2018. 10. 06. 3. konzultáció Valszám

Az óra laza ismétléssel kezdődik.

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$ ha $P(B) > 0$. Ez nem elég pontos def.,

de a kurzus most erre szorítkozik.

Valváltozó témakör érkezik. DISZKRÉT ÉS FOLYTONOS.

SÚLYFÜGGVÉNY

pl Két kockával dob. ξ: dobott számok összege

$\xi \in \{2, 3, \dots, 12\}$ KLASSZ. VAL. MEZŐ. $\left.\begin{matrix} x_i \\ p_i \end{matrix}\right\}$ párok megadhatók táblázatosan.

[véges sokan vannak].

$E(\xi)$: várható érték.

$$E(\xi) = \sum_k x_k P(\xi = x_k)$$ ha abs. konvergens.

ugye. pl. az előző esetben $E(\xi) = 7$. számolható.

Ha $\sum_k |x_k| p_k = \infty$ E nem létezik, de

ha $\sum_k |x_k| p_k$ konv., de $E = \infty$. Ekkor mégis létezik E.

Klasszikus példa: Szentpétervári játék

$$\xi: 2^k = x_k \quad P(\xi = 2^k) = \frac{1}{2^k}, \; k = 1, 2, \dots,$$

$$\sum |2^k| \frac{1}{2^k} = \infty$$ ez baj. Ebben a játékban.

játék igazságos ára is bajos a képbe.

Pl. Két kockadobás is független! $E(\xi_1) = 3{,}5$ $E(\xi_1 + \xi_2) = \underline{\underline{3{,}5 \cdot 2}}$

$E(\xi_2) = 3{,}5$

Transzformáció:

$$E(g(\xi)) = \sum_k g(x_k) P(\xi = x_k)$$

Variancia: szórásnégyzet. $D^2(\xi)$. $D^2(\xi) = E((\xi - E(\xi))^2)$.

$$D^2 = E(\xi^2) - E^2(\xi).$$

Ahol $E(\xi^2) = \sum (x_k)^2 P(\xi = x_k)$.

$E(\xi^2)$ az ún. második momentum.

Az első momentum tehát a várható érték.

A momentum egy érdekes rendes anyag.

Ez a variancia, a szórásnégyzet. (Már tanultak, ugye)

$$D(\varsigma) = \sqrt{Var(\varsigma)} \quad \text{világos.}$$

pl. Két kocka eldobása. ξ és η a kettő eredménye.

$\varsigma := \max(\xi, \eta)$ $\quad \varsigma \in \{1, 2, \ldots, 6\}$

X_i	1	2	...	6
p_i	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	...	$\frac{11}{36}$

ennyi. a) $E(\xi \varsigma)$ utána pedig a D.

újjgyakorlat. $\boxed{S}$

pl. $X := \min(\xi, \eta)$. $\in \{1, 2, 3, \ldots, 6\}$

X_i	1	2	3	4	5	6
p_i	$\frac{11}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$

$P(X_i)$ értékek adottak.

A várható érték meg fog egyezni...

$$E(X) = 7 - \frac{161}{36}.$$

$$D^2(X) = Var(X) =$$

$$\underline{Var(X_{min})} = Var(7 - X_{max}) = Var(-X_{max}) = (-1)^2\, \underline{Var(X_{max})}.$$

↑ eltolás ↑ konstans kiem.

Bernoulli: $P(\xi=1)=p$ $P(\xi=0)=1-p$ $p\in(0,1)$

paraméterek: $\xi \sim$ Bernoulli (p)

$E(\xi)=p$ $D^2(\xi)=p(1-p)$.

ez egy alap cucc.

SIKERES / SIKERTELEN kísérlethez jó.

Binomiális eloszlás: visszatevéses mintavételezés kétféle elemmel.

$$P(\xi=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \quad K=0,1,\dots,n$$

n golyót húzunk visszatevéssel.

pirosakat húzunk azok aránya p.

$E(\xi)=np$ $D^2(\xi)=np(1-p)$.

N db golyó, k db piros, $(N-k)$ kék

$p=\frac{k}{n}$. n db-ot húzunk visszatevéssel.

$|\Omega|=N^n$ $P(\text{pontosan } k \text{ db piros})=\dfrac{\binom{n}{k}K^k(N-k)^{n-k}}{N^n}$.

világos. egyszerűsítés után ugyanazt kapjuk.

Ha $X\sim \text{Binom}(n,p)$.

$X=\eta_1+\dots+\eta_n$ ahol $\eta_i\sim$ Bernoulli (p).

függetlenek, de ez most mindegy.

$$E(X)=E(\eta_1+\eta_2+\dots+\eta_n)=E(\eta_1)+E(\eta_2)+\dots+E(\eta_n)=np.$$

így is felépíthető.

$$D^2(\xi)=D^2(\eta_1+\dots+\eta_n)\underset{\text{függetlenek}}{=}D^2(\eta_1)+\dots+D^2(\eta_n)=np(1-p).$$

ez is látszik

Hipergeometrikus eloszlás:

visszatevés nélküli mintavételezés.

N golyó, M piros, M-N kék. n-szer húzunk.

$$P(\xi = k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$ lesz.

$$|\Omega| = \binom{N}{n} \qquad P(\text{pontosan } k \text{ a piros}) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{k}}$$

$$E(\xi) = ? \qquad D^2(\xi) = ? \qquad k = 0, \dots, n.$$

$$E(\xi) = n \cdot \frac{M}{N}.$$

$$D^2(\xi) = ?$$

Geometriai eloszlás: addig csináljuk a Bernoulli-t, amíg sikeres nem lesz..

$$P(\xi = k) = (1-p)^{k-1} p, \quad k = 1, 2, \dots$$

$$E(\xi) = \frac{1}{p}, \quad D^2(\xi) = \frac{1-p}{p^2}.$$

Táblázatosan, grafikusan ez már nem adható meg, csak súly függvénnyel.

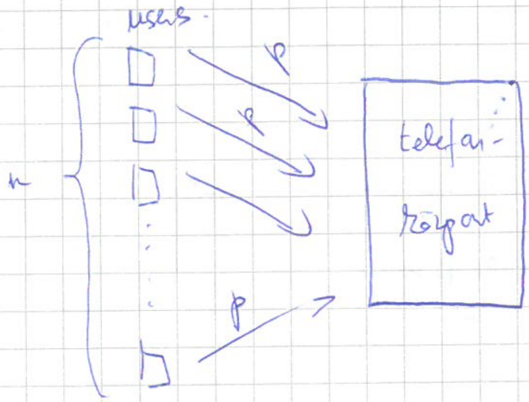
Mi lett az első kísérlet eredménye?

$$E(X) = 1 \cdot p + E(y)(1-p) = p + (1+E(x))(1-p).$$

Poisson-eloszlás: $P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$, $k = 0, 1, \dots$

$$E(\xi) = \lambda, \quad D^2(\xi) = \lambda.$$

Egy időegység alatt hány kísérlet következik be.



Binom(n, p) n nagy.

$$\Big\downarrow \, n \to \infty$$

Poisson (λ). ez a klasszikus

$$E(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot P(X=k) = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = \underline{\underline{\lambda}}.$$

Vmire csak jó az e Taylor-sora...

pl. 100 000 csavar/nap 1% eséllyel lesz hibás.

ξ: hibás csavarok száma.

$$\xi \in \{0, 1, \dots, 100\,000\}$$

$$\xi \sim \text{Binom}(100\,000,\ 0{,}01)$$

$$E(\xi) = np = \underline{\underline{1000}}$$

Legalább 3 lesz hibás...

Feltételes várható érték:

$$P(X = k \mid A)$$

$$E(X \mid A) = \sum_{k} k P(X = k \mid A) \text{ lesz.}$$

$$E(X) = \sum_{k} E(X \mid A_k) P(A_k).$$

vissza: $X \sim Geo(p)$.

$$E(X) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{T.V.H.T.}}}{=} E(X \mid \underbrace{\text{az első kísérlet sikeres}}_{A}) \cdot P(A) + E(X \mid \bar{A}) \cdot P(\bar{A}) =$$

$$P(A) = p$$

$$= 1 \cdot p + E(X \mid \bar{A}) \cdot (1-p).$$

Feladat:

ξ : kockadobás eredménye (diszkrét, egyenletes)

$$P(\xi = k) = \frac{1}{6}, \quad k = 1, \dots, 6$$

$$E(X) = 3,5$$

η : a dobott fejek száma

$$E(\eta) = ? = \sum_{k=1}^{6} \underbrace{E(\eta \mid \xi = k)}_{k/2} \cdot \underbrace{P(\xi = k)}_{=1/6} = \sum_{k=1}^{6} \frac{k}{12} = \frac{7}{4}.$$

η feltételes eloszlása az $\{X = k\}$ eseményre $binom(k, 1/2)$.

Folytonos valváltozók jönnek:

$$P(\xi = x) = 0.$$

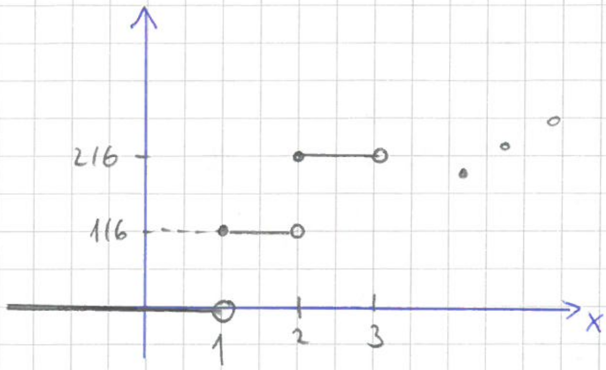
$$F_\xi : \mathbb{R} \to [0;1]$$

$$F_\xi(x) = P(\xi \le x).$$

- monoton nő;
- jobbról folytonos;
- $\lim_{x \to -\infty} F_\xi(x) = 0 \wedge \lim_{x \to \infty} F_\xi(x) = 1.$

nagyjából ez az ismert történet, ugye...

Kockadobás.



ξ: kockadobás eredménye.

$F(x) = P(\xi \leq x)$,

$x \in \mathbb{R}$.

$F(1) = P(\xi \leq 1) = \frac{1}{6}$

atd...

ismét töltény.

$\xi \in [0, 6]$ Ha $x < 0$: $F(x) = 0$

Ha $x > 6$: $F(x) = 1$

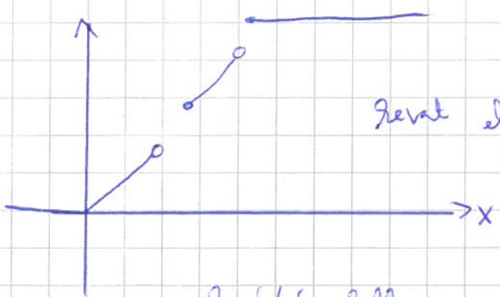
$\frac{6}{x}$ a függvény meggye.

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} f_\xi(t)\,dt$$

sűrűség függvény

ekkor ξ folytonos valváltozó.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt = 1.$$



kevert eloszlás (ilyen is van).

ez kevésbé kellemes.

Diszkrét változó eloszlása: $p_k = P(X=k)$. $p_k \geq 0$

$$\sum_k p_k = 1 \quad \text{volt.}$$

ezzel analóg a sűrűségfüggvény, ugye.

$$P(a < \xi \leq b) = F_\xi(b) - F_\xi(a) = \int_a^b f(t)\,dt.$$

$$F_\xi'(x) = f(x) \quad \text{lesz.}$$

$$E(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx. \quad \text{ugye.}$$

átmegyünk integrálba...

Ebben sincs eddig semmi újdonság.

pl:

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

nem negatív. $\int_0^\infty 2e^{-2x}\,dx = 1$ ✓.

① ②

sűrűségfüggvény.

nevezetes felg.

① Egyenletes eloszlás $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{ha } a < x < b \\ 0 & \text{amúgy} \end{cases}$

$$E(\xi) = \frac{a+b}{2}, \quad D^2(\xi) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

... örökifjú exp ennyi.

Feltételes valószínűségnél: Véletlenített pénzérmedobás

nem tudjuk, hogy szabályos az érme.

A dobd egy érme, p valószínűséggel ad fejet, $(1-p)$ valószínűséggel pedig írást.

ez csillagos példa

Itt most p egy valváltozó lesz.

Pl. p legyen egyenletes $(0,1)$-en.

Kérdés: mekkora valószínűséggel kapok fejet?

$$p \sim Egy(0,1) \qquad P(\underbrace{\text{fejet dobok}}_{A}) = ?$$

$$P(A) = \sum P(A \mid p=z) \cdot \underbrace{P(p=z)}_{=0} \quad ? \text{ Itt megállunk.}$$

T.V.T.

$$P(A) = \int_0^1 z f(z) dz = \int_0^1 z \cdot 1 \, dz = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}.$$

Teljes val. tétele folytonos feltétellel:

A tetszőleges esemény, ξ egy tetszőleges folytonos valváltozó $f(x)$ sűrűségfüggvénnyel.

$$P(A) = \int_{-\infty}^{\infty} P(A \mid X=t) \cdot f(t) \, dt. \qquad \square$$

Feladatok jönnek.

36. hf.

37. (a) ξ: nyeremény

$\xi \in \{0, 200\}$ $\qquad P(\xi=0) = \frac{19}{37}$ $\qquad E(\xi) = 200 \cdot \frac{18}{37} < 100$..

$P(\xi=1) = \frac{18}{37}$ $\qquad \approx 97{,}25$...

A rulett tehát nem igazságos, a banknak kedvez

(42.) ξ: 6 licitálások száma.

$$\xi \sim Geo(0,1).$$

$$\cancel{E\xi} \quad E(\xi) = 10.$$

$$P(300 \cdot \xi \geq 8000) = P\Big(\xi \geq \underbrace{\tfrac{8000}{300}}_{26,67}\Big) = P(\xi \geq 27) =$$

$$= 1 - \sum_{k=1}^{27} P(\xi = k) = 1 - \sum_{k=1}^{27} \left(\frac{9}{10}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{10} =$$

$$= 1 - \frac{1}{10} \cdot \frac{\left(\frac{9}{10}\right)^{27} - 1}{\frac{9}{10} - 1} \simeq \underline{\underline{0,058}}.$$

(43.) 2 találat az 5-ös lottón. Hipergeometrikus eloszlás.

(39.) $\boxed{A}$ 1-szer dobok, legyen az bármi,

X_i = i-edik stratégia esetén a pontszám

$E(X_i) \to \max.$ ez a cél. $i \in ABC$

$$E(X_A) = \frac{7}{2} = \underline{\underline{3,5}}.$$

$\boxed{B}$ 2-szer dobok (ha tudok)

$$X_B \in \{1, \dots, 6\}$$

k	1	2	…	6
$P(X_B = k)$	$\underbrace{\frac{1}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6}}_{\frac{11}{36}}$	$\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6}$		$\frac{5}{36}$

$$E(X_B) = 1 \cdot \frac{11}{36} + (2 + \dots + 6) \cdot \frac{5}{36} = \underline{\underline{3,083}}$$

Ez így monoton csökken...

$\boxed{C}$ Ha 3-nál kisebb (2-t dobok), akkor újra dobok, amíg kell.

$$X_C \in \{1, 3, 4, 5, 6\}$$

k	1	3	4	5	6
$P(X_C=k)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

$$P(X_C=1) = \frac{1}{6} + \underset{\uparrow}{\frac{1}{6}} \cdot \frac{1}{6} \cancel{= \frac{1}{6} + \frac{1}{36} =} + \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} + \dots + \quad =$$

2-est dobtam előbb

$$= \frac{1}{6} \cdot \left(1 + \frac{1}{6} + \dots\right) = \frac{1}{6} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{6}\right)^i =$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1 - 1/6} = \frac{1}{5}$$

$$E(X_C) = \frac{1+3+4+5+6}{5} = \frac{19}{5} = 3{,}8$$

ez jobb. ☺

$\boxed{D}$ Ha 2-t vagy 3-at dobok, akkor újrázok (ez jobb?)

$$X_D \in \{1, 4, 5, 6\}$$

k	1	4	5	6
$P(X_D=k)$	$1/4$	$1/4$	$1/4$	$1/4$

$$P(X_D=1) = \frac{1}{6} + \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{6} + \left(\frac{2}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} + \dots =$$

$$= \frac{1}{6}\left(\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{2}{6}\right)^{i}\right) = \frac{1}{6}\,\frac{1}{1-2/6} = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}.$$

$$E(X_D) = \frac{1+4+5+6}{4} = \underline{\underline{4}}$$ és is jobb

$\boxed{E}$ 2, 3 és 4 esetén újra dobunk

$$X_E \in \{1, 5, 6\}$$

k	1	5	6
$P(X_E=k)$	1/3	1/3	1/3

$P(X_E=1)$ megoldható!

$$P(X_E=1) = \frac{1}{6} + \frac{3}{6}\cdot\frac{1}{6} + \left(\frac{3}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{6}\cdot\left(\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{3}{6}\right)^{i}\right) =$$

$$E(X_E) = \frac{1+5+6}{3} = \underline{\underline{4}}. \qquad = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{1/2} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}.$$

szórás alapján döntsünk E és D között.

~~B~~ 3 $\quad D(X_E) = ?$

$$E(X_E^2) = \frac{1^2+5^2+6^2}{3} \quad \underline{\underline{\frac{62}{3}}} \approx \underline{\underline{20{,}67}}$$

$$D^2(X_E) = E(X_E^2) - E^2(X_E) =$$

$$= \frac{62}{3} - 16 = \frac{14}{3} \approx \underline{\underline{4{,}67}}.$$

$$E(X_p^2) = \frac{1+4^2+5^2+6^2}{4} = 19,5$$

$$D^2(X_b^2) = 19,5 - 16 = \underline{\underline{3,5}}$$

Jobb tehát a D stratégiát választani.

itt a vége.

A 40. példa jó lehet.

Folytonos példák jönnek.

54. $r = 2$ körlapon

$X \in [0,2]$

$$F(t) = P(X \le t) \text{ kell.}$$

Ha $t \le 0$, akkor $F(t) = 0$,

Ha $t \ge 2$ akkor $F(t) = 2$.

Legyen $t \in [0,2]$ rögzített belsőleges. Geom. valószí.

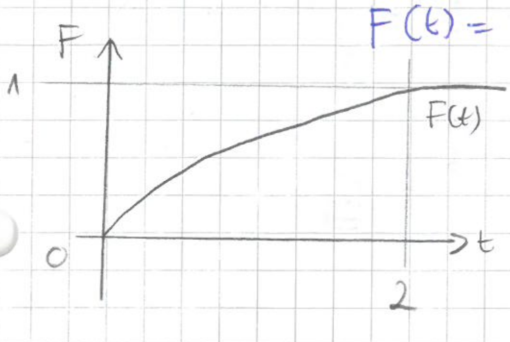
$$F(t) = P(X \le t) = \frac{4\pi - (2-t)^2\pi}{4\pi} = \frac{4 - 4 + 4t - t^2}{4} =$$

$|\Omega| = 4\pi$

$$= t - \frac{t^2}{4}.$$

Tehát:

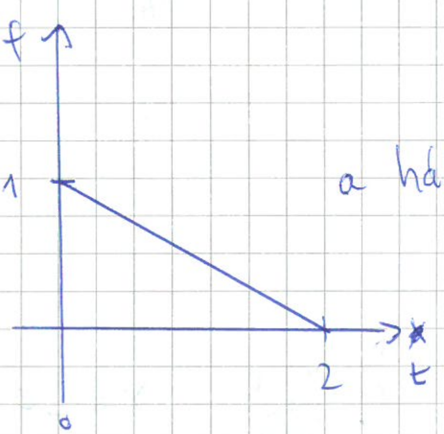
$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{ha } t \le 0 \\ t - \frac{t^2}{4} & \text{ha } 0 < t < 2 \\ 1 & \text{ha } t \ge 2 \end{cases}$$



$f(t) = F'(t) = \underline{\underline{1 - \frac{t}{2}}}$

$t \in [0, 2]$

$$f(t) = \begin{cases} 1 - t/2 & \text{ha } 0 \leq t \leq 2 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$



a háromszög egységnyi területű

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\, dx = \int_0^2 x \cdot \left(1 - \frac{x}{2}\right) dx =$$

$$= \int_0^2 \left(x - \frac{x^2}{2}\right) dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 - \left[\frac{x^3}{6}\right]_0^2 = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$$

Várhatóan $\frac{2}{3}$ lesz a távolság.

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 f(t)\, dt$$

(53.) $X \sim Egy[0, 6]$

$X^2 \sim ?$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 \cdot f_X(t)\, dt = \int_0^6 t^2 \cdot \frac{1}{6}\, dt =$$

$$= \frac{1}{6} \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^6 = \underline{\underline{12}}$$

$F_{X^2}(t) = ?$

$t \le 0 \Rightarrow F_{X^2}(t) = 0$;

$t \geq 36 \Rightarrow F_{X^2}(t) = 1$.

Legyen $t \in [0, 36]$ tetszőleges.

$$F_{X^2}(t) = P(X^2 \le t) = P(X \le \sqrt{t}) = F_X(\sqrt{t}) =$$

$|\Omega| = 6 \cdot 6 = 36$

$$= \frac{\sqrt{t}}{6}.$$

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{ha } t \le 0 \\ 1 & \text{ha } t \geq 6 \\ \frac{t}{6} & \text{ha } 0 \le t \le 6 \end{cases}$$

$$F_{X^2}(t) = \begin{cases} 0 & \text{ha } t \le 0 \\ \frac{\sqrt{t}}{6} & \text{ha } 0 < t < 36 \\ 1 & \text{ha } t \geq 36 \end{cases}$$