

2013. 09. 29.

2. Konzultáció

Num. mat

Gyakorlatcsoportos blokk lesz ma.

$$A = L \cdot R \text{ volt.}$$

mikor $\exists$?

Nincs karakterizációs tétel.

mikor $\nexists$?

Áll: Ha A nonsinguláris $\Rightarrow$ legfeljebb 1 LR-felbontása van.

Biz: $A = L_1 R_1 = L_2 R_2$

$$|A| = |L_1 R_1| = |L_1| \cdot |R_1| = |L_2| \cdot |R_2| = |L_2 R_2|$$

$$L_1 R_1 = L_2 R_2 \quad / L_1^{-1}$$

$$R_1 = L_1^{-1} L_2 R_2 \quad / R_2^{-1}$$

$$\underbrace{R_1 R_2^{-1}} = \underbrace{L_1^{-1} L_2}$$

Felső-
trianguláris

alsó
egységtrianguláris

csak egységdiagonálisok lehetnek ezek.

$$R_1 R_2^{-1} = I_n \Rightarrow R_1 = R_2 \text{ és } L_1 = L_2. \quad \square$$

Áll:

$$\forall 1 \leq j \leq n-1$$

$$m_j \neq 0 \Rightarrow \exists \text{ LR-felbontás } A\text{-nak, melyre}$$

$\uparrow$
a det. lehet
zéró.

$$r_{jj} = \frac{m_j}{m_{j-1}}$$

$\uparrow$
diagonális elem

Biz:

teljes indukcióval.

$$(a_{ii}) = (1) (a_{ii})$$

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_{n-1} & a \\ \hline b^T & a_{nn} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} L_{n-1} & 0 \\ \hline y^T & 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} R_{n-1} & x \\ \hline 0 & r_{nn} \end{array} \right)$$

$$A_{n-1} = L_{n-1} R_{n-1}$$

①

Más felbontás:

$$\left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array} \right)$$

azonos blokkok

gyanítható az egyes blokkok más magra
bármilyen műveletével.

(PÁRHUZAMOSÍTÁS).

$$L_{n-1}x = a \quad \text{fell.} \quad \text{nagyjából ennyi.} \quad \blacksquare$$

$$(3a) \quad S_j \leftarrow S_j - \lambda S_k, \quad \lambda \in \mathbb{C}, j \neq k.$$

Sorátalakítás (elemi átváltás).

ELIMINÁCIÓ MÁTRIX

(2a) Sorcsere

$$S_j \leftrightarrow S_k \\ j \neq k$$

(1a) soromax

$$S_j \leftarrow \lambda S_j \quad (\lambda \neq 0).$$

normálómátrix

Elemi permutálómátrix.

$$P_{j,k} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

ilyen lesz.

$$N_{\alpha, j} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$$

(22)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -4 & 5 & -1 \\ -3 & 2 & 1 & 1 \\ 6 & 8 & -1 & 35 \end{array} \right)$$

$$M_1 = 3 \neq 0$$

$$M_2 = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 12 = -6 \neq 0.$$

$$M_3 = ?$$

$$|A| = M_3 = 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 8 & -1 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} + 5 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot (-2 - 8) + 4 \cdot (-3) + 5 \cdot (-36) = -222 \neq 0.$$

$$\begin{array}{c} -10 \\ -30 \end{array}$$

$$-12$$

(2)

működik tehát az alapalgoritmus.

Kell: $\begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ 0 & r_{22} & r_{23} \\ 0 & 0 & r_{33} \end{vmatrix} = r_{11} \cdot r_{22} \cdot r_{33}$ lesz.

lehetne triangulizálni

$$\begin{vmatrix} 3 & -4 & 5 \\ -3 & 2 & 1 \\ 6 & 8 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{+6 \cdot R_1 \\ -3 \cdot R_1}} \begin{vmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 8 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{-R_1} \begin{vmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & -1 \end{vmatrix}$$

$$O_1 \leftarrow O_1 + 6 O_3$$

$$O_1 \leftarrow O_1 - 3 \cdot O_3$$

itt hibás az első lépés

$$O_1 \leftarrow O_1 + 3 O_3$$

||

$$\begin{vmatrix} 18 & -4 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \\ -3 & 8 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{+3 \cdot R_2} \begin{vmatrix} 18 & -4 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 8 & -1 \end{vmatrix}$$

$$O_1 \leftarrow O_1 - 3 O_3$$

vagy 1) $O_2 \leftarrow O_2 + 8 O_3$;

2) $O_1 \leftarrow O_1 + 6 O_3$;

3) $O_1 \leftarrow O_1 - \frac{3}{10} O_2$

ennyi, ellenőrizhető.

(Táblán tartott)

vége: $\begin{vmatrix} \frac{111}{5} & 36 & 5 \\ 0 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \frac{111}{5} \cdot 10 \cdot (-1) = \underline{\underline{-222}}$ ennyire.

ezzel dolgozunk, nem a ziffigéssel.

PROJEKTJAVASLAT-LISTA KIDOLGOZHATÓ. (dec. 1.).

dolgozatban: (A1a) - val kell dolgozni.

Heg kell adni az alap algoritmus matrixot is!!!

A₂ additív inverzét keressük be oda, ugye.

felelő esetben: $N_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ elvileg.

$$N_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

a végén: ~~$N_1 \cdot N_2$~~ össze kell őket szorozni
 $N_2 \cdot N_1$ lesz.

Megoldásvértes:

$$37x_3 = 37 \Rightarrow \underline{\underline{x_3 = 1}}$$

$$-2x_2 + 6x_3 = 0$$

$$-2x_2 = -6$$

$$\underline{\underline{x_2 = 3}}$$

$$3x_1 - 12 + 5 = -1$$

-7

$$3x_1 = 6 \Rightarrow \underline{\underline{x_1 = 2}}$$

$$X = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ lesz}$$

Mi van, ha a főminorok vndyike 0?

$$M_1 \neq 0, M_2 = 4 - 4 = 0.$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 8 & 9 \\ -6 & 3 & -7 & 9,5 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 4 \\ -6 & 3 & -7 & 9,5 \\ 2 & 4 & 8 & 9 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & 15 & 23 & 33,5 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right)$$

$$S_2 \leftrightarrow S_3$$

$$M_1 \neq 0$$

$$M_2 = 3 + 12 = 15 \checkmark$$

$$M_3 = ?$$

$$S_2 \leftarrow S_2 + 6S_1$$

$$S_3 \leftarrow S_3 - 2S_1$$

$$x_3 = \frac{1}{-2} = \underline{\underline{-\frac{1}{2}}} \text{ ATD.}$$

Ⓜ

$$15x_2 - \frac{23}{2} = 33,5$$

$$x_2 = \frac{33,5 + \frac{23}{2}}{15} = \underline{\underline{3}}$$

$$x_1 + 6 - 2,5 = 4$$

$$x_1 = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 3 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

ennyi a megoldásvektor.

Példa: Jordan-elimináció (is lehet).

$$(a) \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$E > U$ eliminálj előbb;
normálj utóbb.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2/3 & -4/3 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & 3 & -3/2 \\ 0 & 2/3 & -4/3 & 1 \end{array} \right) \sim$$

$$S_2 \leftarrow S_2 + (-4/3)S_1$$

$$S_1 \leftarrow S_1 - \frac{3}{2}S_2$$

$$S_1 \leftarrow S_1/3$$

$$S_2 \leftarrow S_2 \cdot \frac{3}{2}$$

NORMÁLÓ
LEPÉS

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & -2 & 3/2 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{U > E} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \dots \text{atd}^v$$

$$S_1 \leftarrow S_1 \cdot \frac{1}{3}$$

$$S_2 \leftarrow S_2 - 4S_1$$

LR felbontás alkalmazása

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 14 \\ 2 & 6 & 13 \end{pmatrix}; \quad a = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 4 & 16 & 0 & 0 \\ 3 & 8 & 14 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 13 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 \\ 3 & 8 & 14 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 13 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 4 & 1a & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$\uparrow$
 $M_1 \neq 0$
 $M_2 \neq 0 \Rightarrow$ van LR!

$$1a: \quad 1 \quad 2 \quad 4$$

lesz.

$$l_{21} \cdot 1 = 3$$

$$6 + r_{22} = 8$$

$$l_{31} \cdot 1 = 2$$

$$r_{22} = 2$$

ATD.

5.

Tehát van L és van R .

$$Ax = a$$

$$\underbrace{L(Rx)}_y = a$$

1) $\boxed{Ly = a}$

ezek a lépések

2) $\boxed{Rx = y}$

Példa

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$y_1 = 4$$

$$y_2 = -10$$

$$y_3 = 3$$

$$y = \begin{pmatrix} 4 \\ -10 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & -10 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array} \right)$$

$$2x_2 + 2 = -10 \Leftrightarrow x_2 = \frac{-10-2}{2} = \underline{\underline{-6}}$$

$$x_3 = 1$$

$$x_1 - 12 + 4 = 4$$

$$x_1 = \underline{\underline{12}}$$

$$x = \begin{pmatrix} 12 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ezt jó az LU-dekompozíció.

TÉTEL: (Hermité-szimmetrikus) $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ mátrixnak van

Cholesky-felbontása

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \quad \text{transzpozit}$$

$$(AB)^H = B^H A^H$$

$\Downarrow$
 A pozitív szemidefinit.

$$A = R^H R \rightarrow \text{FELSO-D}$$

$$A^H = (R^H R)^H = R^H (R^H)^H = R^H R = A$$

(6)

$$x^H A x = x^H (R^H R) x = (x^H R^H) (R x) = (R x)^H R x.$$

↑ ist is R lehet elírni

$$y^T y = \sum_j y_j^2 \quad \text{lesz. } > 0$$

biztosan.

POSITÍV SLEHIDEFÍNIT.

