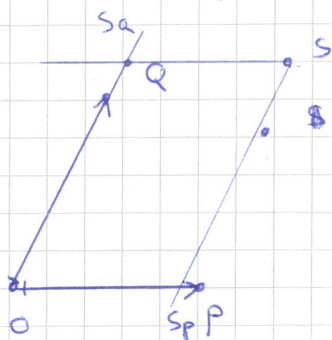


3 nem kollineáris pont



$$SSP \parallel OQ$$

$$SSQ \parallel OP$$

$$\exists! \lambda \quad SP = \lambda \cdot OP$$

$$\exists! \mu \quad SQ = \mu \cdot OQ$$

$$\vec{OS} = \lambda \vec{OP} + \mu \vec{OQ} \quad \text{lesz igaz.}$$

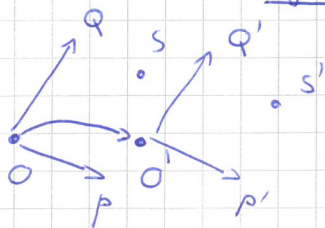


S koordinátái erre a
vektorendszerre.

Az origó / két egységvektor általánosítása ez.

S sík $\leftrightarrow \mathbb{R}^2$ van bijekció.

Sok ilyen van.



$$S = \lambda \vec{OP} + \mu \vec{OQ}$$

lesz.

$$\vec{OS'} = \lambda \vec{O'P'} + \mu \vec{O'Q'}$$

$$\vec{O'Q'} = \vec{OQ} - \vec{OO'}$$

$$\vec{O'P'} = \vec{OP} - \vec{OO'}$$

$$\vec{OS'} = \vec{OP'} - \vec{OO'}$$

$$\vec{OS'} = \vec{OO'} + \vec{O'S'} =$$

$$= \underline{b} + \vec{O'S'} = \underline{b} + (\lambda \vec{O'P'} + \mu \vec{O'Q'}) =$$

$$= \underline{b} + (\lambda (\vec{OP} - \underline{b}) + \mu (\vec{OQ} - \underline{b})) =$$

①

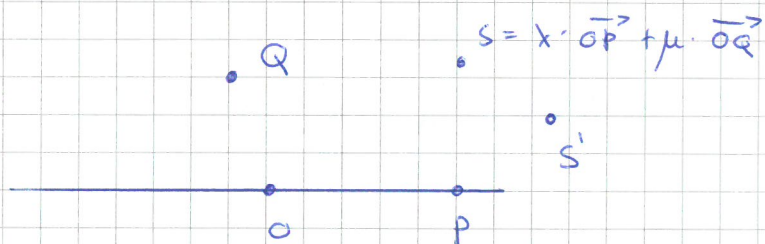
$$= \frac{b}{2} (1 - \lambda - \mu) + \lambda \overrightarrow{OP} + \mu \overrightarrow{OQ} =$$

$$= ? \quad \overrightarrow{OP'} = \frac{\mu}{\mu + \nu} \overrightarrow{OP} + \frac{\nu}{\mu + \nu} \overrightarrow{OQ}$$

$$\overrightarrow{OQ'} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \overrightarrow{OP} + \frac{\mu}{\lambda + \mu} \overrightarrow{OQ} \quad \text{ékhátó fel.}$$

$$\underline{\underline{\begin{pmatrix} \mu & \nu \\ \lambda & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} + b}}$$

adódik a kollineáció affen síkjára,
ha elvégezzük a nyílti helyi bizonyítást.



$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} + 0 \quad \text{az identitás}$$

affin leképezés

a ffinitás, aminek nincs fix pontja: ELTOLÁS.

$$\begin{pmatrix} \mu & \nu \\ \lambda & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} + b = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mu & \nu \\ \lambda & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mu-1 & \nu \\ \lambda & t-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = -b$$

$$b_2 - b_1 \nu = 0$$

nincs fix pont.

$$\begin{array}{c|c} \mu & \nu \\ \hline \lambda & t \end{array} \begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \end{array}$$

~

$$\begin{array}{c|c} \mu & \nu \\ \hline \lambda & t - \frac{\nu}{\mu} \end{array} \begin{array}{c} b_1 \\ b_2 - \frac{b_1}{\mu} \end{array}$$

↑
EZ NEM
KOLLINEÁCIÓ.

1 fix pont

ez itt egyenes

végtelen sok fix pont

lebas lett...

nincs fix pontja.

$$\begin{array}{c|c} u-1 & v \\ \hline 0 & (t-1)\frac{v}{u-1} \cdot 0 \end{array} \quad \begin{array}{c} b_1 \\ b_2 - \frac{b_1}{u-1} \cdot 0 \end{array} \quad u \neq 1.$$

$$t-1 = \frac{v}{u-1} \Rightarrow \text{és} \quad b_2 - \frac{b_1}{u-1} \cdot 0 = 0.$$

$$b_A \quad (t-1)(u-1) - v = 0. \quad \text{determináns.}$$

ennyi volt a kollinearitás.

EUKLIDESZI GEOMETRIA JÖV

$$d: \mathcal{M} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}_+$$

$$d(P, Q) \geq 0$$

$$d(P, Q) = d(Q, P)$$

$$d(P, Q) = 0 \Leftrightarrow P = Q.$$

$$d(P, Q) + d(Q, R) \geq d(P, R)$$

Klassikus távolságdefiníció az, ami Kalkuluson volt.

metrikus tér: gömb, aminek belső vonal egy nagyobb sugarú gömb

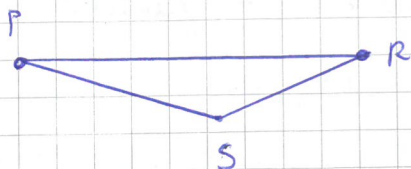
$$\text{Gömb: } B_P(r) = \{x \in \mathcal{M} : d(P, x) \leq r\}.$$

az túl általános, szükséges kell.

AFFIN METRIKA: (egy affin síkon)

$$d(P, R) = d(P, Q) + d(Q, R) \Leftrightarrow Q \in \overline{PR}$$

Nem affin metrika: euklideszi metrika négyzetpáron.



S sík

$\varphi: S \rightarrow \mathbb{R}^2$ koordinátázás

$$\varphi(S) = (x_0, y_0)$$

definíció: $d(S, T) = \sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2}$ $\varphi(T) = (x_1, y_1)$

ez egy affin metrika.

$$d(S', T') =$$

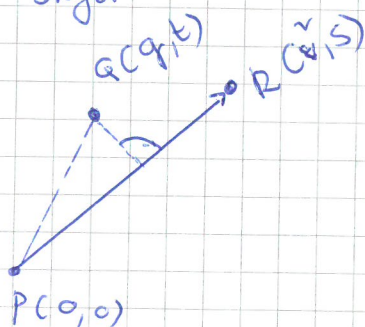
$$S' = S + b$$

$$T' = T + b$$

itt b - b van, eltűnik.

ELTOLÁSHENTES, ELTOLÁS-INVARIÁNS.

Legyen P az origó.



$$d(P, R) = d(P, Q) + d(Q, R)$$

$$\sqrt{r^2 + s^2} = \sqrt{q^2 + t^2} + \sqrt{(r-q)^2 + (s-t)^2}$$

Kell: $(q, t) = \lambda(r, s), \quad \lambda \in [0, 1].$

rendezni kell - négyzetbe emelni, stb....

ez egy affin metrika.

Azt is be lehet látni, hogy metrika egyáltalában.

~~Itt~~ m metrika, m' metrika - euklideszi metrikák

$$\exists! \psi: S \rightarrow S \text{ affinitás}$$

$$\bar{m}(P, Q) = m(\psi(P), \psi(Q))$$

①

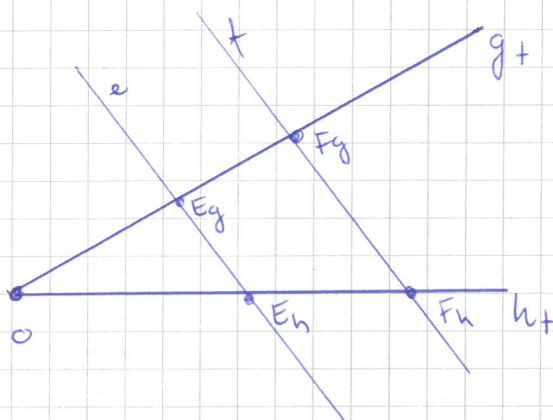
$$\varphi: S \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ van.}$$

$$\bar{\varphi}: S \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$m(\bar{\varphi}^{-1}(z_0, t_0), \bar{\varphi}^{-1}(z_1, t_1)) = \sqrt{(z_0 - z_1)^2 + (t_0 - t_1)^2} = \bar{m}(\bar{\varphi}^{-1}(z_0, t_0), \bar{\varphi}^{-1}(z_1, t_1))$$

$$\psi = \bar{\varphi}^{-1} \circ \varphi$$

Párhuzamosakról a következőt is lehet mondani.



$$\text{ell } f \Leftrightarrow \frac{d(O, F)}{d(O, E)} = \frac{d(O, F_h)}{d(O, E_h)} = \frac{d(F, F_h)}{d(E, E_h)}$$

Norma:

$$|u| = \sqrt{u_0^2 + u_1^2}$$

$$|u| + |v| \geq |u+v|. \quad \text{háromszög egyenlőtlenség}$$

$$|u+v|^2 = (u_0+v_0)^2 + (u_1+v_1)^2 = |u|^2 + |v|^2 + 2(u_0v_0 + u_1v_1).$$

$$\langle u, v \rangle = u_0v_0 + u_1v_1 \leq \sqrt{u_0^2 + u_1^2} \cdot \sqrt{v_0^2 + v_1^2}$$

BELSŐ SZORZAT

$\langle u, v \rangle$ belső szorzat ez.

$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{4} (|u+v|^2 - |u-v|^2)$$

$u \perp v$ azaz $\langle u, v \rangle = 0$, ha a belső szorzat nulla.

Tf h $u \perp v$ azaz $\langle u, v \rangle = 0$.

$$w = \lambda u + \mu v$$

$$u, v \neq 0$$

5.

$$\mu = \frac{\langle u, u \rangle}{|u|^2}$$

$$\lambda = \frac{\langle u, v \rangle}{|u|^2}$$

$$\langle \lambda u + \mu v, u \rangle = \lambda \langle u, u \rangle + \underbrace{\mu \langle v, u \rangle}_{\neq} = \lambda |u|^2$$

$$V \neq 0$$

$$V = (v_1, v_2)$$

Keressük:

$$(x_1, x_2)$$

$$x_1^2 + x_2^2 = 1$$

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 = 0 \quad \text{t.f.h. } v_2 \neq 0.$$

$$\boxed{x_2 = -\frac{v_1}{v_2} x_1}$$

$$x_1^2 + \left(-\frac{v_1}{v_2} x_1\right)^2 = 1$$

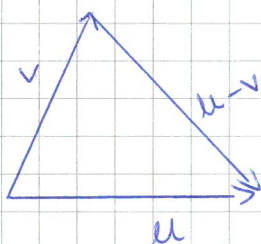
$$x_1^2 \cdot \left(1 + \frac{v_1^2}{v_2^2}\right) = 1$$

$$x_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{v_1^2}{v_2^2}}}$$

Pontosán két darab egységvektor merőleges a síkban egy vektornak

Pitagorasz-tétel:

$$u \perp v \Leftrightarrow |u|^2 + |v|^2 = |u-v|^2.$$

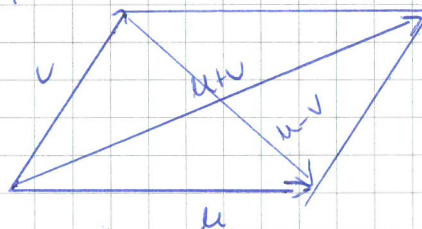


$$|u-v|^2 = \langle u-v, u-v \rangle = |u|^2 + |v|^2 - 2\langle u, v \rangle =$$

$$= |u|^2 + |v|^2 \Leftrightarrow \langle u, v \rangle = 0$$

Thales-tétel:

$$(u+v) \perp (u-v) \Leftrightarrow |u| = |v|.$$



$$0 = \langle u+v, u-v \rangle = \langle u, u \rangle - \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle - \langle v, v \rangle = \\ = |u|^2 - |v|^2. \quad \square$$

Dilatáció:

φ dilatáció, ha $\forall P, Q \in S - re$

$$d(\varphi(P), \varphi(Q)) = \lambda d(P, Q).$$

$$\frac{d(P, Q)}{d(R, S)} = \frac{d(\varphi(P), \varphi(Q))}{d(\varphi(R), \varphi(S))}.$$

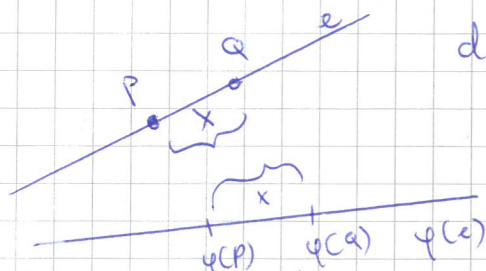
$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \end{pmatrix} \quad (x, y) \rightarrow (\lambda x + b_0, \lambda y + b_1)$$

izometria fogalma.



$$d(P, Q) + d(Q, R) = d(P, R)$$

$$d(\varphi(P), \varphi(Q)) + d(\varphi(Q), \varphi(R)) = d(\varphi(P), \varphi(R)).$$

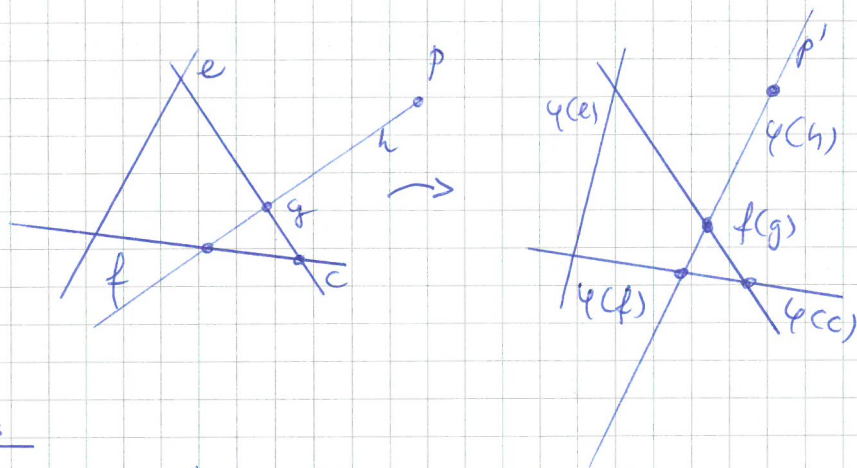


$$d(P, Q) = x$$

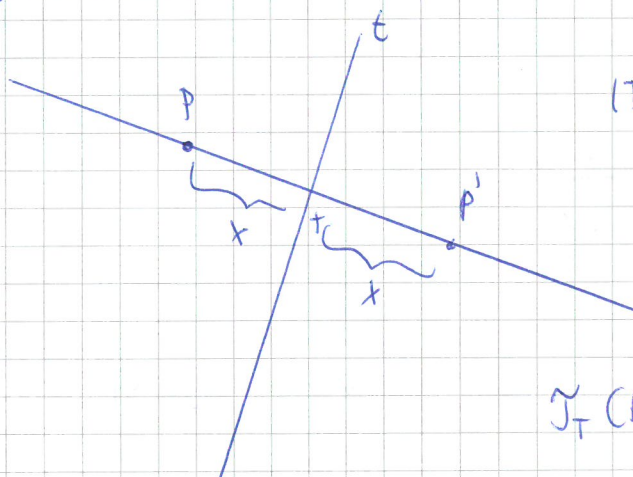
injektív, vet. szét

képpontok sorrendje nem lehet nulla.

minden pont lokál. reprezent



Tengelyes tükrözés

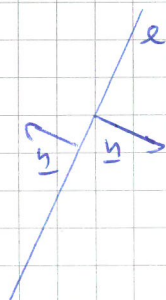


$$|TP| = |TP'|, \quad P \neq P'$$

$$\gamma_T(P) = P + 2 \cdot (c - \langle P, n \rangle) n$$

ahol $\langle x, n \rangle = c$, ahol n egységvektor

$$\{x : \langle x, n \rangle = c\} \text{ ahol } |n| = 1.$$



Projektív síkhoz hasonlóan.

$$\S X/\mathbb{R}$$

$$(n, c) \sim (w, p) \Leftrightarrow$$

$$(n = w \text{ és } c = p)$$

$$(n = -w \text{ és } c = -p).$$

Tengelyes tükrözés fix pontjai a tengelyre vannak.

69. oldal (affin tengelyes tükrözés) NEM KELL.

Affinitás:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u & v \\ 0 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} u & v \\ 0 & t \end{vmatrix} \neq 0.$$

$$\begin{cases} > 0 \\ < 0 \end{cases} \text{ lehet.}$$

IRÁNYÍTÁSTARTÓ

IRÁNYÍTÁSFORBÍTÓ

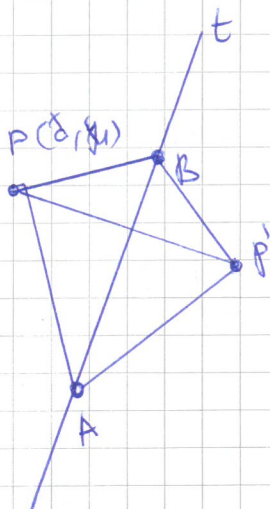
$$|AB| = |A| \cdot |B|.$$

Tengelyes tükrözés mátrixát kell megadni.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

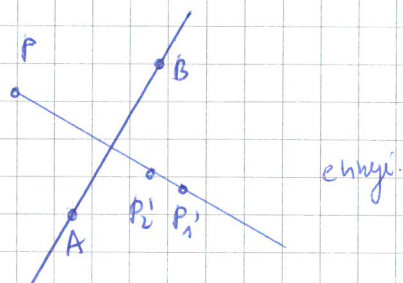
negatív a determinánsa.

ez az egyetlen izometria, amely T-t fixen hagyja de a 2/c feltételt felcseréli.

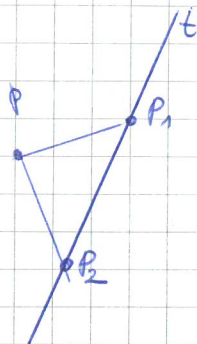
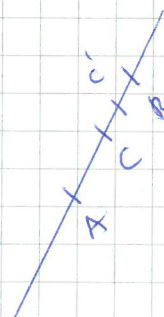
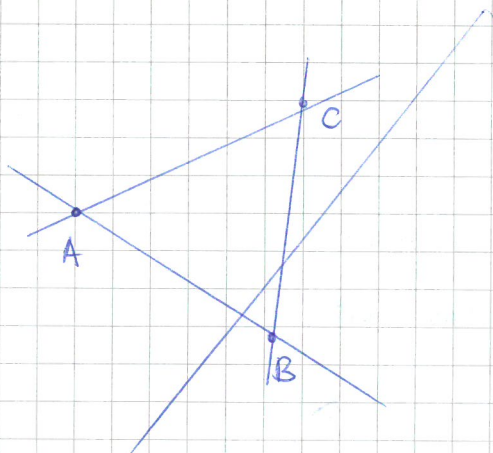


$$\left. \begin{aligned} (x_0 - a_0)^2 + (x_1 - a_1)^2 &= (x'_0 - a_0)^2 + (x'_1 - a_1)^2; \\ (x_0 - b_0)^2 + (x_1 - b_1)^2 &= (x'_0 - b_0)^2 + (x'_1 - b_1)^2. \end{aligned} \right\}$$

ebből látni, hogy P' egyenesen van



Izometriák



$P_1 P_2$ fixen marad $\Rightarrow$ IZOMETRIA

Minden izometria előáll tetszőleges körmozgással.

$$\begin{pmatrix} u & v \\ s & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \end{pmatrix}$$

$$x_0^2 + x_1^2 = (ux_0 + vx_1)^2 + (sx_0 + tx_1)^2$$

$$x_0^2 + x_1^2 = (u^2 + s^2) x_0^2 + (v^2 + t^2) x_1^2 + 2(uv + st) x_0 x_1$$

$$u^2 + s^2 = 1$$

$$v^2 + t^2 = 1$$

$$(uv + st) = 0$$

$$(u, v) = (\cos \varphi, \sin \varphi)$$

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$$\det: 1$$

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{pmatrix}$$

$$\det: -1$$

#

Izometria felépíthető 5 tengelyes körmozgással.

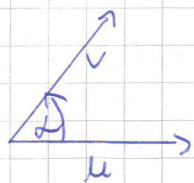
$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \text{ forgatás} \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \varphi - \sin \varphi \sin \varphi & \cos \varphi \sin \varphi + \sin \varphi \cos \varphi \\ -\sin \varphi \cos \varphi - \cos \varphi \sin \varphi & -\sin \varphi \sin \varphi + \cos \varphi \cos \varphi \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\varphi + \varphi) & \sin(\varphi + \varphi) \\ -\sin(\varphi + \varphi) & \cos(\varphi + \varphi) \end{pmatrix}$$

Szög, Szögmérés

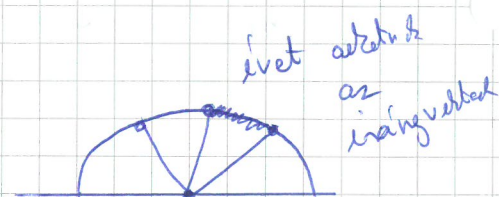
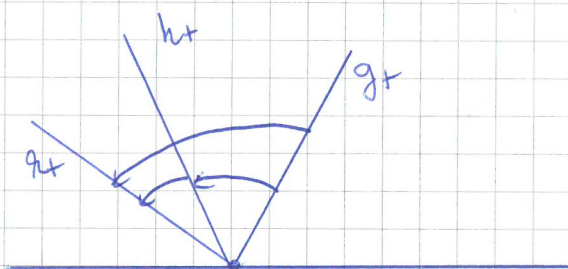
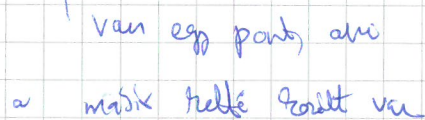
Belső szög segítségével.



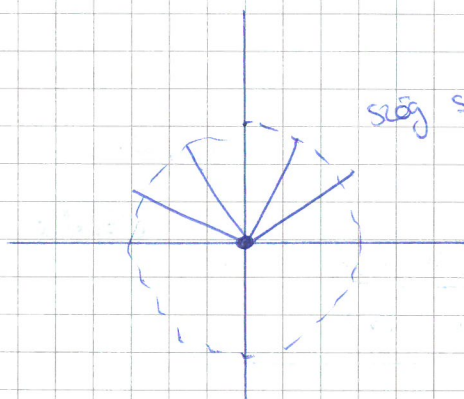
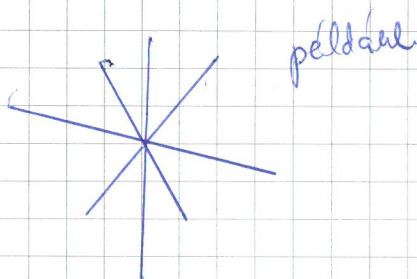
érdekeltlen az előjelre.

$$\cos \alpha = \frac{\langle u, v \rangle}{|u| \cdot |v|}$$

izometria segítségével is lehet



Mi van alle, ha hem f-pantos?



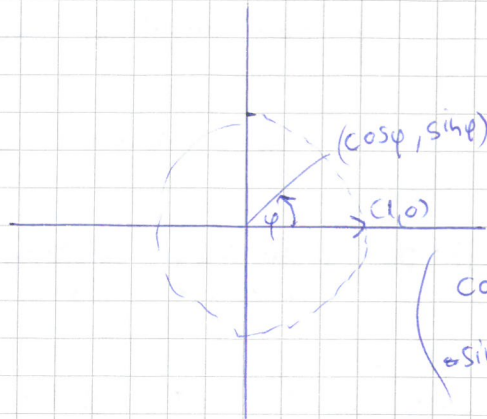
slag somzorse is definialkato.

S2ög fle: van t s2ög flerd.

$$\frac{n}{2^2} \cdot \frac{\pi}{2} - \text{röl tudjuk, hogy}$$

menyire.

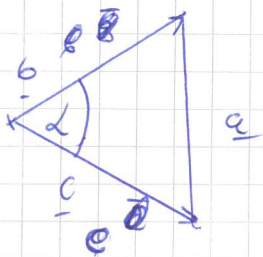
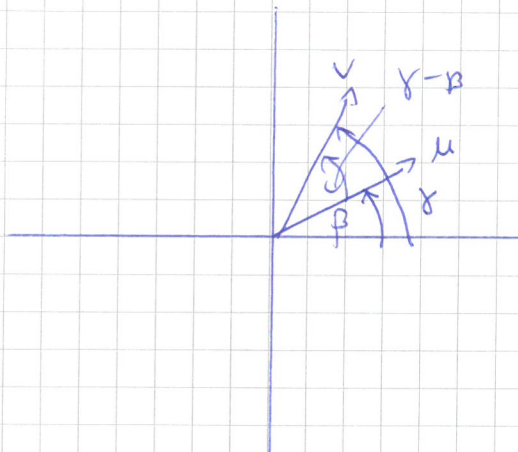
$$\cos \alpha = \frac{\langle u, v \rangle}{|u| \cdot |v|} = \left\langle \frac{u}{|u|}, \frac{v}{|v|} \right\rangle = \cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma = \underline{\underline{\cos(\beta - \gamma)}}$$



$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$$

$$u = (\cos \beta, \sin \beta)$$

$$v = (\cos \gamma, \sin \gamma)$$



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$a^2 = |b - c|^2$$

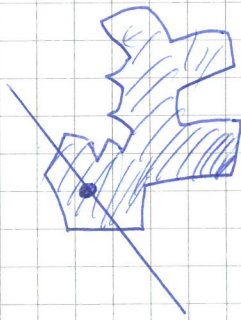
$$|b - c|^2 = |b|^2 + |c|^2 - 2|b||c| \cos \alpha$$

$$\langle b - c, b - c \rangle = |b|^2 + |c|^2 - 2 \langle b, c \rangle$$

$$\langle b, c \rangle = |b| \cdot |c| \cdot \cos \alpha.$$

Térület témaköre.

Egyszerű sokszögek témája.



pontból páratlan számú metsz: benne van.

Ha párossal, akkor kívül.

A paritásfüggvény folytonos.

Két sokszög területét egyenlő $\Rightarrow$ egymásba ártítható