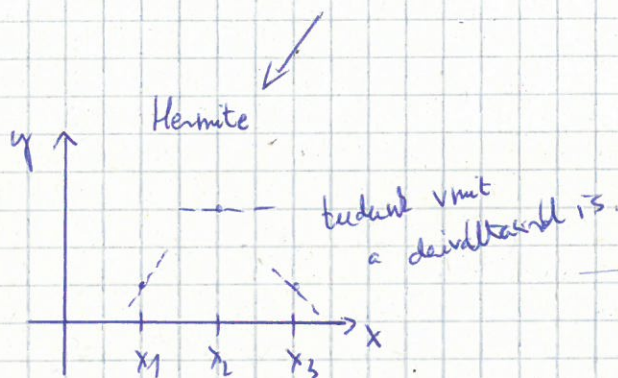
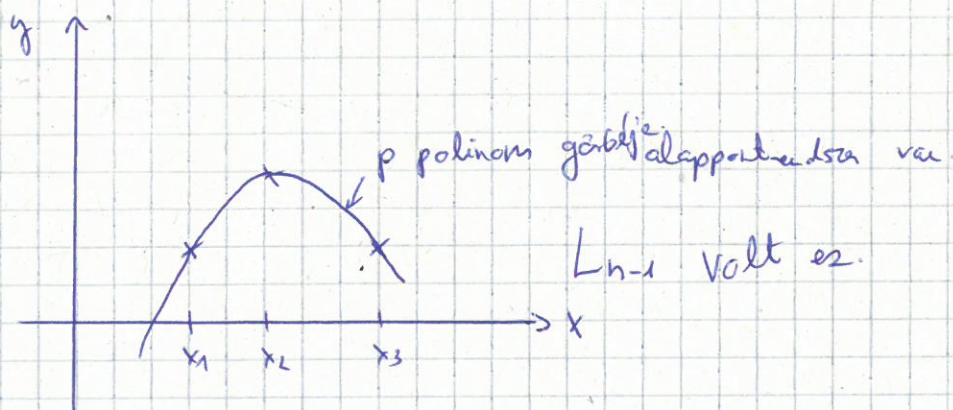


Hermite-integráció, LSM. Ez lesz ma.

↑ legkisebb négyzetek módszere ez.

Eddig:



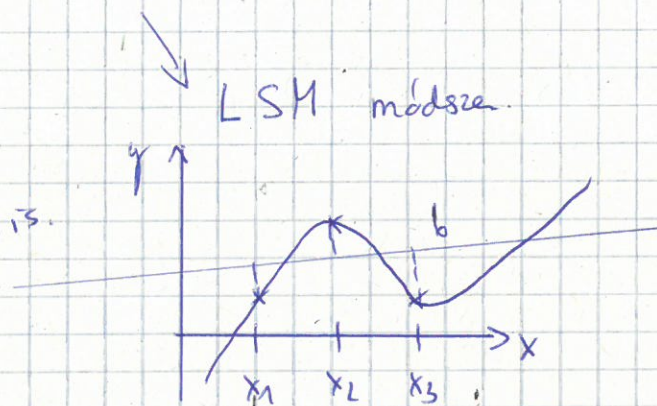
ez ilyen lesz.

Kell itt is egy p polinom, ami

a hirtelenséget kielégíti.

3 pont $\rightarrow$ 6 feltétel

Lesz egy legkisebb átmeneti polinom, ami fessz.



kell: szavak elsőfokú raki

Lehet, de $\forall$ pontban lesz

hiba, amit némi akarat

Távolság absz. értéke,

(négyzet) lesz értéke.

$$\min_{a_0, a_1} \left(\sum_{j=1}^n (f_j - l(x_j))^2 \right)$$

↑ $\forall$ alappontban.

↑ ezt kell minimalizálni

Alap: $p = m$

$m = n - 1$ esetén Lagrange-integ

lesz

Világos dolog ez.

(utolsó block: nem int. lesz, decembaren.)

Hermite - alapprobléma (homogén):

Elsőrendű is.

$$X = \{x_1, \dots, x_n\}$$

$$F = \{f_1, \dots, f_n\}$$

$$DF = \{df_1, \dots, df_n\}$$

$$f_j = f_j^{(0)} \text{ ugge. } (= f(x_j))$$

$$df_j = f_j^{(1)} = f'(x_j)$$

rendsz. adott.

$$\exists p \quad \forall_{1 \leq j \leq n} (p(x_j) = f_j \wedge p'(x_j) = df_j)$$

$\exists$ kell.

Homogén, mert $\forall x_j$ esetén ugyanazt info-tl rendelkezik.

TÉTEL: $\forall_{X, F, DF} \exists! p \in P_{2n-1} \quad \forall_{1 \leq j \leq n} p(x_j) = f_j \wedge p'(x_j) = df_j$

$|X| = |F| = |DF| = n$

Biz.: unicitás. $T \neq h \quad p_1, p_2$ és $\deg p_1 \leq 2n-1$
 $\deg p_2 \leq 2n-1$

Legyen $S = p_1 - p_2 \quad \forall_{1 \leq j \leq n} S(x_j) = 0 \wedge S'(x_j) = 0$

S - nek tehát multipliatívul $2n$ db gyöke van.

$$\Downarrow$$
$$S \equiv 0. \quad \square$$

egzisztencia:

Lagrange:

Hermite Alapprobléma:

$$\frac{p_{n1}, \dots, p_{nh}}{p_{n1+1}, \dots, p_{n2n+1}}$$

Kell: $\forall 1 \leq j, k \leq n$ $P_{hj}(x_{pk}) = \delta_{jk}$
 $\wedge h'_j(x_k) = 0$

$\forall 1 \leq j, k \leq n$ $P_{hntj}(x_k) = 0$
 $\wedge P'_{hntj}(x_k) = \delta_{j+k}$

$$H_{2n-1} = \sum_{j=1}^n f_j P_{hj} + d f_j P_{hntj} \quad \text{lesz}$$

Hogyan adódhat a konstrukciók?

2. k. Hermite - alappolinom konstrukció:

$P_{hnt1} : (x - x_1) \mid P_{hnt1}$

sőt:

$$(x - x_1)(x - x_2)^2 \dots (x - x_n)^2 \mid P_{hnt1}$$

$$\Rightarrow P_{hnt1} = \alpha (x - x_1)(x - x_2)^2 \dots (x - x_n)^2$$

α -t az utolsó interpolációs feltételből adható meg.

$$h'_{nt1}(x_1) = 1 \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{(x_1 - x_2)^2 \dots (x_1 - x_n)^2}$$

$$\alpha (x - x_1)(x - x_2)^2 \dots (x - x_n)^2 = \alpha \cdot \left[1 \left((x - x_2)^2 \dots (x - x_n)^2 \right) + \right. \\ \left. (x - x_1)^2 \cdot 2(x - x_2) \dots \right]$$

Megj.: $P_{hntj} = (x - x_j) \cdot l_j^2(x)$ így is meg lehet adni.

Pelda: $X = \{-1, 1\}$, $h_3 = ?$ A dián.

Az első tagokéias Hermite polinomiok konstruálása:

$$P_{h_1}: (X-X_2)^2 (X-X_3)^2 \dots (X-X_n)^2 \mid P_{h_n}$$

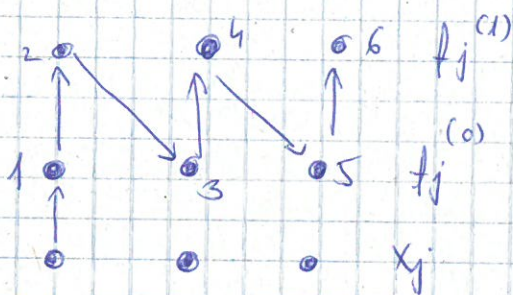
Kell:

$$P_{h_1}: (\alpha X + \beta) (X-X_2)^2 (X-X_3)^2 \dots (X-X_n)^2$$

α és β a követési feltételből számítható:

$$\begin{cases} h_1(X_1) = 1 \\ h_1'(X_1) = 0 \end{cases}$$

Kitüntetett alak:



$$1, (X-X_1)^1, (X-X_1)^2,$$

$$(X-X_1)^2 (X-X_2)^1, (X-X_1)^1 (X-X_2)^2,$$

$$(X-X_1)^1 (X-X_2)^2 (X-X_3), \dots, \quad \text{Ez lesz a bázis}$$

$$CF: c f_1, c f_2, \dots, c f_n.$$

Ostott differenciák: Ez a módszer jón.

Általánosított

séma

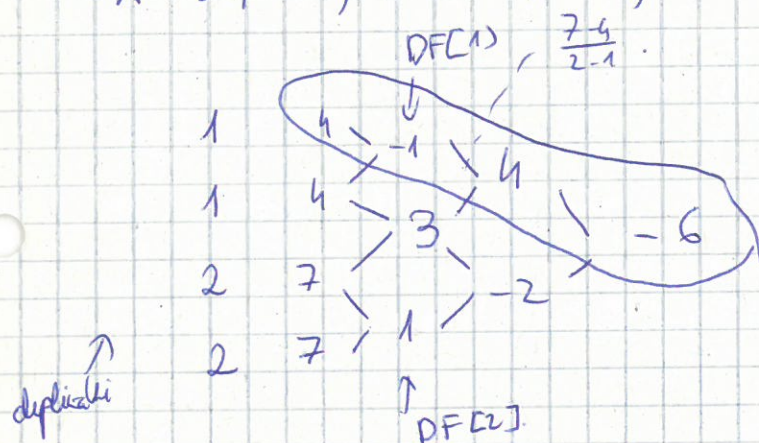
$$f[x_1, x_2] = \frac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1}$$

(n)

$$A \circ D[x_1, x_2] = f[x_1, x_2] = d f_1$$

$$\begin{array}{l} x_1 \circ f(x) \\ x_1 + \varepsilon \circ f(x + \varepsilon) \end{array} \rightarrow \frac{f(x_1 + \varepsilon) - f(x_1)}{\varepsilon}$$

$$X = \{1, 2\}, \quad F = \{4, 7\}, \quad DF = \{-1, 1\}$$



$$3 - (-1) = 4$$

$$H_3(x) = f[x_1] \cdot 1 + f[x_1, x_1] (x-x_1)^1 + f[x_1, x_1, x_2] (x-x_1)^2 + f[x_1, x_1, x_2, x_2] (x-x_1)^2 (x-x_2)^1$$

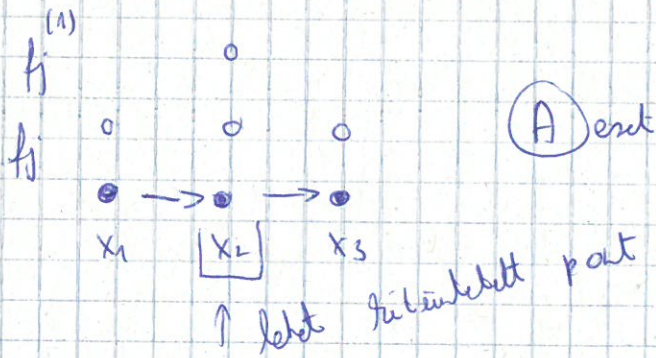
Igy lehet fel.

megszabott értéket ad

$$f[x_1, x_1, x_2] = \frac{f_1^{(2)}}{2!} = \frac{dd f_1}{2!}$$

Igy lehet konstruálni

Nem homogén:



x_2 f_2
 x_2 f_2 $\searrow$ df_2
 x_1 f_1
 x_3 f_3

algebrai:

$$(x-x_2), (x-x_2)^2, (x-x_2)^2(x-x_1)$$

(B) eset L_2 Lagrange bővítése

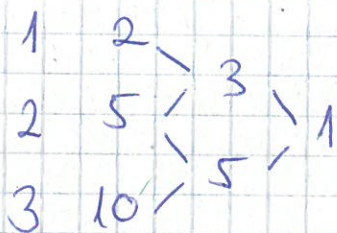
$$H_3 = f[x_2] \cdot 1 \dots$$

Példa

$$X = \{1, 2, 3\}$$

$$F = \{2, 5, 10\}$$

$$df_2 = 5$$



$$L_2(x) = 2 \cdot 1 + 3(x-1) + 1(x-1)(x-2)$$

$$H_3 = L_2(x) + K(x-1)(x-2)(x-3)$$

$$H_3(2) = 5 = 4 + K(x-1)(x-2)(x-3) \Big|_{x=2}$$

(6)

Maximális érték:

$$\begin{array}{ccccccc} 2 & 5 & 5 & & & & \\ 2 & 5 & & 2 & & & \\ & & +3 & & & & \\ 3 & 2 & 4 & 1 & & & \\ & 10 & & & & & \end{array} \quad -1$$

$$5 \cdot 1 + 5 \cdot (x-2) + 2(x-2)^2 + (-1)(x-2)^2(x-1)$$

Erősségi:

Vissza ide:

$$X = \{x_1, \dots, x_n\}$$

$$F = \{f_1, \dots, f_n\}$$

$$\deg p = m \quad (m < n) \quad \text{amelyre}$$

$$0 \leq \deg p \leq n-1$$

Cél:

$$G = G(a_0, a_1, \dots, a_n)$$

$$= \sum_{j=1}^n (f_j - p(x_j))^2$$

$$= \sum_{j=1}^n \left(f_j - \sum_{k=0}^m a_k x_j^k \right)^2$$

$$p = \sum_{j=0}^m a_j x^j$$

Kell: minimalizálása $a_0, a_1, \dots, a_{m-n}$

ilyen együtthatókra kell.

Tétel:

$$\forall \exists! \forall \sum_{j=1}^n (f_j - q(x_j))^2 \geq \sum_{j=1}^n (f_j - p(x_j))^2$$

Ez lesz

Példa:

$$X = \{1, 2, 3\}, \quad F = \{2, 5, 10\}$$

$$m=1$$

$$G(a_0, a_1) = a_0 + a_1 x$$

②

$$G(a_0, a_1) = (a_0 + a_1 - 2)^2 + (a_0 + 2a_1 - 5)^2 + (a_0 + 3a_1 - 10)^2$$

Megoldás:

$$\nabla G = 0, \text{ azaz}$$

$$\frac{\partial G}{\partial a_0} = 0 \quad \wedge \quad \frac{\partial G}{\partial a_1} = 0.$$



$$2 \left((a_0 + a_1 - 2) + (a_0 + 2a_1 - 5) + (a_0 + 3a_1 - 10) \right)$$

$$= 2 (3a_0 + a_1 \cdot 6)$$

Lineáris egyenletrendszer lesz. Ami megoldható.

Normálegyenletből rendszer lesz és

$$S_L = \sum_{j=1}^n x_j^L$$

$$M_L = \sum_{j=1}^n f_j x_j^L$$

$$\begin{pmatrix} S_0 & S_1 \\ S_1 & S_2 \end{pmatrix} \begin{vmatrix} m_0 \\ m_1 \end{vmatrix}$$

↑
Crana-szabály
szelvények

$$\begin{pmatrix} S_0 S_1 \dots S_m & m_0 \\ S_1 S_2 \dots S_m & m_1 \\ \vdots & \vdots \\ S_m & m_m \end{pmatrix}$$

Ilyenkor lesznek

$$f \cdot g = \sum_{j=1}^n f(x_j) g(x_j)$$

ortogonalitás van, ha a bds³ szorzat
eltér nulla

$$p = \sum_{j=1}^m a_j q_j$$

q_j - mi ez?

$q_0, q_1, \dots, q_m$ - ortogonális
bázis.

$\deg q_j = j$. Es lesz igaz.

propozíció:

$$\forall 0 \leq m \leq n-1$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, |x| = n$$

ortogonális
polinomrendszer

Gramm-Schmidt:

$$x^l + \sum_{j=0}^{l-1} \lambda_j a_j$$

$$\lambda_j = \frac{-\langle x^l, q_j \rangle}{\langle q_j, q_j \rangle}$$

$$X = \{1, 2, 3\}$$

$$\{q_0 = 1, q_1 = x - 2\}$$

↑ megsejték.

$$q_0 q_1 = 1 \cdot (1-2) + 1 \cdot (2-2) + 1 \cdot (3-2) = 0 \checkmark$$

$$q_2 = ?$$

$$\lambda_0 = \frac{-14}{3}$$

$$\lambda_1 = \frac{-8}{2}$$

$$a_j = \frac{\langle f, q_j \rangle}{\langle q_j, q_j \rangle}$$

$$p_1^* = 4x - \frac{7}{3}$$

$$X = \{1, 2, 3\}$$

$$q_0 = 1$$

$$q_1 = x - 2$$

$$p_1^* = a_1 q_1 + a_0 q_0$$

$$a_1 = \frac{\langle f, q_1 \rangle}{\langle q_1, q_1 \rangle} = \frac{8}{2} = 4$$

$$a_0 = \frac{\langle f, q_0 \rangle}{\langle q_0, q_0 \rangle} = \frac{17}{3}$$

