

2018. 10. 05.

3. konzultáció

Nummat.

Sajátérték- feladatokkal megintz tovább.

$$A \in \mathbb{C}^{n \times n}$$

$$Ax = \lambda x, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}.$$

$$\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$$

$$x \mapsto y = Ax \quad \text{leképezés (lineáris).}$$

$$(A - \lambda I_n)x = 0 \quad \text{nemtriviális megoldás kell.}$$

ennek singulárisnak kell lennie $\underline{x} = \underline{0}$ nem érdek, az triviális megoldás.

Nemtriviális megoldás: $|A - \lambda I_n| = 0$ kell. ALGEBRAI EGYENLET

Innen indulunk ki. Mi lehet itt az új?

1.) sajátértékek elhelyezkedése a komplex síkon.

"lefedés" / "tartalmazási probléma"

Sajátértékek abszolútértékének becslése.

$$r \leq |\lambda| \leq K \quad \text{szorítsuk be.}$$

2.) 1 vagy az összes sajátérték ε -pontossággal reálitén (esetlegesen...)

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{adott.}$$

$$|A - \lambda I_n| = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -1 \\ 6 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(5-\lambda) + 6 = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0.$$

A karakterisztikus polinomja.

Ennek a gyökei kellnek.

$$\lambda_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2} \rightarrow \frac{5+1}{2} = \underline{3} = \lambda_1$$

$$\downarrow \frac{5-1}{2} = \underline{2} = \lambda_2$$

Ennyi, ismét a setai eddig.

$$\lambda_1 = 3, \text{ erre: } \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ 6 & -3 & 0 \end{array} \right) \text{ adódik.}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} S_2 \leftarrow S_2 - 3 \cdot S_1 \end{array} \right.$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$2x_1 - x_2 = 0$$

$$\left(\begin{array}{c} 1/2 \\ 1 \end{array} \right) \text{ lesz.}$$

Ennyi volt a bevezetés.

Hasonlóság: $A \sim B : B = X^{-1}AX$

↑
equivaleciatranszformáció.

A és B λ -i negyezzek

Schur-tétel: Vannak spec. mátrixok, ahd λ és x speci.

pl.: Hermite-simm. mátrixok

Hol helyezkednek el a λ -k?

Teljesen kör alakú. Gerschgorin-körök!

$$D_j = \left\{ z \mid z \in \mathbb{C} \mid |z - a_{jj}| < \sum_{k \neq j} |a_{jk}| \right\}$$

②

mi ez?

$$D_j = \left\{ z \mid_{z \in \mathbb{C}} : |z - a_{jj}| \leq \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n |g_{jk}| \right\}$$

↑ ↑

disk ellipses

$j = 1, 2, \dots, n.$

$j \rightarrow (-\rightarrow \times \rightarrow)$
e2 loss

disk

eltnes

$$j = 1, 2, \dots, n. \quad j \rightarrow \begin{pmatrix} \rightarrow & \times & \rightarrow \\ e_2 & \text{loss} \end{pmatrix}$$

e2 les.

E_2 elég bizonyos hányas...

Áll.: Ha $\lambda \in A$ teljes. sajátértéke, akkor $\lambda \in D = \bigcup_{j=1}^n D_j$.

Gesamte Kerkapax unitj'abon losmet a x-2.

Ez arra jó, hogy λ max. absz. értéke adható felső becslés.
(alsót is lehet adni...)

Bizonyitsent!

Legzen $\times$ tetse. sej. dt. A - noz.

Kijelölök egy x hozzátartozó szög: v. -t. ($x \neq 0$).

Vertikornorma: $\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}_0^+$

$$\text{Kern}(X) = \|X\| \Leftrightarrow X = 0$$

$$\|x\| = \cancel{1} \cdot \|x\|$$

$$\|X\|_{\infty} = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|.$$

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

$$\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p \right)^{1/p}$$

Tehtä $\|x\|_\infty \neq 0$. Matriisien inv.

Leggen valasitva egy j index, melyre $|x_j| = \|x\|_\infty$.

$$a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \dots + (a_{jj} - \lambda)x_j + \dots + a_{jn}x_n = 0.$$

$$a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \dots + a_{jn}x_n = -(a_{jj} - \lambda)x_j$$

$$|(a_{ij} - x)| |x_j| \leq |a_{j1}| |x_1| + \dots + |a_{jn}| |x_n|.$$

③

$$|\lambda - a_{jj}| \leq |a_{j1}| \frac{|x_1|}{|x_j|} + |a_{j2}| \frac{|x_2|}{|x_j|} + \dots + |a_{jn}| \frac{|x_n|}{|x_j|}$$

$$\leq |a_{j1}| + |a_{j2}| + \dots + |a_{jn}| \quad \text{mivel } \frac{|x_k|}{|x_j|} \leq 1$$

KÖVETKEZMÉNY: (Gerschwin - tétel "soros" változatának következménye)
NEM POLITIKA!

Legyen λ tetsz. sajátérték A -nak. Ekkor:

$$\min_{1 \leq j \leq n} \left(|a_{jj}| - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n |a_{jk}| \right) \leq |\lambda| \leq \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{k=1}^n |a_{jk}|$$

↑ nem mindig 0 vagy pozitív.

Megjegyzés: Mivel A^T és A sajátértékei megegyeznek, így a Gerschwin-tételből létezik oszlopos változata is

$$\min_{1 \leq k \leq n} \left(|a_{kk}| - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n |a_{jk}| \right) \leq |\lambda| \leq \max_{1 \leq k \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{jk}|$$

2.) Anna mind his idő.

Példa: 3

$\boxed{\sqrt{36}-6}$
 $3\sqrt{2}-3$
 ez a min.

$\xleftarrow{SA} \quad A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & i \\ 3+4i & 2+i & -1 \\ -1 & -2i & 3-3i \end{pmatrix} \quad \xrightarrow{SF}$

legyen $\boxed{5+1+\sqrt{50}}$
 $3+3\sqrt{2}$
 12 $\sqrt{50}+1$ $3\sqrt{2}+1$
 ez vált a felső

$|6| + |1+2i| + |i| = 9$
 ez a legnagyobb!

22
 $13,07$

Hogyan közelítsünk? $R^H R$ iteráció

Iterációs módszer jött.

Függvényt alkalmazunk egy definícióra: $f: X \rightarrow X$

Csak pozitív definit mátrixra érvényes. (Hátsó-szimm. és $\forall \lambda \text{ poz.}$).

$$\forall X \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\} \quad X^H A X > 0 \text{ fennáll.$$

$$A^{(0)} = A \quad A^{(0)}, A^{(1)}, A^{(2)}, \dots$$

$$A^{(1)} = \Phi(A^{(0)})$$

$\uparrow$ vmit csináltunk vele.

Cholesky-felb.: $A^{(0)} = R_0^H R_0$ Kanonikus felbontás

$$\rightarrow A^{(1)} = R_0 R_0^H$$

ők
használt
mátrixok
lesnek.

$$A^{(0)} \sim A^{(1)}$$

$$A^{(m)} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} D \leftarrow \begin{array}{l} \text{az egy diagonális} \\ \text{mátrix lesz} \end{array}$$

ezért fasza ez!

ez az iteratív módszer

Addig itatunk, amíg az offdiagonális elemek kicsi lesznek.

Ekkor λ -t a diagonálból levesszük

