

Sokszögeket daraboltunk.

Konvex sokszög esetén már könnyebb a helyzet.

$$x = (x_1, x_2, x_3) \quad |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \quad \text{norma volt.}$$

$$\frac{|x+y|^2 - |x-y|^2}{4} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 = (x, y) \quad \text{szorzat. Belső}$$

Bilineáris, és még
egy kvadrátikus alak,

ami pozitív definit.

$$q(x) = x^T A x \Rightarrow \text{kvadrátikus alak, ahol} \quad A = A^T$$

$$q(x) \geq 0 \quad \forall x \text{-re} : \left. \begin{array}{l} \\ q(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \end{array} \right\} \text{pozitív definit.}$$

Ha A ilyen, akkor $\exists B: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ lin. transzf., hogy $B^T B = I$.

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \quad \text{ahol } \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0.$$

$$\begin{matrix} B & B \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{matrix} = (x, y) \quad \forall x, y \text{ vektora.}$$

||

$$(x, B^T B y) = (x, y) \Rightarrow B^T B y = y \Rightarrow B^T B = I. \text{ ennyi.}$$

Sík és térbeli izometrikus mátrixa.

$(x, y) \equiv \langle x, y \rangle$ jelölési kérdés.

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}.$$

$$\cdot \times \cdot : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3. \quad \text{ebben az esetben.}$$

↑

Bilineáris, antiszimmetrikus: $u \times v = -v \times u$.

homogenitás.

①

$$\lambda(u \times v) = (\lambda u) \times v.$$

$$(u+v) \times w = u \times w + v \times w. \text{ ugye}$$

$$|u \times v| = |u||v| \cdot \sin \angle(u,v) \text{ lesz.}$$

Csak akkor 0, ha u és v párhuzamosak.

$$(u \times v) \times w = \langle u, w \rangle v - \langle v, w \rangle u \text{ kifejtési tétel.}$$

Jacobi-azonosság:

$$(u \times v) \times w + (v \times w) \times u + (w \times u) \times v = 0 \text{ ez.}$$

$$|u|^2 \cdot |v|^2 = \langle u, v \rangle^2 + |u \times v|^2 \text{ Lagrange-azonosság}$$

$$\uparrow \\ |u| \cdot |v| \cdot \cos \angle(u,v)$$

$$|u \times v| = |u| \cdot |v| \cdot \sin \angle(u,v) \text{ innen be is lehet látni.}$$

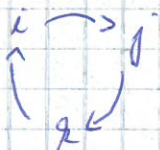
$i \quad j \quad k$

$$i \times i = j \times j = k \times k = 0$$

$$i \times j = -j \times i$$

$$j \times k = -k \times j$$

$$k \times i = -i \times k$$



$$i \times j = k$$

$$j \times k = i$$

$$k \times i = j$$

ez lesz igaz

$$(i \times j) \times k = \underbrace{\langle i, k \rangle}_{\phi} j - \underbrace{\langle j, k \rangle}_{\phi} i = -i \text{ kifejtési tétel.}$$

$$(i \times j) \times i = \underbrace{\langle i, i \rangle}_{0} j - \underbrace{\langle j, i \rangle}_{0} i = j$$

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = i \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} =$$

$$= i(u_2 v_3 - u_3 v_2) - j(u_1 v_3 - u_3 v_1) + k(u_1 v_2 - u_2 v_1).$$

$$q = a + ib + jc + kd \quad \text{algebrai alak:}$$

$$q_1 q_2 \text{ szorzat hogyan?} \quad i^2 = j^2 = k^2 = -1 \text{ lesz igaz.}$$

$$|q|^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1 \text{ az egység.}$$

Ha q tiszta kvaternion, azaz „ $ib + jc + kd$ ” alakú, ez legyen T^3 .

Ha q egységkvaternion, akkor $\bar{q} T^3 q = T^3$, ahol

$$\bar{q} = a - ib - jc - kd \text{ konjugált.}$$

↑ ez izometria
Ca koordináták
megváltozása nem
változik).

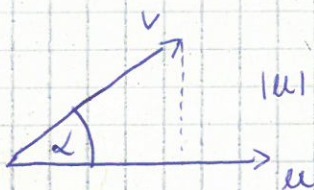
Vegyes szorzat:

$$\langle u \times w, v \rangle = (u, w, v) = u w v = v u w = w v u.$$

ciklikus-an
permutálható.

$$\langle u, v \times w \rangle = (u_2 v_3 - u_3 v_2) w_1 - (u_1 v_3 - u_3 v_1) w_2 + (u_1 v_2 - u_2 v_1) w_3.$$

↑
Ríkesült paralelepipedon ~~terfoglata~~ ^{terfoglata}.



$$|u| \cdot |v| \cdot \sin \angle(u, v) = |u \times v|.$$

$$\langle u \times v, w \rangle = A_2 \quad u, v, w \text{ paralelepipedon terfoglata.}$$

Koordinátageometria jón.

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ax + by = c, (a, b) \neq 0\}$$

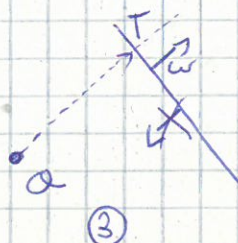
$$\parallel \quad \langle (a, b), (x, y) \rangle = c \quad \text{az egyenes normálalakja.}$$

$$\langle w, v \rangle = c$$

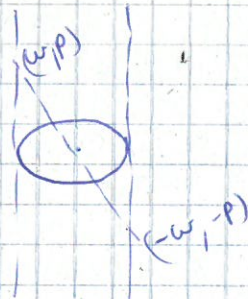
$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : w_1 x + w_2 y + w_3 z = c\} \quad w \neq 0 \text{ sík normálalakja.}$$

$$|w| = 1 \text{ normálvektor}$$

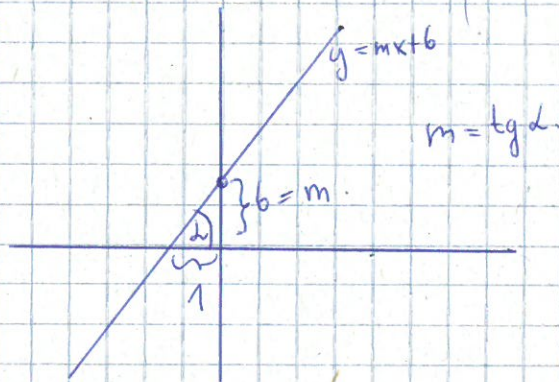
$$\langle \vec{OT}, w \rangle \text{ előjeles távolság}$$



$S \times \mathbb{R}$ egyenesek } halmaza.
 $S^2 \times \mathbb{R}$ síkok



Hals: $y = mx + b$



$$ax + by = c$$

if $b \neq 0$

ebben minden eset benne van.
 $y = \frac{c - ax}{b}$

nullával kellene osztani, de c
 b lehet nulla.

Gömb, kör

(u, v) középpont (x, y) pont

$$\sqrt{(x-u)^2 + (y-v)^2} = r \Leftrightarrow (x-u)^2 + (y-v)^2 = r^2$$

Terbel: $(x-u)^2 + (y-v)^2 + (z-u)^2 = r^2$ lesz.

Van a, b, c :

$$ax + by = c$$

$$\left. \begin{aligned} ax_0 + by_0 &= c \\ ax_1 + by_1 &= c \end{aligned} \right\}$$

a, b, c megadós

$\Downarrow$
 $1a, 1b, 1c$ is ez.

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{egyenlet oldható meg.}$$

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{a három pontu illeszkedő sík egyenlete.}$$

Sík egyenlete:

$$\langle x, \vec{w} \rangle = p$$

$$a + tb, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\langle a + tb, \vec{w} \rangle = p$$

$$t \langle b, \vec{w} \rangle = p - \langle a, \vec{w} \rangle$$

$$x^T A x = 1 \quad \text{Ha } A = I:$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1.$$

$$1 = x^T B^T A B x = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2.$$

↑
izometria.

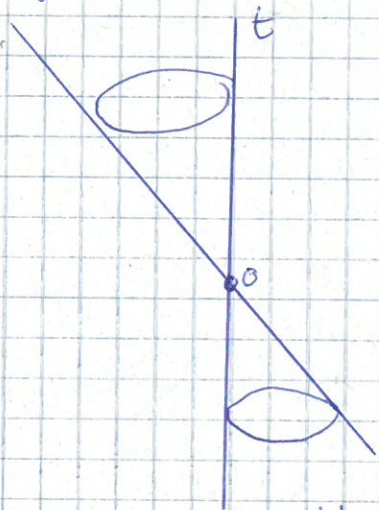
Másodrendű görbék.

$$a_{11} x_1^2 + 2a_{12} x_1 x_2 + a_{22} x_2^2 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + c = 0.$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \curvearrowright$$

$$x^T A x + \langle b, x \rangle + c = 0$$

Egyenes körkép fogalma.



$$e \neq t$$

$$e \cap t = \emptyset \quad e \not\subset t$$

Végtele felel és lefelé is.

$$x^2 + y^2 + 1 = 0 \quad \text{nem elégíti ki semmi. (IR-ben.)}$$

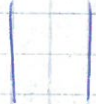
$$0 \cdot x^2 + 0 \cdot y^2 + 0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 = 0 \quad \text{IR-ben elégíti}$$

$$x^2 + y^2 = 0 \quad \text{egy pont. } (0,0)$$

$$x^2 = 0 \quad \{(x,y) = (0,y), y \in \mathbb{R}\}$$

$$x^2 - 1 = 0 \quad \text{párhuzamos egyenesek.}$$

$$(x-1)(x+1) = 0$$



Az affin transzformáció alkalmazása nem változtatja meg a másodrendű görbét. (Marad másodrendű görbe).

$$z^2 = x^2 + y^2$$

$$ax + by + cz = 1.$$

$$x^T A x + \langle b, x \rangle + c = 0$$

ahol meg szabadon választani

$$x^T A x + c = 0$$

$$\rightarrow x_1^2 + c = 0$$

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + c = 0$$

$$\text{I. } \lambda_1 = \lambda_2 = 0, \mathbb{R}^2$$

$$\text{II. } \lambda_2 = 0, \lambda_1 \neq 0: X_1^2 + c = 0$$

$$a) c < 0 \Rightarrow 2 \text{ köl. pontok van e.}$$

$$b) c = 0 \quad 1 \text{ egyenes}$$

$$c) c > 0 \quad \emptyset.$$

$$\text{III. } \lambda_1, \lambda_2 \neq 0$$

$$a) \lambda_1, \lambda_2 > 0 \vee \lambda_1, \lambda_2 < 0.$$

$$\lambda_1 X_1^2 + \lambda_2 X_2^2 + c = 0$$

$$(\sqrt{\lambda_1} X_1)^2 + (\sqrt{\lambda_2} X_2)^2 + c = 0$$

⋮

lehet pont, ellipszis, üres halmaz

$$a_{11} X_1^2 + a_{12} X_1 X_2 + a_{22} X_2^2 + b_1 X_1 + b_2 X_2 + c = 0 \quad \text{van.}$$

$$X_1 = y_1 - u_1$$

$$X_2 = y_2 - u_2$$

$$a_{11} (y_1^2 - 2y_1 u_1 + u_1^2) + a_{12} (y_1 y_2 - u_1 y_1 - u_2 y_1 + u_1 u_2) + a_{22} (y_2^2 - 2y_2 u_2 + u_2^2) + b_1 (y_1 - u_1) + b_2 (y_2 - u_2) + c = 0.$$

$$\text{Ha } |A| \neq 0: \text{részt.}$$

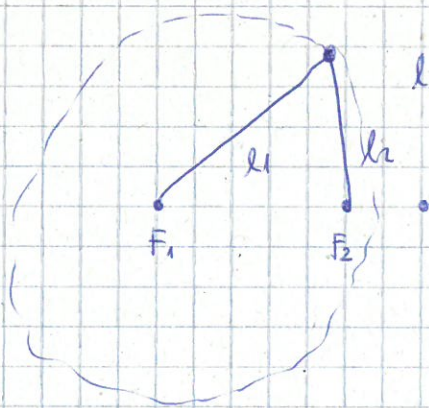
$$\text{Ha } |A| = 0: a) A = 0 \Rightarrow \text{ez egy egyenes}$$

$$\text{Ha } A \neq 0 \text{ de } |A| = 0:$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ \lambda a & \lambda b \end{pmatrix} \text{ lehet. Ekkor: } b_2 = \lambda b_1.$$

$$q \neq 0.$$

$$x = \frac{b}{a}$$



$$l_1 + l_2 = \text{const}$$

ellipsist egg is leicht definierbar!

$$(x+f)^2 + y^2 + 2\sqrt{(x+f)^2 + y^2} \sqrt{(x-f)^2 + y^2} + (x-f)^2 + y^2 = 4l^2$$

$$(4l^2 - (x+f)^2 - (x-f)^2 - 2y^2)^2 = 4((x+f)^2 + y^2)((x-f)^2 + y^2) \text{ lesz.}$$

$$(4l^2 - \cancel{x^2} - \cancel{2xf} - \cancel{b^2} - \cancel{x^2} + \cancel{2xf} - f^2 - 2y^2)^2 = 4((x+f)^2 + y^2)((x-f)^2 + y^2)$$

$$(4l^2 - 2x^2 - 2xb + 2xf - b^2 - f^2 - 2y^2)^2 = 4((x+f)^2 + y^2)((x-f)^2 + y^2)$$