

1. Gerschgorin körlap

Legyen adott egy $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mátrix.

Tétel: Az A mátrix összes sajátértéke benne van a

$$D_j = \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{jj}| \leq \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n |a_{jk}|\}$$

körlapok $D = \bigcup_{j=1}^n D_j$ egyesítésében a komplex símsíkon.

Gyakorlati haszn: Olyan A mátrixok esetében, melyek elég nagyok (n jó nagy szám),

és a főátlón kívüli elemek a főátló elemeihez képest abszolútértékben kicsik,

a mátrix sajátértékei jól becsülhetők az n tengleges kiszámítása nélkül.

$$B_1 = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1-i \end{pmatrix}$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} 4 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1-i \end{pmatrix}$$

Adjunk összefüggést ($\approx$ Bijekeit) B_1 és B_2 Gerschgorin-körök között!

B_1 :

Körök középpontja

$$O_1 = 4$$

$$O_2 = -1$$

$$O_3 = -1-i$$

sugár

$$r_1 = 1+1=2$$

$$r_2 = 1+0=1$$

$$r_3 = 2+0=2$$

B_2 :

Körök középpontja

$$O_1^* = 4$$

$$O_2^* = -1$$

$$O_3^* = -1-i$$

sugár

$$r_1^* = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$r_2^* = \frac{1}{2}$$

$$r_3^* = 1$$

Látjuk: $O_i^* = O_i \quad \forall i$ -re.

A körök középpontjai megegyeznek.

$$r_i^* = \frac{r_i}{2} \quad \forall i$$
-re.

A sugárak B_1 fele B_2 -ké.

2. Lineáris egyenletrendszer Gauss-algortizmával

- 2 -

$$\underbrace{3}_{a_{11}}x_1 + \underbrace{1}_{a_{12}}x_2 + \underbrace{4}_{a_{13}}x_3 = 28$$

$$\underbrace{4}_{a_{21}}x_1 + \underbrace{5}_{a_{22}}x_2 + \underbrace{-2}_{a_{23}}x_3 = -14$$

$$\underbrace{7}_{a_{31}}x_1 + \underbrace{-1}_{a_{32}}x_2 + \underbrace{2}_{a_{33}}x_3 = 42$$

Az alapalgortizmussal kell megoldani.

A mátrixos alak:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 4 & 28 \\ 4 & 5 & -2 & -14 \\ 7 & -1 & 2 & 42 \end{array} \right) \begin{array}{l} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{array}$$

$$l_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{4}{3} \quad l_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}} = \frac{7}{3}$$

Lépések: $S_2 \leftarrow S_2 - l_{21}S_1$, $S_3 \leftarrow S_3 - l_{31}S_1$

Kapjuk:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 4 & 28 \\ 0 & \frac{11}{3} & -\frac{22}{3} & -\frac{154}{3} \\ 0 & -\frac{10}{3} & -\frac{22}{3} & -\frac{70}{3} \end{array} \right)$$

$$l_{32} = \frac{-\frac{10}{3}}{\frac{11}{3}} = -\frac{10}{11}$$

Lépés: $S_3 \leftarrow S_3 - l_{32}S_2$ Kapjuk:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 4 & 28 \\ 0 & \frac{11}{3} & -\frac{22}{3} & -\frac{154}{3} \\ 0 & 0 & -14 & -70 \end{array} \right)$$

Lépések: $S_3 \leftarrow S_3 / (-14)$

$$S_2 \leftarrow S_2 - \frac{-22}{2}S_3$$

$$S_1 \leftarrow S_1 - 4S_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & \frac{11}{3} & 0 & -\frac{44}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right)$$

Lépések: $S_2 \leftarrow S_2 \cdot \frac{3}{11}$

$$S_1 \leftarrow S_1 - 1 \cdot S_2$$

$$S_1 \leftarrow S_1 / 3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right) \begin{array}{l} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array}$$

Tehát: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$

Ebből a háromszögletű mátrixból leolvasható a rendszer determinánsa.
A főátló elemek szorzata
 $|A| = 3 \cdot \frac{11}{3} \cdot (-14)$
 $\parallel$
 -154

3. Cholesky - felbontás

-3-

Adott a B mátrix. $B = \begin{pmatrix} 81 & 9i & 9 \\ -9i & 5 & i \\ 9 & -i & 11 \end{pmatrix}$

B (Hermite-) szimmetrikus és pozitív definit $\Leftrightarrow \exists$ Cholesky-felbontása.

Adjuk meg!

* : komplex konjugált.

$$B = \begin{pmatrix} 81 & 9i & 9 \\ -9i & 5 & i \\ 9 & -i & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{11} & 0 & 0 \\ r_{21} & r_{22} & 0 \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{11}^* & r_{21}^* & r_{31}^* \\ 0 & r_{22}^* & r_{32}^* \\ 0 & 0 & r_{33}^* \end{pmatrix} \begin{matrix} 1a \\ 2a \\ 3a \end{matrix}$$

16 26 36

Parcellázással oldjuk meg.

1a/16)

$$81 = r_{11}^2 \Leftrightarrow$$

$$r_{11} = r_{11}^* = \sqrt{81} = \underline{9}.$$

$$9i = r_{11} r_{21}^* \Leftrightarrow$$

$$r_{21}^* = \frac{9i}{9} = i, \Rightarrow r_{21} = -i$$

$$9 = r_{11} r_{31}^* \Leftrightarrow$$

$$r_{31}^* = r_{31} = \frac{9}{9} = \underline{1}.$$

2a/26)

~~$$81 = r_{11}^2$$~~

$$5 = r_{21} r_{21}^* + r_{22}^2 \Leftrightarrow r_{22}^2 = 4$$

$$i \cdot (-i) = 1$$

$$\updownarrow \\ r_{22} = r_{22}^* = \sqrt{4} = \underline{2}$$

$$-i = r_{31} r_{21}^* + r_{32} r_{22}^* \Leftrightarrow$$

$$-2i = 2 r_{32} \Leftrightarrow r_{32} = -i$$

$$r_{32}^* = i$$

3a/36)

$$11 = r_{31} r_{31}^* + r_{32} r_{32}^* + r_{33}^2 \Leftrightarrow$$

$$\begin{matrix} 1 \\ i \cdot (-i) \\ 1 \end{matrix}$$

$$9 = r_{33}^2 \Leftrightarrow r_{33} = r_{33}^* = \sqrt{9} = \underline{3}$$

Tehát a felbontás.

$$B = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ -i & 2 & 0 \\ 1 & -i & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & i & 1 \\ 0 & 2 & i \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

4. Newton-Raphson-iteráció

Oldjuk meg: $10x^2 - 1 = x^4$ 2 tizedesjegy pontossággal.

$x_0 = 4$ legyen.

Az iterációs sorozat definíciója: $x_m = x_{m-1} - \frac{f(x_{m-1})}{f'(x_{m-1})}$

$$10x^2 - 1 = x^4 \Leftrightarrow x^4 - 10x^2 + 1 = 0. \quad f(x) = x^4 - 10x^2 + 1.$$

$$f'(x) = 4x^3 - 10x.$$

A legnagyobb valós megoldást keressük meg „klasszikus” módszerrel is.

$$y = x^2 \Rightarrow y^2 - 10y + 1 = 0 \quad \max(y) \approx 9,90$$

$$\max(x) = \sqrt{9,90} \approx \underline{\underline{3,15}}$$

Newton-Raphson-iteráció:

1. lépés: $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 4 - \frac{97}{216} \approx \underline{\underline{3,55}}$

2. lépés: $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \approx 3,55 - \frac{33,80}{143,46} \approx \underline{\underline{3,31}}$

3. lépés: $x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} \approx 3,31 - \frac{11,48}{111,96} \approx \underline{\underline{3,21}}$

4. lépés: $x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} \approx 3,21 - \frac{4,13}{100,20} \approx \underline{\underline{3,17}}$

5. lépés: $x_5 = x_4 - \frac{f(x_4)}{f'(x_4)} \approx 3,17 - \frac{1,49}{95,72} \approx \underline{\underline{3,15}}$

5. Hermite-integrandáció

a) Adott: $X = \{-1, 2\}$, $F = \{3, 6\}$, $DF = \{1, -2\}$

Meg kell csinálni az osztott dif. táblázatot:

↓ itt vannak az együtthatók.

X	F	DF
-1	3	
-1	3	$\frac{1-1}{2-(-1)} = 0$
2	6	$\frac{6-3}{2-(-1)} = 1$
2	6	$\frac{-2-1}{2-(-1)} = -1$

(Note: The original image shows additional calculations for the divided differences between the first and second nodes, which are circled in the original image. These are: $\frac{1-1}{2-(-1)} = 0$ and $\frac{-1-0}{2-(-1)} = -\frac{1}{3}$. These are the coefficients for the Hermite polynomial.)

$$P(X) = 3 + (+1)(X+1) + 0 \cdot (X+1)^2 + (-\frac{1}{3})(X+1)^2(X-2) =$$

$$= \underline{\underline{3 + (X+1) - \frac{1}{3}(X+1)^2(X-2)}}.$$

b) Adott: $X = \{1, 2, 3\}$, $F = \{2, 5, 10\}$, $DF_2 = 5$.

X	F
1	2
2	5
2	5
3	10

(Note: The original image shows the divided difference calculations for the second-order differences, which are circled in the original image. These are: $\frac{5-2}{2-1} = 3$, $\frac{5-3}{2-1} = 2$, $\frac{0-2}{3-1} = -1$, and $\frac{5-5}{3-2} = 0$. These are the coefficients for the Hermite polynomial.)

$$P(X) = 2 + 3(X-1) + 2(X-1)(X-2) - (X-1)(X-2)^2.$$

(Ebben nem vagyok 100%-ig biztos, hogy jó.)

Az osztott dif. táblázat biztosan OK.)

6. Lineáris regresszió

- 6 -

Kell egy optimális $p(x) = a_0 + a_1 x$, ha:

$$X = \{1, 2, 3, 4\}, \quad F = \{2, 3, 1, 4\} \quad + \text{Abra.}$$

Felírd a négyzetes differencia hiba függvényt.

$$G(a_0, a_1) = \underbrace{(a_0 + a_1 - 2)^2}_{a_0 + a_1 x_1 - f_1} + \underbrace{(a_0 + 2a_1 - 3)^2}_{a_0 + a_1 x_2 - f_2} + \underbrace{(a_0 + 3a_1 - 1)^2}_{a_0 + a_1 x_3 - f_3} + \underbrace{(a_0 + 4a_1 - 4)^2}_{a_0 + a_1 x_4 - f_4}.$$

Kell: $\nabla G(a_0, a_1) = 0$, mert ott lesz minimuma a hiba függvénynek.

Ehhez:

$$\nabla G(a_0, a_1) = \frac{\partial G}{\partial a_0} \vec{i} + \frac{\partial G}{\partial a_1} \vec{j}.$$

$$\frac{\partial G}{\partial a_0} = 2(a_0 + a_1 - 2) + 2(a_0 + 2a_1 - 3) + 2(a_0 + 3a_1 - 1) + 2(a_0 + 4a_1 - 4) =$$

$$= 2a_0 + 2a_1 - 4 + 2a_0 + 4a_1 - 6 + 2a_0 + 6a_1 - 2 + 2a_0 + 8a_1 - 8 =$$

$$= 8a_0 + 20a_1 - 20 = 0 \Leftrightarrow \boxed{8a_0 + 20a_1 = 20}$$

$$\frac{\partial G}{\partial a_1} = 2(a_0 + a_1 - 2) + 4(a_0 + 2a_1 - 3) + 6(a_0 + 3a_1 - 1) + 8(a_0 + 4a_1 - 4) =$$

$$= 2a_0 + 2a_1 - 4 + 4a_0 + 8a_1 - 12 + 6a_0 + 18a_1 - 6 + 8a_0 + 32a_1 - 32 =$$

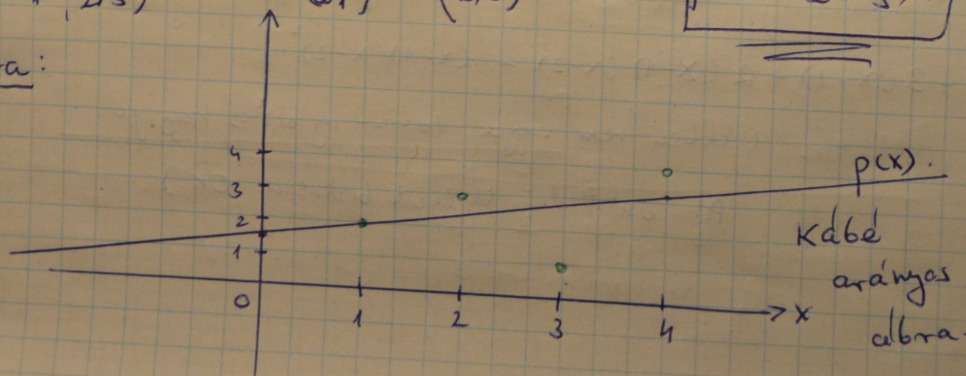
$$= 20a_0 + 60a_1 - 54 = 0 \Leftrightarrow \boxed{20a_0 + 60a_1 = 54}$$

Megoldjuk.

$$\begin{pmatrix} 8 & 20 & | & 20 \\ 20 & 60 & | & 54 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 5 & | & 5 \\ 10 & 30 & | & 27 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 5 & | & 5 \\ 0 & 5 & | & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & | & 3 \\ 0 & 1 & | & 2/5 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 3/2 \\ 0 & 1 & | & 2/5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 2/5 \end{pmatrix} \text{ Tehát } \boxed{p(x) = \frac{3}{2} + \frac{2}{5}x}$$

Abra:



7. Neumenius integrálás

Kérdés: $\int_4^6 \frac{1}{x} dx$ Trapéz- és Simpson-formula segítségével,

ha 3 egyenlőtlen részre osztjuk.

Előzetesen:

$$\int_4^6 \frac{1}{x} dx = \left[\ln|x| \right]_4^6 = \ln|6| - \ln|4| = \ln\left|\frac{6}{4}\right| \approx \underline{\underline{0,4055}}$$

Trapéz-formula:

$$\begin{array}{ccccccc} & \Delta & & \Delta & & \Delta & \\ | & & | & & | & & | \\ x_0=4 & & x_1=\frac{14}{3} & & x_2=\frac{16}{3} & & x_3=6 \end{array} \quad \Delta = \frac{6-4}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\begin{aligned} \int_4^6 \frac{1}{x} dx &\approx T(f) = \underbrace{\frac{\Delta}{2}}_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{x_0} + \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} \right) = \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{3}{14} + 2 \cdot \frac{3}{16} + \frac{1}{6} \right) \approx 0,4067 \left(= \frac{205}{504} \right) \end{aligned}$$

Simpson-formula:

$$\Delta = \frac{6-4}{3} = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$$

$$\begin{array}{ccccccccccc} | & | & | & | & | & | & | & | & | & | \\ x_0=4 & x_1=\frac{13}{3} & x_2=\frac{11}{3} & x_3=\frac{15}{3} & x_4=\frac{16}{3} & x_5=\frac{17}{3} & x_6=6 & & & \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\Delta} & \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\Delta} & \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\Delta} & & & & & & & \end{array}$$

$$\begin{aligned} \int_4^6 \frac{1}{x} dx &\approx S(f) = \underbrace{\frac{\Delta}{6}}_{\frac{1}{9}} \left(\frac{1}{x_0} + 4 \cdot \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_2} + 4 \cdot \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} + \frac{1}{x_4} + 4 \cdot \frac{1}{x_5} + \frac{1}{x_6} \right) = \\ &= \frac{1}{9} \cdot \left(\frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{3}{13} + 2 \cdot \frac{3}{14} + 4 \cdot \frac{3}{15} + 2 \cdot \frac{3}{16} + 4 \cdot \frac{3}{17} + \frac{1}{6} \right) \approx \underline{\underline{0,4055}} \end{aligned}$$

Az ötlet a formula mögött: $M(f) = (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ ÉRINTŐFORMULA

$$T(f) = \frac{b-a}{2} (f(a) + f(b)) \text{ TRAPÉZF.}$$

$$\frac{2M(f) + T(f)}{3}$$

ad pontosabb közelítést, ami épp a Simpson-formula!!!