

$F(x) = G(x)$ egyenlet megoldása.



$$(F - G)(x) = 0.$$

$f(x) = 0$ alakot fogjuk vizsgálni.

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Két feltétel: $\left. \begin{array}{l} - f \text{ folytonos} \\ - f \text{ differenciálható} \end{array} \right\}$

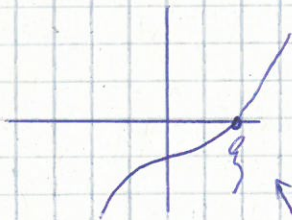
Newton-Raphson-iteráció: feltétele a differenciálhatóság.

$x = \varphi(x)$ alak. φ fix pontja adja a megoldást.

pl. $-\frac{1}{2}x + 2 = x$

$$2 = x + \frac{1}{2}x = \frac{3}{2}x$$

$$x = \frac{4}{3} \text{ lesz.}$$



↑ lehetőleg $\{$ konvergenciából indulunk, az a sikeresebb.

A konvergencia független attól, hogy honnan indulunk.

↕
globálisan konvergens a módszer.

Korlátok: polinomok esetén

$$p = x^3 - 3x^2 - 4x + 12$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -12 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

↑
a diagonális alatt
számpárok
az egészek.

Kísérő ucc az.

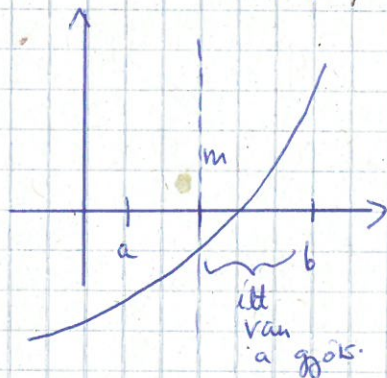
↑
oszlopba pakoljuk az együlthetős
additív inverzét.

Kivéve a főpolinomot,
az azaz 1,

A sajátértékei p gyökei lesznek. (Gersgajn!) vagy éppen tesztel.

Newton - Rapsch - iteráció lesz. De előbb még:

Intervallum felzés módszere folgt függvényekre.



A folytonos függvény
Darboux-teljesítménye.
Ez működik.

Ami kell: ① $\text{sign } f(a) \cdot \text{sign } f(b) = -1$ negatív lesz

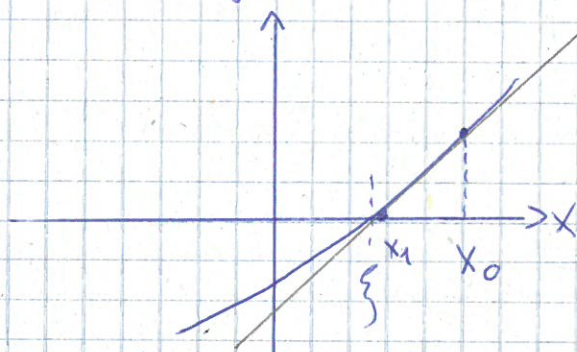
② $\text{sign } f(a) \cdot \text{sign } f(m) = 1$ lesz $\Rightarrow$ előbbható.

$\text{sign } f(m) \cdot \text{sign } f(b) = -1 \Rightarrow$ ez kell.

Tök logikus és egyszerű módszer ez.

Newton - Rapsch - iteráció

Kell: differenciálhatóság. (+ még léteznek magasabb rendű deriváltak is.)



érintő egyenest
konstruálunk x_0 -ban.

$$y = m(x - x_0) + y_0$$

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$$

$\uparrow f(x_0)$

$$0 = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$$-f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

$$x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x = x_1 \quad \text{ahol metszi az x egyenest.}$$

x_1 -ből x_2 úgyanúgy konstruálható.

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

Általánosítva: x_0 legyen rögzített.

$$x_m = x_{m-1} - \frac{f(x_{m-1})}{f'(x_{m-1})} \quad m > 0.$$

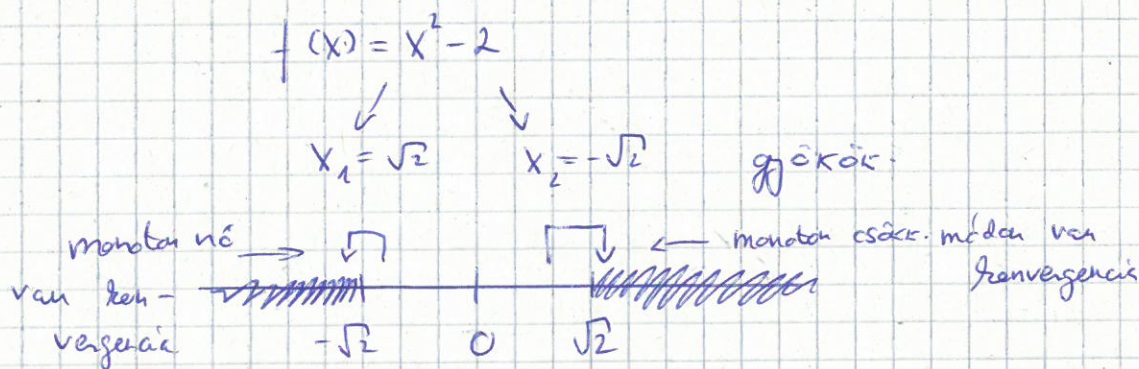
Az x -ek sorozatának létezik határértéke, ami ξ .

$$\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

↑ iterációs függvény

Elegendő jó ennek a konvergenciája.

Mi legyen a kezdőobjektum? Hogyan függ a konvergencia x_0 megválasztásától?



0 körülete körül mindig konvergencia van

Definíció: em legyen az m -edik iterált és a közelítő gyök eltérése:

$$e_m = x_m - \xi$$

Kell, hogy a hibasorozat konvergens legyen.

$$e_m \sim e_{m-1}^2$$

Tétel: Legyen f 2x diffható. ξ legyen egy izolált egyszeres gyök.

$\exists x_{m-1}$ (x_{m-1} és ξ között)

$$e_m = \frac{f''(x_{m-1})}{2 f'(x_{m-1})} e_{m-1}^2 \quad (e_m \sim \dot{e}_{m-1})$$

(Biz.)

$$x_m = x_{m-1} - \frac{f(x_{m-1})}{f'(x_{m-1})}$$

$$(x_m - x_{m-1}) f'(x_{m-1}) = -f(x_{m-1})$$

$$f(x_{m-1}) + (x_m - x_{m-1}) f'(x_{m-1}) = 0 \quad (1) \quad \text{ell.}$$

$$f(x) = f(x_{m-1}) + f'(x_{m-1})(x - x_{m-1}) + \frac{f''(x_{m-1})}{2!} (x - x_{m-1})^2$$

$$0 = f(\xi) = f(x_{m-1}) + f'(x_{m-1})(\xi - x_{m-1}) + \frac{f''(x_{m-1})}{2!} e_{m-1}^2 \quad (2)$$

Ki kell vonni: (1) - (2)

$$(1) - (2): \quad x_m f'(x_{m-1}) - f'(x_{m-1})\xi - \frac{f''(x_{m-1})}{2!} e_{m-1}^2$$

$$f'(x_{m-1}) \underbrace{(x_m - \xi)}_{e_m} - \frac{f''(x_{m-1})}{2!} e_{m-1}^2 \quad \text{!gg}$$

$$e_m = \frac{f''(x_{m-1})}{2 f'(x_{m-1})} e_{m-1}^2 \quad (3)$$

$$|e_1| = \left| \frac{f''(x_0)}{2 f'(x_0)} e_0 \right| \leq q \cdot e_0^2 = \frac{1}{q} (q e_0)^2$$

gyors a konvergencia.

Waggon.

Tétel: Fourier, monoton konvergencia elegendő feltétele.

(a) ξ egyszerű zérushely, f 2x diff, $\xi < x_0$ és (ξ, x_0) -on

~~###~~ $f'f'' > 0$.

Ekkor $x_m \searrow \xi$.

(b) Ha $f'f'' < 0$, akkor $x_m \nearrow \xi$.

(x_0, ξ) -on.

ennyi plusz volt még.

$$x - \frac{x^2 - a}{2x} = \frac{1}{2} \left(2x - \frac{x^2 - a}{x} \right) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{a}{x} \right)$$

a négyzetgyökvonáshoz

Numerikus hatékonyság:

Ha f'' folyt. ξ -ben, $f'(\xi) \neq 0$ és az NR-iteráció konvergens,

akkor $\lim_m \frac{e_m}{e_{m-1}} = \frac{f''(\xi)}{2f'(\xi)}$

$\sqrt[3]{2}$ a num. hatékonyság: itt NR-esetben $\sqrt[3]{2}$. ■

$$\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - (f'(x))^{-1} \cdot f(x)$$

$$\phi(\underline{x}) = \underline{x} - (\underline{F}(\underline{x}))^{-1} \underline{F}(\underline{x}) \quad \text{többváltozós eset. } \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

↑
Jacobi-mátrix.

$$\underline{F}(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix}$$

ennyi még volt még.

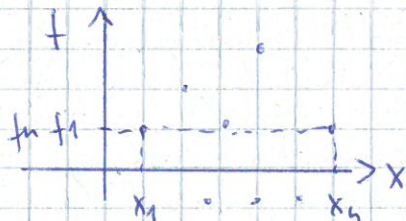
Függvények közelítése:

Lagrange - interpoláció.

$X = \{x_1, \dots, x_n\}$ adott.

alappontrendszer, kell: $x_j \neq x_k \quad \forall j \neq k$ esetre.

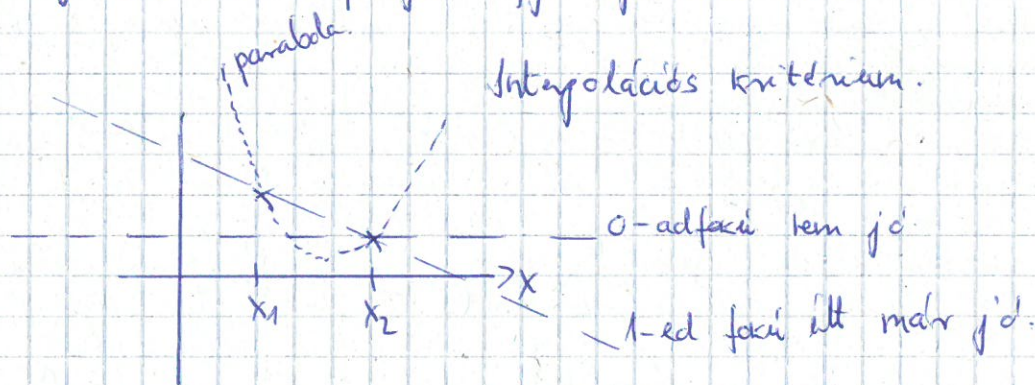
$f = \{f_1, \dots, f_n\}$ függvényértékek.



az adott pontokba nem engedünk hibát.

Közölés nem tudjuk.

Feladat: $\forall j$ indexre $p(x_j) = f_j$ polinom kell.



Existencia és unicitás tétele: Mindig tudunk megoldást adni.

$$\forall_{x, f} \exists_{p \in P_{n-1}} \forall_{1 \leq j \leq n} p(x_j) = f_j.$$

$|X| = |f|$ $\uparrow$ $(n-1)$ fokú polinomok (legfeljebb).

válasz egzakt.

egy határozatlanság.

Ezt mondjuk be.

$$p(x) = L_{n-1}(x)$$

$\uparrow$ legfeljebb $(n-1)$ fokú polinom.

Lagrange - miatt

L_{n-1} a Lagrange-interpolációs polinom.

Biz.: (unicitás)

$$p_1, p_2: \begin{array}{l} \deg p_1 \leq n-1 \\ \deg p_2 \leq n-1 \end{array} \quad \forall \quad p_1(x_j) = p_2(x_j) = f_j: 1 \leq j \leq n$$

legyen $S(x) = p_1(x) - p_2(x) = (p_1 - p_2)(x)$.

S -nek $x_1, x_2, \dots, x_n$ is gyöke.

$\deg S \leq n-1$ ezt is tudjuk.

alg. alaptétel:
 $S(x) \equiv 0$.

Biz.: (egzisztencia)

$$F = \{f_1, \dots, f_n\} = \{1, 0, \dots, 0\}.$$

l_1
 $\uparrow$
bázispolinom.

emelt: $(x-x_2)(x-x_3)\dots(x-x_n) \mid l_1$

Szükségképpen: $l_1(x) = \alpha (x-x_2)(x-x_3)\dots(x-x_n)$

Ha $l_1(x_1) = 1 \Rightarrow 1 = l_1(x_1) = \alpha (x_1-x_2)\dots(x_1-x_n)$

$$\alpha = \frac{1}{(x_1-x_2)\dots(x_1-x_n)}$$

így adódik.

Így néz ki a fundamentális polinom

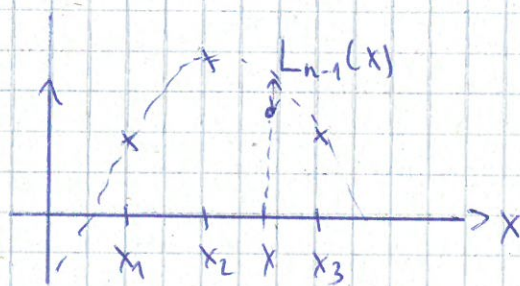
$l_j \leftarrow j$ -edik Lagrange-féle fundamentális polinom.

$$\forall j, k \quad l_j(x_k) = \delta_{jk}$$

↑
Kronecker - delta.

$$l_j = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \frac{(x - x_k)}{(x_j - x_k)} \quad \text{ugye.}$$

$$L_{n-1}(x) = \sum_j f_j l_j(x) \quad \text{így áll össze}$$



kompakt
intervallum
interpoláció

← →
extrapoláció

Képlet hiba:

$$f(x) - L_{n-1}(x) = \frac{w_n(x)}{n!} f^{(n)}(\xi)$$

ahol $w_n(x) = \prod_k (x - x_k)$ lesz.

$$a = \min[x_1, \dots, x_n]$$

$$b = \max[x_1, \dots, x_n]$$

Örökített hiba is vizsgálható.

$$\forall_j |f_j - f_j^*| < \varepsilon \Rightarrow |L - L^*| \leq \varepsilon \sum |l_j|.$$