

minor fogalma:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cc}
 j_1 & j_2 \\
 \downarrow & \downarrow
 \end{array} \\
 \begin{array}{c}
 i_1 \rightarrow \\
 i_2 \rightarrow
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \boxed{\begin{array}{cc}
 a_{11} & a_{12} \\
 a_{21} & a_{22}
 \end{array}} \dots \\
 \vdots \\
 a_{n1} \quad a_{n2}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 a_{1n} \\
 a_{2n} \\
 \vdots \\
 a_{nn}
 \end{array}
 \end{array}$$

másodrendű minor es.

$$A_2 \quad H_0 := 1, \quad H_1 = |a_{11}|, \quad H_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \dots$$

$$H_n = \det(A) = |A|.$$

minorsant a bal felső főminorsorozat

$$M_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} \\ a_{21} & \dots & a_{2j} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \dots & a_{jj} \end{vmatrix} \text{ lesz.}$$

Tfh: A olyan, hogy az összes bal felső főminor nemzérő.

Eljárás: GAUSS-ELIMINÁCIÓ.

$$\forall M_j \neq 0, \quad 1 \leq j \leq n$$

a) elimináció: $(A|a) \sim \dots \sim (R|b)$

b) visszahelyettesítés

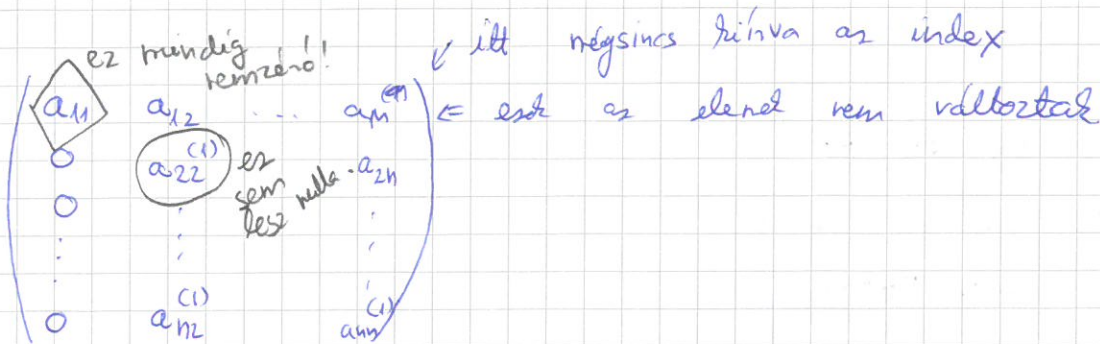
vagy U (upper triangular).

↑ ez mit jelent?

A megoldástérmet azonosítani kell lehet.

$$S_j \leftarrow S_j - \lambda S_k \text{ sorvelet végrehajtható.} \\ (j \neq k).$$

Ez világos.



a) fávást $n-1$ részlépésre osztjuk.

1. lépésben

$$l_{ji} = \frac{a_{ji}}{a_{ii}}$$

$j=2, \dots, n.$

$$(A|a) = \begin{pmatrix} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & \dots & a_{1n}^{(0)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}^{(0)} & \dots & \dots & a_{nn}^{(0)} \end{pmatrix}$$

$S_j \leftarrow S_j - l_{ji} S_1$ lépést kell megtenni.

Ez lista sor, így nullázódhat.

$$S_2 \leftarrow S_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} S_1$$

$$a_{22}^{(1)} = a_{22}^{(0)} - \frac{a_{21}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} a_{12}^{(0)} =$$

↓ a $\hat{F}_{21}$ művelet.

$$= \frac{a_{22}^{(0)} a_{11}^{(0)} - a_{21}^{(0)} a_{12}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} \quad \parallel \frac{M_2}{M_1}$$

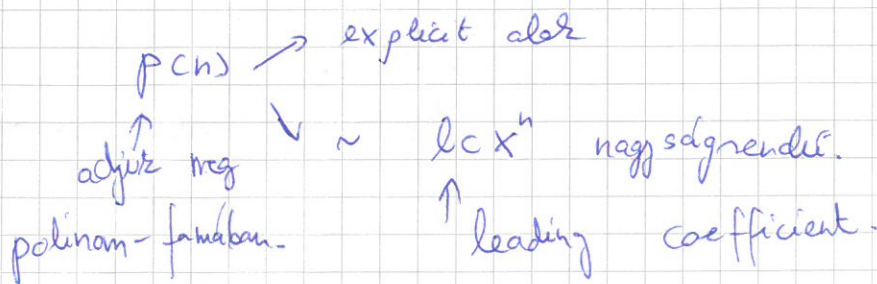
"Triangulálás" ilyen lépésekkel.

ELEMENKIVÁLENS SORÁTALAKÍTÁS EZ.

$$a_{jj}^{(j-1)} = \frac{M_j}{M_{j-1}} \text{ lesz igaz! MINPIG.}$$

Hatékonyság? Lépések (műveletek) számával mérhető.

Hogyan nő a mátrix növekedésével?



$$\left(\begin{array}{cccc|c} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{1n} & b_1 \\ 0 & u_{22} & u_{23} & u_{2n} & b_2 \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{3n} & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & u_{nn} & b_n \end{array} \right)$$

műveletigény:

	+	-	*	/
1.	0	3	3	1
2.	0	2	2	1
3.	0	1	0	1
4.	0	0	0	1

$$2 \cdot \sum_{j=0}^{n-1} j = \frac{2(n-1)n}{2} = n(n-1)$$

$$n + n(n-1) = \underline{n^2} \quad \text{négyzetes műveletigény}$$

GAUSS-ELIMINÁCIÓ

ÁLTALÁNOSÍTÁSA (KÓPOSÍTÁSA)

(Az egyértelmű megoldás). tf. hogy $M_n = |A| \neq 0$.

Az a) fázis ~~fel~~ j -edik lépésben ($1 \leq j \leq n-1$)

ha $a_{jj} = 0$ ($= M_j$) akkor használjuk a $S_j \leftrightarrow S_k$
($j \neq k$) csereket, ahol $j < k \leq n$.

Heggyezés: nemerikus j -edik lépésben:

$$\begin{array}{c} a_{jj}^{(j-1)} = 0 \\ \vdots \\ a_{j+1,j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{array}$$

ebból válogatunk
nagyit a nagy absz. -
értékű?

De többszörösen és
felvihető.

Tétel: $(\forall j) (M_j \neq 0) \Rightarrow A$ -nak van LU-felbontása.

Triangulizáció műveletigénye:

All: A Gauss-elimináció műveletigénye:

$$\sim \frac{2}{3} n^3.$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}^{(0)} & \dots & a_{1n}^{(0)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

↑
zérusérték

$$l_{ji} = \frac{a_{ji}^{(0)}}{a_{ii}^{(0)}} \quad \text{így kell számolni.}$$

$$a_{22}^{(1)} = a_{22}^{(0)} - l_{21} a_{12}^{(0)}$$

↑
így

$(n-1) \cdot n$ elem van. ennyi ívont és sorozás kell.

$$\begin{array}{ccc|cc} a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} & a_{n-1,n+1} & & \\ a_{n,n-1} & a_{nn} & a_{nn+1} & 1 & 2 \end{array}$$

Ez egy ilyen "közös" algoritmus. Ennyi.

$$(A|a) \xrightarrow{*} (I_n|X)$$

↑
leolvasható
a megoldásvektor

$I_n = n \times n$ -es egységmátrix

Ez a Jordan-elimináció eredménye.

$$\boxed{AX} = \boxed{XA} = \boxed{I_n} \quad \text{multiplikatív inverz.}$$

Kell: $\det(A) \neq 0$ regularitás.

$$A(X_1 | \dots | X_n) = (e_1 | \dots | e_n)$$

$$e_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad \text{ilyen.}$$

Nem így járunk el. Hanem:

$(A | I_n)$ simultán egyenletrendszer - megoldás.

$(I_n | \bar{A}^{-1})$ lesz.

JORDAN - GAUSS

- 1) diagonális felett is nullázunk, fadon esetében, és
- 2) végrehajtunk egy normálást is.

$$(1a) \quad S_j \leftarrow \lambda S_j, \quad \lambda \neq 0 \text{ skalar}$$

$\sim 2n^3$ a hatékonysága.

↑ csak a főegység mátrix meg.

$$\textcircled{el!} \quad \left(\begin{array}{cc|cc} 6 & 5 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 6 & 5 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

$$S_2 \leftarrow S_2 - S_1$$

NEM HELYES LÉPÉS!

Ekvivalens sorátalakítás, de nem illeszkedik az algoritmushoz!

$$\text{jó!} \quad \begin{array}{l} S_2 \leftarrow S_2 - \frac{2}{3} S_1 \quad \text{vagy} \\ S_1 \leftarrow \frac{1}{6} S_1 \end{array} \quad \checkmark \quad \text{jó mindkettő.}$$

ennek kell figyelni!

Állítás: Tetszőleges A nemszinguláris mátrix multiplikatív inverze meghatározható Jordan - eliminációval.

(1a) - (2a) - (3a) módszerrel.

MŰVIGÉNY: $2n^3$. Kétfős.

$$\underbrace{N_2 N_1 A = R}_{\text{alsóegységtrianguláris mátrixot}} \leftarrow \text{felső} - \Delta$$

alsóegységtrianguláris mátrixot

$$N_1 A = N_2^{-1} R$$

$$A = \underbrace{N_1^{-1} N_2^{-1}}_L R$$

Δ felbontását adjuk meg így A-nak.

LR-felbontás ez.
 $\nearrow$ alsó- Δ (egyszeres)
 $\nwarrow$ felső- Δ

LR helyett LU-felbontást is szokás mondani. (u = upper)

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ 0 & r_{22} & r_{23} \\ 0 & 0 & r_{33} \end{pmatrix}}_{L \quad R}$$

Össze is lehet csúsztatni

$$\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ l_{21} & r_{22} & r_{23} \\ l_{31} & l_{32} & r_{33} \end{pmatrix}$$

ennyi így működik

pl: $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ -3 & 2 & 1 \\ 6 & 8 & -1 \end{pmatrix}$ HF.

Adjuk egy négyzetes mátrixnak egy felbontását

Szimmetrikus: $\mathbb{R}$: $A^T = A$

$\mathbb{C}$: $A^H = A$ $A_{j,2} = \overline{A_{2,j}}$

konjugált.

Másik felbontás:

poz. szemidefinit mátrixok esete.

λ -k nem negatívak.

CHOLESKY - FELBONTÁS

($R^H R$ felbontás)

$$A = R^H R$$

↑ R hermitikus-transzponáltja

Eljárás típusa: PARKETTÁZÁS

3 - 4 5 1 lépés

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ -3 & 2 & 1 \\ 6 & 8 & -1 \end{pmatrix} = A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ 0 & r_{22} & r_{23} \\ 0 & 0 & r_{33} \end{pmatrix} \begin{matrix} 1a \\ 2a \\ 3a \end{matrix}$$

LR A SORREND FONTOS
1a, 1b, 2a, 2b, 3a.
egy.

$$A = \begin{pmatrix} r_{11} & 0 & 0 \\ r_{12} & r_{22} & 0 \\ r_{13} & r_{23} & r_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ 0 & r_{22} & r_{23} \\ 0 & 0 & r_{33} \end{pmatrix}$$

$$l_{21} \cdot 3 = -3 \Leftrightarrow l_{21} = -1$$

$$(-1) \cdot (-4) + r_{22} = 2$$

$$4 + r_{22} = 2 \Leftrightarrow r_{22} = -2$$

$$l_{32} = -8 + -2 \cdot l_{32} = 8 \quad l_{32} = \underline{-8}$$

vizsgál.

egységi mátrix szerű az egyes

Egyszerű példa:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{11} & 0 \\ r_{12} & r_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \\ 0 & r_{22} \end{pmatrix}$$

egymás transzponáltja.
(hermitikus)

$r_{11}^2 = 1$ válasszuk a pozitív: $r_{11} = 1$
éteket

Ez a Cholesky-feladat

$$\forall X \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \quad X^H A X > 0 \quad \text{szachatikus alak}$$

pozitív definit: a ^{determináns} főminorok pozitív értékek!

