

Előadó: Beuer János

végén: egy dolgozat, csőz gyakorlat. 1,5 óra.

Válszám: kisheték mák. modellése.

A diasor elheto $\in \text{CoSpace}$ -en. függvényei nem igazán van értelme.

Válszámítás: $r_n(A) = \frac{r_n(A)}{n} \approx P(A)$ nagy n esetén.

Válszámítás reje: Ω ; $A \subseteq \Omega$, ami σ -algebra; $A \rightarrow [0, 1]$ leképezés.
ELOZLA's.
Kolmogorov-axiómák.

$A_i = \emptyset$ lehetetlen esemény:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \emptyset\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(\emptyset)$$



$P(\emptyset) = 0$, hogy véges legyen a szumma.

Klasszikus reje: $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$.

Véges additivitás: $A_1, A_2, \dots, A_n, \emptyset, \emptyset, \emptyset, \dots \Leftrightarrow$ σ -add. $P(\emptyset) = 0$.

Jön a suta-fanala is.

Példa: $P(A) = 0,4$ $P(B) = 0,35$ $P(C) = 0,3$ $P(A \cap B) = 0,15$
 $P(A \cap C) = 0,2$ $P(B \cap C) = 0,2$ $P(A \cap B \cap C) = 0,1$.

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 0,6.$$

$$P(A \cap \bar{C}) = P(A \setminus C) = P(A) - P(A \cap C) = 0,4 - 0,2 = 0,2.$$

pontosan csak $A \Rightarrow$ suta-fanala.

Klasszikus rejezés feladat.

ELOZLA's fogalma.

Alap kombinatórikus reje.

Ösmétlés néhány variációk.

6 5 4 3.

Ilyen összerakódási feladatok vannak.

Geometriai valószínűség. ■

Feladatmegoldás következik.

② A_m, B_n, C_p

(a) $A_1 \cap B_3$. (b) $A_0 \cap B_0 \cap C_0$

(c) $\bar{A}_0 = A_1 \cup A_2 \cup \dots$

③ (a) nyílt (vagy zárt) $\xrightarrow{\text{tagadás}}$ nem nyílt. (e)

(b) $\Leftrightarrow$ (d). Igen igaz. (De Morgan). (d) #

$\Downarrow$ tagadás

egyetlen sem nyílt (d) $\equiv$ (e).

emlék: $A \Delta B$ szimmetrikus különbség.

$$\parallel$$
$$(A \setminus B) \cup (B \setminus A) \text{ ezt jelenti.}$$

$$\parallel$$
$$(A \cup B) - (A \cap B) \text{ ekvivalens.}$$

⑦ 2 kocka $\Omega = 6^2 = 36$.

$$\Omega = \{(i, j) : i = 1, \dots, 6; j = 1, \dots, 6\}.$$

(0) $P(\text{dupla kocka}) = \frac{1}{36}$.

(a) $P(1 \text{ db } 6\text{-os és } 1 \text{ db } 2\text{-es}) = \frac{2}{36}$.

$$\Omega_1 = \{1, \dots, 6\}.$$

$$\Omega = \Omega_1^2 = \Omega_1 \times \Omega_1 \text{ is leheto.}$$

(b) $P(\text{mindkét szám páros}) = \frac{3 \cdot 3}{36} = \frac{9}{36} (= \frac{1}{4})$.

Adja meg a valószínűségi mezőt (σ -algebra).

$$\mathcal{A} = 2^{\Omega}$$

$\mathcal{A} = \{\emptyset, A, \bar{A}, \Omega\}$ ez is jó!

KLASSZIKUS VALÓSZÍNŰSÉGI MEZŐ.

$$(c) P(\text{dob. számok összege 4}) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}.$$

1 3

2 2 ← csak egyszer.

$$(9) |\Omega| = 2^5 = 32.$$

KLASSZIKUS VALMEZŐ.

$$\begin{aligned} (a) P(\geq 2 \text{ fejét dobunk}) &= 1 - P(\text{legfeljebb 1 fejét dobunk}) = \\ &= 1 - P(\text{egyet sem}) - P(\text{pontosan 1-et dobunk}) = \\ &= 1 - P(\text{mind írás}) - P(\text{pontosan 1 fej}) = \\ &= 1 - \frac{1}{2^5} \frac{5}{2^5} = \frac{26}{32}. \end{aligned}$$

Direkt út:

$$\begin{aligned} &P(\text{pontosan 2}) + P(\text{pon. 3}) + P(\text{pon. 4}) + P(\text{pon. 5}) = \\ &= \frac{\binom{5}{2}}{32} + \frac{\binom{5}{3}}{32} + \frac{\binom{5}{4}}{32} + \frac{\binom{5}{5}}{32} = \frac{26}{32}. \end{aligned}$$

$$(11) 52 \text{ lapos francia kártya. } |\Omega| = \binom{52}{5}.$$

KLASSZIKUS VAL. MEZŐ.

Visszatevés nélküli

minta-vételzés. ekkor mindig $|\Omega| = \binom{n}{k}$

(2020) Visszatevéses minta-vételzés $|\Omega| = n^k$. Sorrend nem számít.
Sorrend számít.

$$(e) |A| = 4$$

↑ 4-féle szín van, azért

$$(h) |A| = 9 \cdot 4 \leftarrow 4\text{-féle szín}$$

↑ féle szám van

$$(g) 13 \cdot (52 - 4) \quad \downarrow \text{dőlés}$$

↑ 4 db egyforma figura

$$(f) 13 \cdot \binom{4}{3} \cdot 12 \cdot \binom{4}{2}$$

↑ esetek

$$(12) |U| = 8^3$$

KLASSZIKUS VAL. MÉZŐ.

$$(a) P(a) = \frac{\binom{3}{2} \cdot 5^2 \cdot 3}{8^3}$$

$$(b) P(b) = 1 - P(\bar{b}) = 1 - \frac{5^3}{8^3}$$

(14)

n ember.

$$n \geq 365 \Rightarrow P() = 1.$$

Ha $n < 365$.

$$P(\text{legalább 2-ének 1 napra esik}) =$$

$$= 1 - P(\text{egyetik sem esik egy napra}) = 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot \dots \cdot (365 - n + 1)}{365^n}$$

csinálj a száma.

Geometria

$$(6) \text{ kúpgyökerek.}$$

$$|U| = (30 \text{ km})^2 \cdot \pi$$

$$|A| = 50 \text{ km}^2$$

$$P(A) = \frac{|A|}{|U|} = \frac{50}{900\pi}$$

(h)

B: egyelőre van-e lehetősé. $P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = 0.$

De B nem a lehetetlen esemény!

Ez fontos.

(7.)



Geometriai val. néző, $|\Omega| = 1.$

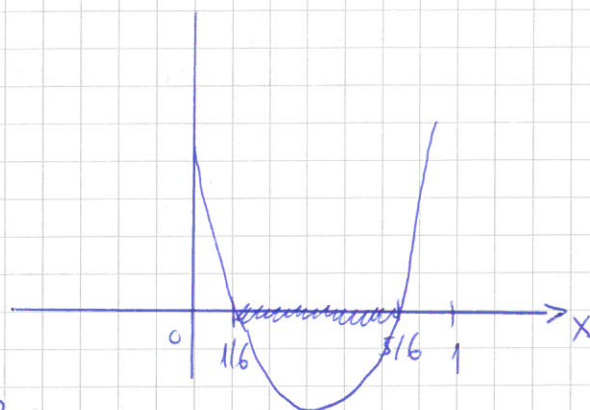
$$A = \left\{ x(1-x) > \frac{5}{36} \right\}$$

A = a két szakasz hosszának szorzata nagyobb, mint $\frac{5}{36}.$

$$x - x^2 > \frac{5}{36}$$

$$0 > x^2 - x + \frac{5}{36}$$

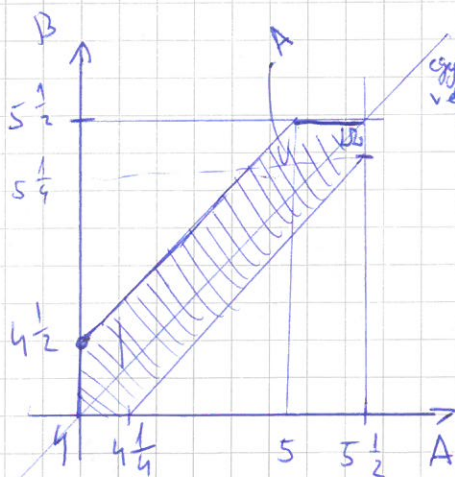
$$x_1 = \frac{5}{6} \quad x_2 = \frac{1}{6}$$



$$|A| = \frac{2}{3}$$

$$P(A) = \frac{\frac{2}{3}}{1} = \frac{2}{3} \text{ ennyire.}$$

(19)



$$|B| = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}.$$

$$P(\text{találkozás}) =$$

$$|A| = \frac{9}{4} - \frac{1}{2} - \frac{(5/4)^2}{2}$$

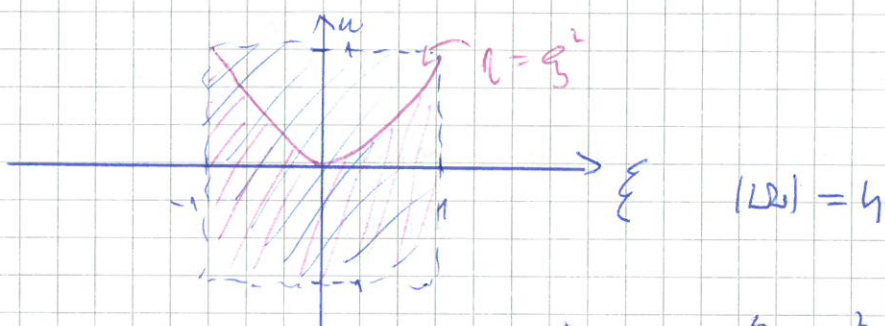
$$P(A) = \frac{31/32}{9/4} = \frac{31}{72}.$$

Átvonjuk a két Δ területét.

$$\frac{31}{32}$$

(5)

(23.)



$$A = \{ \xi, \eta \mid x^2 + 2\xi x + \eta = 0 \text{ gőzölhet legyen valós szám.} \}$$

$$A = \{ (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2 : D \geq 0 \} \text{ kell, ahol}$$

$$D = b^2 - 4ac = 4\xi^2 - 4\eta \geq 0$$

$$\xi^2 - \eta \geq 0 \Leftrightarrow \xi^2 \geq \eta.$$

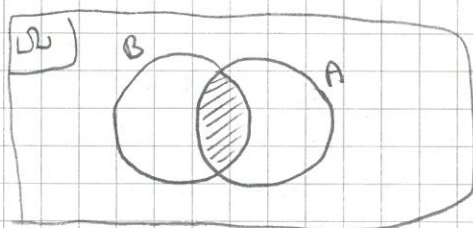
$$|A| = 2 + \int_{-1}^1 \xi^2 d\xi = 2 + \left[\frac{\xi^3}{3} \right]_{-1}^1 =$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} + 2 = \frac{8}{3}.$$

$$P(A) = \frac{8/3}{4} = \frac{2}{3}.$$

chngy. Feltételes valószínűség témakörre jön.

$$r_h(A|B) := \frac{K_h(A \cap B)}{K_h(B)} = \frac{r_h(A \cap B)}{r_h(B)}.$$



$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

"metszet súlya B-n belül"
az ötletet def.

KOMPLEMENTER: $P(\bar{A}|B) = 1 - P(A|B).$

a feltétel rögzített.

Láncszabály van itt is. ⑥

Példa láncszabályra.

(F) 5P, 3K golyók vannak.
visszatevés nélkül húzzuk. Hármat.

(a) KLASSZIKUS VAL. MÉRŐ.

A_1 = első húzás eredménye piros;

A_2 = a 2. húzás;

A_3 = a 3. húzás piros.

$$P(A_1 A_2 A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1) \cdot P(A_3 | A_1 A_2) = \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{6}$$

↑
egyesítő törv. láncszabály.

Függetlenség. $\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

(b) húzzunk visszatevéssel

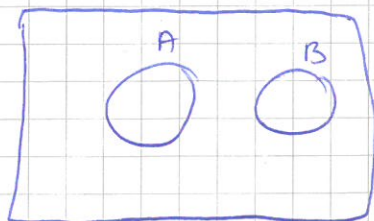
$$P(A_1 A_2 A_3) = \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{8}$$

↑
függetlenség egymástól.

Ha $A \cap B$ független:

$$P(A|B) = P(A)$$

$$P(B|A) = P(B)$$



Itt fizikailag események vannak.

