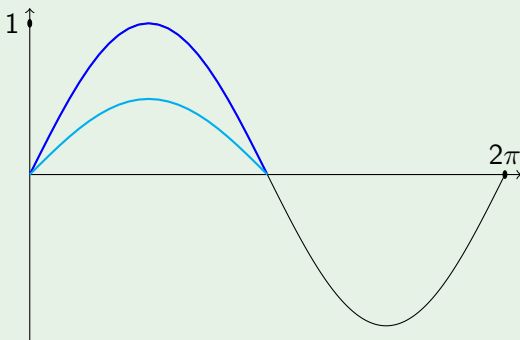


Ez nem sűrűségfüggvény, hiszen $\sin x < 0$, ha $\pi < x < 2\pi$.

$$\int_0^\pi \sin x dx = [-\cos(x)]_{x=0}^\pi = (-\cos \pi - (-\cos 0)) = 1 + 1 = 2$$

Feladat

- $f(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 < x < 2\pi, \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$



Ez nem sűrűségfüggvény, hiszen $\sin x < 0$, ha $\pi < x < 2\pi$.

$$\int_0^\pi \sin x dx = [-\cos(x)]_{x=0}^\pi = (-\cos \pi - (-\cos 0)) = 1 + 1 = 2$$

Feladat

Tehát az

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{2}, & 0 < x < \pi, \\ 0, & \text{különben,} \end{cases}$$

már sűrűségfüggvény.

Egyenletes eloszlás egy (a, b) intervallumon

Ha egy (a, b) intervallumon választunk véletlenszerűen egy ξ pontot úgy, hogy egy $I \subset (a, b)$ részintervallumba esés valószínűsége az illető részintervallum hosszával arányos, akkor ξ eloszlásfüggvénye

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{ha } a \leq x \leq b, \\ 1, & \text{ha } x > b. \end{cases}$$

Ekkor a ξ valószínűségi változót **egyenletes eloszlásúnak** nevezzük az (a, b) intervallumon. Jelölés: $\xi \sim \text{Egyenletes}(a, b)$.
Továbbá sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{ha } a < x < b, \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

$$\mathbb{E}(\xi) = \frac{a+b}{2}, \quad \text{Var}(\xi) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Exponenciális eloszlás

Legyen $\lambda > 0$. Ha a ξ eloszlásfüggvénye

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & \text{ha } x \geq 0, \\ 0, & \text{különben,} \end{cases}$$

akkor a ξ valószínűségi változót **exponenciális eloszlásúnak** nevezzük λ paraméterrel. Jelölés: $\xi \sim \text{Exp}(\lambda)$. Továbbá sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{ha } x \geq 0, \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

$$\mathbb{E}(\xi) = \frac{1}{\lambda}, \quad \text{Var}(\xi) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Feladat

Egy műszaki berendezés élettartama exponenciális eloszlást követ 1 év várható értékkel.

- Mekkora valószínűséggel bír ki egy új berendezés 1 évet?

Feladat

Egy műszaki berendezés élettartama exponenciális eloszlást követ 1 év várható értékkel.

- Mekkora valószínűséggel bír ki egy új berendezés 1 évet?

Jelölje ξ egy ilyen műszaki berendezés élettartamát. Tehát $\xi \sim \text{Exp}(1)$, mivel $\mathbb{E}(\xi) = \frac{1}{\lambda} = 1$.

Feladat

Egy műszaki berendezés élettartama exponenciális eloszlást követ 1 év várható értékkel.

- Mekkora valószínűséggel bír ki egy új berendezés 1 évet?

Jelölje ξ egy ilyen műszaki berendezés élettartamát. Tehát $\xi \sim \text{Exp}(1)$, mivel $\mathbb{E}(\xi) = \frac{1}{\lambda} = 1$.

$$P(\xi \geq 1) =$$

Feladat

Egy műszaki berendezés élettartama exponenciális eloszlást követ 1 év várható értékkel.

- Mekkora valószínűséggel bír ki egy új berendezés 1 évet?

Jelölje ξ egy ilyen műszaki berendezés élettartamát. Tehát $\xi \sim \text{Exp}(1)$, mivel $\mathbb{E}(\xi) = \frac{1}{\lambda} = 1$.

$$P(\xi \geq 1) = 1 - P(\xi \leq 1) =$$

Feladat

Egy műszaki berendezés élettartama exponenciális eloszlást követ 1 év várható értékkel.

- Mekkora valószínűséggel bír ki egy új berendezés 1 évet?

Jelölje ξ egy ilyen műszaki berendezés élettartamát. Tehát $\xi \sim \text{Exp}(1)$, mivel $\mathbb{E}(\xi) = \frac{1}{\lambda} = 1$.

$$P(\xi \geq 1) = 1 - P(\xi \leq 1) = 1 - F(1) = 1 - (1 - e^{-1 \cdot 1}) = \frac{1}{e} \approx 0,37.$$

Feladat

- Mekkora valószínűséggel bír ki egy berendezés további egy évet, ha már 100 éve üzemel?

Feladat

- Mekkora valószínűséggel bír ki egy berendezés további egy évet, ha már 100 éve üzemel?

$$P(\xi \geq 101 \mid \xi \geq 100) =$$

Feladat

- Mekkora valószínűséggel bír ki egy berendezés további egy évet, ha már 100 éve üzemel?

$$P(\xi \geq 101 | \xi \geq 100) = \frac{P(\xi \geq 101, \xi \geq 100)}{P(\xi \geq 100)} =$$

Feladat

- Mekkora valószínűséggel bír ki egy berendezés további egy évet, ha már 100 éve üzemel?

$$P(\xi \geq 101 | \xi \geq 100) = \frac{P(\xi \geq 101, \xi \geq 100)}{P(\xi \geq 100)} = \frac{P(\xi \geq 101)}{P(\xi \geq 100)}$$

Feladat

- Mekkora valószínűséggel bír ki egy berendezés további egy évet, ha már 100 éve üzemel?

$$P(\xi \geq 101 | \xi \geq 100) = \frac{P(\xi \geq 101, \xi \geq 100)}{P(\xi \geq 100)} = \frac{P(\xi \geq 101)}{P(\xi \geq 100)}$$

$$= \frac{1 - P(\xi \leq 101)}{1 - P(\xi \leq 100)} =$$

Feladat

- Mekkora valószínűséggel bír ki egy berendezés további egy évet, ha már 100 éve üzemel?

$$P(\xi \geq 101 | \xi \geq 100) = \frac{P(\xi \geq 101, \xi \geq 100)}{P(\xi \geq 100)} = \frac{P(\xi \geq 101)}{P(\xi \geq 100)}$$

$$= \frac{1 - P(\xi \leq 101)}{1 - P(\xi \leq 100)} = \frac{1 - F(101)}{1 - F(100)} =$$

Feladat

- Mekkora valószínűséggel bír ki egy berendezés további egy évet, ha már 100 éve üzemel?

$$P(\xi \geq 101 | \xi \geq 100) = \frac{P(\xi \geq 101, \xi \geq 100)}{P(\xi \geq 100)} = \frac{P(\xi \geq 101)}{P(\xi \geq 100)}$$

$$= \frac{1 - P(\xi \leq 101)}{1 - P(\xi \leq 100)} = \frac{1 - F(101)}{1 - F(100)} = \frac{1 - (1 - e^{-1 \cdot 101})}{1 - (1 - e^{-1 \cdot 100})}$$

Feladat

- Mekkora valószínűséggel bír ki egy berendezés további egy évet, ha már 100 éve üzemel?

$$P(\xi \geq 101 | \xi \geq 100) = \frac{P(\xi \geq 101, \xi \geq 100)}{P(\xi \geq 100)} = \frac{P(\xi \geq 101)}{P(\xi \geq 100)}$$

$$= \frac{1 - P(\xi \leq 101)}{1 - P(\xi \leq 100)} = \frac{1 - F(101)}{1 - F(100)} = \frac{1 - (1 - e^{-1 \cdot 101})}{1 - (1 - e^{-1 \cdot 100})}$$

$$= \frac{e^{-101}}{e^{-100}} = \frac{1}{e}.$$

Örökifjú tulajdonság

Azt mondjuk, hogy a ξ nemnegatív értékű valószínűségi változó rendelkezik az **örökifjú tulajdonsággal**, ha tetszőleges $t, s \geq 0$ esetén

$$P(\xi \geq t + s \mid \xi \geq t) = P(\xi \geq s).$$

Örökifjú tulajdonság

Azt mondjuk, hogy a ξ nemnegatív értékű valószínűségi változó rendelkezik az **örökifjú tulajdonsággal**, ha tetszőleges $t, s \geq 0$ esetén

$$P(\xi \geq t + s \mid \xi \geq t) = P(\xi \geq s).$$

Exponenciális eloszlás

Egy ξ folytonos valószínűségi változó akkor és csak akkor exponenciális eloszlású, ha rendelkezik az örökifjú tulajdonsággal.

Normális eloszlás

Ha a ξ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

alakú, ahol $m \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$, akkor azt mondjuk, hogy ξ **normális eloszlású** valószínűségi változó m és σ^2 paraméterekkel. Jelölés: $\xi \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

$$\mathbb{E}(\xi) = m, \quad \text{Var}(\xi) = \sigma^2.$$

Normális eloszlás

Ha a ξ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

alakú, ahol $m \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$, akkor azt mondjuk, hogy ξ **normális eloszlású** valószínűségi változó m és σ^2 paraméterekkel. Jelölés: $\xi \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

$$\mathbb{E}(\xi) = m, \quad \text{Var}(\xi) = \sigma^2.$$

Standard normális eloszlás

Ha $m = 0$ és $\sigma^2 = 1$, akkor azt mondjuk, hogy a $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ egy **standard normális eloszlású** változó.

A normális eloszlás eloszlásfüggvényét nem lehet analitikus függvényekkel felírni, így expliciten nem lehet kiszámolni az értékét egy tetszőleges helyen.

Standardizált

Legyen $\xi \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$. Ekkor

$$Z := \frac{\xi - m}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

A normális eloszlás eloszlásfüggvényét nem lehet analitikus függvényekkel felírni, így explicite nem lehet kiszámolni az értékét egy tetszőleges helyen.

Standardizált

Legyen $\xi \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$. Ekkor

$$Z := \frac{\xi - m}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

A standard normális eloszlásfüggvény

$$\Phi(x) := \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

értékei táblázatokban megtalálhatóak. A táblázatokban csak pozitív x -ekre szerepelnek az értékek, mivel f_Z páros függvény így

$$\Phi(-x) = 1 - (\Phi(x)).$$

Feladat

Egy tejgyárban az 1 literes dobozos tej csomagolását automata töltőberendezés végzi. Az egy-egy dobozba töltött mennyiség nem determinisztikus, hanem normális eloszlású véletlen változó, melynek várható értéke a névleges tartalom és szórása 10 ml. Véletlenszerűen választunk egy dobozt. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a doboz tartalma a névleges tartalomtól legfeljebb 20 ml-rel tér el?

Feladat

Egy tejgyárban az 1 literes dobozos tej csomagolását automata töltőberendezés végzi. Az egy-egy dobozba töltött mennyiség nem determinisztikus, hanem normális eloszlású véletlen változó, melynek várható értéke a névleges tartalom és szórása 10 ml. Véletlenszerűen választunk egy dobozt. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a doboz tartalma a névleges tartalomtól legfeljebb 20 ml-rel tér el?

Jelölje ξ egy adott tejesdobozba kerülő tej mennyiségét ml-ben. Ekkor tehát $\xi \sim \mathcal{N}(1000, 100)$.

$$P(|\xi - 1000| \leq 20) = P(980 \leq \xi \leq 1020) = ?$$

Feladat

$$\xi \sim \mathcal{N}(1000, 100).$$

$$P(980 \leq \xi \leq 1020) =$$

Feladat

$$\xi \sim \mathcal{N}(1000, 100).$$

$$P(980 \leq \xi \leq 1020) = P\left(\frac{980 - 1000}{10} \leq \frac{\xi - 1000}{10} \leq \frac{1020 - 1000}{10}\right)$$

$$Z := \frac{\xi - 1000}{10} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

Feladat

$$\xi \sim \mathcal{N}(1000, 100).$$

$$P(980 \leq \xi \leq 1020) = P\left(\frac{980 - 1000}{10} \leq \frac{\xi - 1000}{10} \leq \frac{1020 - 1000}{10}\right)$$

$$Z := \frac{\xi - 1000}{10} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

$$= P(-2 \leq Z \leq 2) = \Phi(2) - \Phi(-2) = \Phi(2) - (1 - \Phi(2))$$

$$= 2 \cdot \Phi(2) - 1 \approx 2 \cdot 0,9772 - 1 = 0,9544.$$

de-Moivre-Laplace tétel

Legyen $\xi \sim \text{Binom}(n, p)$. Ekkor tetszőleges $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, $a < b$ esetén

$$P\left(a < \frac{\xi - np}{\sqrt{np(1-p)}} < b\right) \rightarrow \Phi(b) - \Phi(a), \quad n \rightarrow \infty,$$

ahol Φ a standard normális eloszlásfüggvény.

Feladat

Egy választókörzetben 40000 szavazó él. Választáskor mindenki elmegy szavazni és $\frac{1}{2}$ valószínűséggel választ a két jelölt közül. Mennyi a valószínűsége, hogy a két jelöltre leadott szavazatok száma között legfeljebb 20 lesz az eltérés?

Feladat

Egy választókörzetben 40000 szavazó él. Választáskor mindenki elmegy szavazni és $\frac{1}{2}$ valószínűséggel választ a két jelölt közül. Mennyi a valószínűsége, hogy a két jelöltre leadott szavazatok száma között legfeljebb 20 lesz az eltérés?

Legyen ξ az első jelöltre leadott szavazatok száma. Ekkor a kérdéses valószínűség:

$$P(19990 < \xi < 20010) = ?$$

Feladat

Egy választóközrztben 40000 szavazó él. Választáskor mindenki elmegy szavazni és $\frac{1}{2}$ valószínűséggel választ a két jelölt közül. Mennyi a valószínűsége, hogy a két jelöltre leadott szavazatok száma között legfeljebb 20 lesz az eltérés?

Legyen ξ az első jelöltre leadott szavazatok száma. Ekkor a kérdéses valószínűség:

$$P(19990 < \xi < 20010) = ?$$

Tudjuk, hogy $\xi \sim \text{Binom}(40000, \frac{1}{2})$, így a kérdéses valószínűség explicite kiszámolható.

Feladat

Egy választókörzetben 40000 szavazó él. Választáskor mindenki elmegy szavazni és $\frac{1}{2}$ valószínűséggel választ a két jelölt közül. Mennyi a valószínűsége, hogy a két jelöltre leadott szavazatok száma között legfeljebb 20 lesz az eltérés?

Legyen ξ az első jelöltre leadott szavazatok száma. Ekkor a kérdéses valószínűség:

$$P(19990 < \xi < 20010) = ?$$

Tudjuk, hogy $\xi \sim \text{Binom}(40000, \frac{1}{2})$, így a kérdéses valószínűség explicite kiszámolható.

Viszont a de-Moivre-Laplace tétel segítségével, mivel $n = 40000$ elég nagynak tekinthető, egy egyszerűbb számolással is jó közelítést tudunk adni a keresett valószínűségre.

Feladat

$$np = 40000 \cdot \frac{1}{2} = 20000, \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{40000 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = 100.$$

$$P(19990 < \xi < 20010)$$

$$= P\left(\frac{19990 - 20000}{100} < \frac{\xi - np}{\sqrt{np(1-p)}} < \frac{20010 - 20000}{100}\right)$$

$$\approx \Phi(0,1) - \Phi(-0,1) = 2 \cdot \Phi(0,1) - 1 = 2 \cdot 0,5398 - 1 = 0,0796.$$

Centrális határeloszlástétel

Legyenek $\xi_1, \xi_2, \dots$ teljesen független, azonos eloszlású véletlen változók, melyeknek véges a második momentumuk. Legyen

$$S_n := \xi_1 + \dots + \xi_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ekkor tetszőleges $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, $a < b$ esetén

$$P\left(a < \frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\sqrt{\text{Var}(S_n)}} < b\right) \rightarrow \Phi(b) - \Phi(a), \quad n \rightarrow \infty.$$

$$\mathbb{E}(S_n) = n \mathbb{E}(\xi_1),$$

$$\text{Var}(S_n) = n \text{Var}(\xi_1), \quad \sqrt{\text{Var}(S_n)} = \sqrt{n} \sqrt{\text{Var}(\xi_1)}.$$

Feladat

Egy ATM-ből egy adott napon 60 ember vesz ki pénzt. A felvett összegek függetlenek és azonos eloszlású véletlen változók $E(\xi) = 8000$ közös várható értékkel és $D(\xi) = 5000$ közös szórással. Mekkora valószínűséggel lesz elég 500000 Ft az adott napon?

Feladat

Egy ATM-ből egy adott napon 60 ember vesz ki pénzt. A felvett összegek függetlenek és azonos eloszlású véletlen változók $E(\xi) = 8000$ közös várható értékkel és $D(\xi) = 5000$ közös szórással. Mekkora valószínűséggel lesz elég 500000 Ft az adott napon?

ξ_i = mennyi pénzt vett fel az i -edik ember, $i = 1, 2, \dots, 60$.

Feladat

Egy ATM-ből egy adott napon 60 ember vesz ki pénzt. A felvett összegek függetlenek és azonos eloszlású véletlen változók $E(\xi) = 8000$ közös várható értékkel és $D(\xi) = 5000$ közös szórással. Mekkora valószínűséggel lesz elég 500000 Ft az adott napon?

ξ_i = mennyi pénzt vett fel az i -edik ember, $i = 1, 2, \dots, 60$.

$$P(S_{60} \leq 500000) = ?$$

Feladat

Egy ATM-ből egy adott napon 60 ember vesz ki pénzt. A felvett összegek függetlenek és azonos eloszlású véletlen változók $E(\xi) = 8000$ közös várható értékkel és $D(\xi) = 5000$ közös szórással. Mekkora valószínűséggel lesz elég 500000 Ft az adott napon?

ξ_i = mennyi pénzt vett fel az i -edik ember, $i = 1, 2, \dots, 60$.

$$P(S_{60} \leq 500000) = ?$$

$$= P\left(\frac{S_{60} - 60 \cdot 8000}{\sqrt{60 \cdot 5000}} \leq \frac{500000 - 60 \cdot 8000}{\sqrt{60 \cdot 5000}}\right) \approx \Phi\left(\frac{20000}{38729,83}\right)$$

$$= \Phi(0,5164) = 0,695.$$

Kovariancia, korreláció

Legyen ξ és η két olyan valószínűségi változó, melyeknek véges a szórása. Ekkor a két változó **kovarianciája**:

$$\text{Cov}(\xi, \eta) = \mathbb{E} \left((\xi - \mathbb{E}(\xi))(\eta - \mathbb{E}(\eta)) \right).$$

A két változó **korrelációja**, illetve **korrelációs együtthatója**:

$$\text{corr}(\xi, \eta) = \frac{\text{Cov}(\xi, \eta)}{D(\xi)D(\eta)}.$$

Ha $\text{corr}(\xi, \eta) = 0$, akkor azt mondjuk, hogy a két változó **korrelálatlan**.

A kovariancia és korreláció tulajdonságai

Legyen ξ és η két olyan valószínűségi változó, melyeknek véges a szórása.

- 1 A kovariancia és a korreláció szimmetrikus a két változójában.
- 2 Egy változónak az önmagával vett kovarianciája:
 $\text{Cov}(\xi, \xi) = \text{Var}(\xi)$.
- 3 A kovariancia az alábbi formulával számolható ki egyszerűbben:

$$\text{Cov}(\xi, \eta) = \mathbb{E}(\xi\eta) - \mathbb{E}(\xi)\mathbb{E}(\eta).$$

- 4 A korrelációs együttható értéke mindig a $[-1, 1]$ intervallumba esik.
- 5 Két tetszőleges változó összegének varianciája:

$$\text{Var}(\xi + \eta) = \text{Var}(\xi) + \text{Var}(\eta) + 2 \text{Cov}(\xi, \eta).$$

Korrelátlanság és függetlenség

Ha a ξ és η változók függetlenek, akkor korrelátlanakok is.
Az állítás megfordítása nem igaz, tehát a korrelátlanságból általában nem következik a függetlenség.

Korrelálatlanság és függetlenség

Ha a ξ és η változók függetlenek, akkor korrelálatlanok is.
Az állítás megfordítása nem igaz, tehát a korrelálatlanságból általában nem következik a függetlenség.

$$\text{Cov}(\xi, \eta) = \mathbb{E}(\xi\eta) - \mathbb{E}(\xi) \mathbb{E}(\eta) = \mathbb{E}(\xi) \mathbb{E}(\eta) - \mathbb{E}(\xi) \mathbb{E}(\eta) = 0.$$

Példa véletlen változókra, amelyek nem függetlenek, viszont korrelálatlanok

Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ a két pénzfeldobást leíró valószínűségi mező.
Vezessük be a következő véletlen változókat:

ω	(fej,fej)	(fej, írás)	(írás, fej)	(írás,írás)
$X(\omega)$	1	0	0	-1
$Y(\omega)$	0	1	-1	0

Ekkor X és Y nem függetlenek, hiszen

$$P(X = -1, Y = -1) = 0 \neq \frac{1}{16} = P(X = -1)P(Y = -1).$$

Viszont

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = 0 - 0 = 0,$$

tehát korrelálatlanok.

Legyen adott két változó, ξ és η . Lineáris kapcsolatot keresünk közöttük, azaz keressük azokat az a és b számokat, amire

$$\eta \approx a\xi + b.$$

Legyen adott két változó, ξ és η . Lineáris kapcsolatot keresünk közöttük, azaz keressük azokat az a és b számokat, amire

$$\eta \approx a\xi + b.$$

Pontosabban

$$\eta = a\xi + b + \epsilon,$$

ahol az ϵ hibatag egy 0 várható értékű valószínűségi változó. A célunk a és b meghatározása úgy, hogy ϵ szórása minimális legyen.

Legyen adott két változó, ξ és η . Lineáris kapcsolatot keresünk közöttük, azaz keressük azokat az a és b számokat, amire

$$\eta \approx a\xi + b.$$

Pontosabban

$$\eta = a\xi + b + \epsilon,$$

ahol az ϵ hibatag egy 0 várható értékű valószínűségi változó. A célunk a és b meghatározása úgy, hogy ϵ szórása minimális legyen. Átrendezéssel: $\epsilon = \eta - a\xi - b$, azaz

$$0 = \mathbb{E}(\epsilon) = \mathbb{E}(\eta) - a\mathbb{E}(\xi) - b, \quad \text{tehát} \quad b = \mathbb{E}(\eta) - a\mathbb{E}(\xi).$$

$$\text{Var}(\epsilon) = \text{Var}(\eta - a\xi - b) = \text{Var}(\eta - a\xi)$$

$$= \text{Var}(\eta) + \text{Var}(-a\xi) + 2 \text{Cov}(\eta, -a\xi)$$

$$= \text{Var}(\eta) + a^2 \text{Var}(\xi) - 2a \text{Cov}(\eta, \xi)$$

Ez egy másodfokú kifejezés a -ban, tehát deriválással, vagy teljes négyzetté alakítással minimalizálhatjuk. Ekkor kapjuk, hogy

$$a = \frac{\text{Cov}(\xi, \eta)}{\text{Var}(\xi)} = \frac{D(\eta)}{D(\xi)} \text{corr}(\xi, \eta).$$

A hibatag szórásnégyzete pedig

$$\text{Var}(\epsilon) = \text{Var}(\eta)(1 - \text{corr}^2(\xi, \eta)).$$

A korrelációs együttható szerepe

Az előzőek alapján tehát a korrelációs együttható a két változó lineáris függőségének irányát és erősségét jellemzi, ugyanis:

- 1 Ha ξ és η független egymástól, akkor $\text{corr}(\xi, \eta) = 0$, tehát $a = 0$, azaz nincs lineáris kapcsolat a két változó között.
- 2 Minél közelebb van a korrelációs együttható a ± 1 -hez, annál erősebb a lineáris függőség, hiszen annál kisebb hibával lehet közöttük lineáris regressziót végezni.
- 3 Ha $\text{corr}(\xi, \eta) = \pm 1$, akkor a hibatag szórása 0. Ebből következik, hogy a hibatag 1 valószínűséggel 0, tehát $\eta = a\xi + b$.
- 4 Ha $\text{corr}(\xi, \eta) > 0$, akkor $a > 0$, tehát a két változó között pozitív irányú kapcsolat van.
- 5 Ha $\text{corr}(\xi, \eta) < 0$, akkor $a < 0$, tehát a két változó között negatív irányú kapcsolat van.

Markov-egyenlőtlenség

Legyen ξ nemnegatív értékű valószínűségi változó. Ekkor tetszőleges $\epsilon > 0$ esetén

$$P(\xi \geq \epsilon) \leq \frac{\mathbb{E}(\xi)}{\epsilon}.$$

Markov-egyenlőtlenség

Legyen ξ nemnegatív értékű valószínűségi változó. Ekkor tetszőleges $\epsilon > 0$ esetén

$$P(\xi \geq \epsilon) \leq \frac{\mathbb{E}(\xi)}{\epsilon}.$$

Bizonyítás. Ha ξ diszkrét eloszlású, akkor legyen a lehetséges értékeinek halmaza $\{x_1, x_2, \dots\}$. Ekkor tetszőleges $\epsilon > 0$ esetén

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\xi) &= \sum_{k=1}^{\infty} x_k P(\xi = x_k) \geq \sum_{k: x_k \geq \epsilon} x_k P(\xi = x_k) \geq \epsilon \sum_{k: x_k \geq \epsilon} P(\xi = x_k) \\ &= \epsilon P(\xi \geq \epsilon).\end{aligned}$$

Ha ξ abszolút folytonos eloszlású valamilyen f_ξ sűrűségfüggvénnyel, akkor pedig tetszőleges $\epsilon > 0$ esetén

$$\mathbb{E}(\xi) = \int_0^{\infty} x f_\xi(x) dx \geq \int_{\epsilon}^{\infty} x f_\xi(x) dx \geq \epsilon \int_{\epsilon}^{\infty} f_\xi(x) dx = \epsilon P(\xi \geq \epsilon).$$

Csebisev-egyenlőtlenség

Legyen ξ tetszőleges valószínűségi változó. Ekkor tetszőleges $\epsilon > 0$ esetén

$$P(|\xi - \mathbb{E}(\xi)| \geq \epsilon) \leq \frac{\text{Var}(\xi)}{\epsilon^2}.$$

Csebisev-egyenlőtlenség

Legyen ξ tetszőleges valószínűségi változó. Ekkor tetszőleges $\epsilon > 0$ esetén

$$P(|\xi - \mathbb{E}(\xi)| \geq \epsilon) \leq \frac{\text{Var}(\xi)}{\epsilon^2}.$$

Bizonyítás. A Markov-egyenlőtlenség alkalmazásával

$$P(|\xi - \mathbb{E}(\xi)| \geq \epsilon) = P((\xi - \mathbb{E}(\xi))^2 \geq \epsilon^2) \leq \frac{\mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}(\xi))^2}{\epsilon^2} = \frac{\text{Var}(\xi)}{\epsilon^2}.$$

Bernoulli-féle nagy számok törvénye

Tekntsünk n független kísérletet, és egy ezzel kapcsolatos A eseményt, $p := P(A)$, az A esemény relatív gyakorisága: $r_n(A)$. Ekkor tetszőleges $\epsilon > 0$ esetén

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|r_n(A) - p| \geq \epsilon) = 0.$$

A nagy számok gyenge törvénye

Legyenek $\xi_1, \xi_2, \dots$ független, azonos eloszlású véletlen változók, melyeknek véges a második momentumuk. Ekkor tetszőleges $\epsilon > 0$ esetén

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} - \mathbb{E}(\xi)\right| \geq \epsilon\right) = 0.$$

Bizonyítás. $S_n := \xi_1 + \dots + \xi_n$. Ekkor

$$\mathbb{E}\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(\xi_k) = \mathbb{E}(\xi) \text{ és}$$

$$\text{Var}\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2} \text{Var}(S_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \text{Var}(\xi_k) = \frac{\text{Var}(\xi)}{n}. \text{ A}$$

Csebisev-egyenlőtlenséget alkalmazva kapjuk, hogy tetszőleges $\epsilon > 0$ esetén

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}(\xi)\right| \geq \epsilon\right) \leq \frac{\text{Var}\left(\frac{S_n}{n}\right)}{\epsilon^2} = \frac{\text{Var}(\xi)}{n\epsilon^2} \rightarrow 0, \text{ amint } n \rightarrow \infty.$$

A nagy számok Kolmogorov-féle erős törvénye

Legyenek $\xi_1, \xi_2, \dots$ független, azonos eloszlású véletlen változók, melyeknek létezik a várható értékük. Ekkor

$$P \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} = \mathbb{E}(\xi) \right) = 1.$$

Véletlen vektorváltozók

Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező, $d \in \mathbb{N}$. Ekkor az $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ d -dimenziós vektor egy **véletlen vektorváltozó**, ha tetszőleges $(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ esetén

$$\{\omega \in \Omega : X_1(\omega) \leq x_1, \dots, X_d(\omega) \leq x_d\} \in \mathcal{A}.$$

Véletlen vektorváltozók

Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező, $d \in \mathbb{N}$. Ekkor az $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ d -dimenziós vektor egy **véletlen vektorváltozó**, ha tetszőleges $(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ esetén

$$\{\omega \in \Omega : X_1(\omega) \leq x_1, \dots, X_d(\omega) \leq x_d\} \in \mathcal{A}.$$

Várható érték vektor, kovarianciamátrix

Az $\mathbf{X}$ véletlen vektorváltozó **várható érték vektora**:

$$\mathbb{E}(\mathbf{X}) := (\mathbb{E}(X_1), \dots, \mathbb{E}(X_d)),$$

és **kovarianciamátrixa**:

$$C(\mathbf{X}) := \left(\text{Cov}(X_i, X_j) \right)_{i,j=1}^d.$$

Diszkrét véletlen vektorváltozók

Azt mondjuk, hogy az $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d)$ változó **diszkrét véletlen vektorváltozó**, ha megszámlálható sok értéket vehet fel. Ekkor az $\mathbf{X}$ **együttes súlyfüggvénye**

$$p : \mathbb{Z}^d \rightarrow [0, 1], \quad p_{k_1, \dots, k_d} = P(X_1 = k_1, \dots, X_d = k_d).$$

Diszkrét véletlen vektorváltozók

Azt mondjuk, hogy az $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d)$ változó **diszkrét véletlen vektorváltozó**, ha megszámlálható sok értéket vehet fel. Ekkor az $\mathbf{X}$ **együttes súlyfüggvénye**

$$p : \mathbb{Z}^d \rightarrow [0, 1], \quad p_{k_1, \dots, k_d} = P(X_1 = k_1, \dots, X_d = k_d).$$

Marginális eloszlás

Legyen adott $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d)$ diszkrét véletlen vektorváltozó p együttes súlyfüggvénnyel. Tetszőleges $i = 1, \dots, d$ esetén az X_i véletlen változó **marginális eloszlása**

$$p_k = P(X_i = k) = \sum_{k_1, \dots, k_{i-1}, k_{i+1}, \dots, k_d \in \mathbb{Z}^{d-1}} p_{k_1, \dots, k_{i-1}, k, k_{i+1}, \dots, k_d}.$$

Feladat

Húzunk 2 lapot egy 32 lapos magyar kártya pakliból. Adjuk meg a kihúzott ászok illetve a kihúzott piros lapok számának együttes súlyfüggvényét, várható érték vektorát, kovarianciamátrixát.

Legyen most az egyszerűség kedvéért $d = 2$, és $\mathbf{X} = (X, Y)$.

Eloszlásfüggvény

Ekkor az (X, Y) változó **eloszlásfüggvénye**

$$F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Legyen most az egyszerűség kedvéért $d = 2$, és $\mathbf{X} = (X, Y)$.

Eloszlásfüggvény

Ekkor az (X, Y) változó **eloszlásfüggvénye**

$$F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

$$\begin{aligned} P((X, Y) \in (a, b] \times (c, d]) &= P(a < X \leq b, c < Y \leq d) = \\ &= F(b, d) - F(a, d) - F(b, c) + F(a, c). \end{aligned}$$

Folytonos véletlen vektorváltozók

Az $\mathbf{X} = (X, Y)$ változó **(abszolút) folytonos**, ha létezik egy $f = f(s, t), (s, t) \in \mathbb{R}^2$ függvény, amire

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(s, t), dt ds.$$

Ekkor azt mondjuk, hogy az $f(s, t)$ az $\mathbf{X} = (X, Y)$ vektorváltozó **együttes sűrűségfüggvénye**.

Marginális sűrűségfüggvény

Az X és az Y változó **marginális sűrűségfüggvényei** rendre a következők

$$f_X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s, t) dt, \quad f_Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s, t) ds.$$