

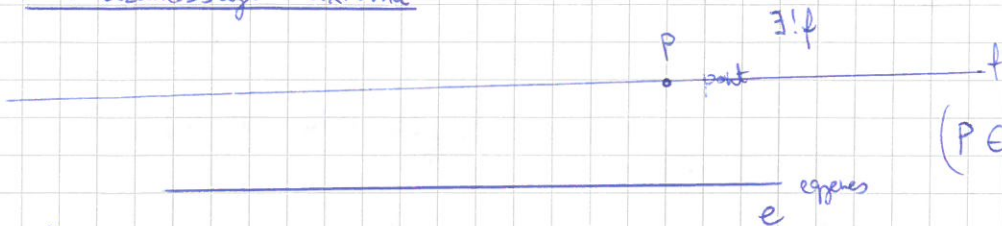
2018. 09. 14.

1. konzultáció

Geometria I.

Ódor Tibor ad elő.

Párhuzamossági axióma



$$(P \in f) \wedge (f \cap e = \emptyset)$$

↑
vminde

a rendeltet
garantáljuk.

Pontosan egy ilyen f létezik.

Axióma, de fizikailag nem ellenőrizhető.

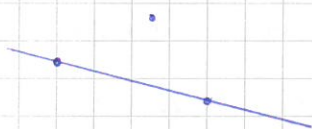
Más a projektív geometria, ahol a gömb a halmaz. Az

(Kürsa Árpád: Bevezetés a geometriába c. könyv 222.)

Ami lehetetlen / reális.

Illeszkedési axiómák

- 1) $\exists$ legalább 3 egymástól különböző nem kollineáris pont;



illeszkedés: az "elemek" reláció

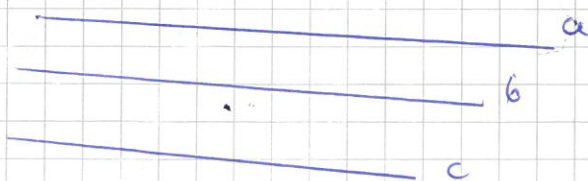
szimmetrizált relációtípusa.

- 2) $\exists$ egyenesre legalább 2 pont illeszkedik;

- 3) Bármely 2 különböző ponton pontosan 1 egyenes illeszkedik.

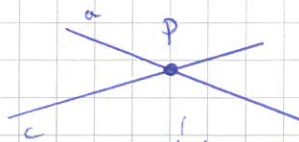
- 4) Volt a párhuzamossági axióma (lásd fentebb.).

A párhuzamosság ekvivalenciareláció.



$$\left. \begin{array}{l} a \cap b = \emptyset \\ b \cap c = \emptyset \end{array} \right\} \Rightarrow a \cap c = \emptyset$$

Tfh $a \cap c \neq \emptyset$.

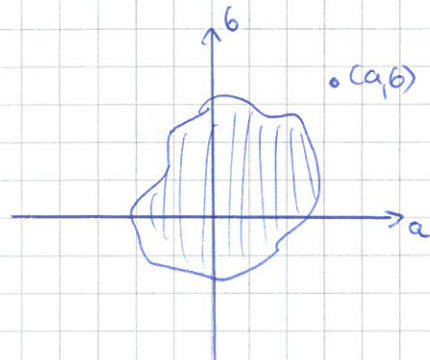


1) a és c is
párhuzamos lenne b-vel.
Ellentmondás

Reverzsi axiómák:

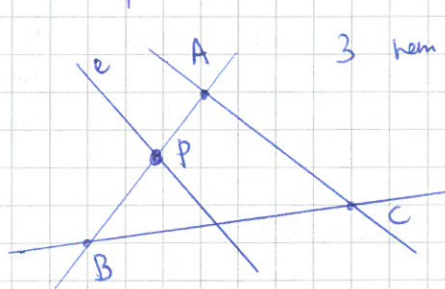
- 1) Minden egyenes palossá két rendezése van a palossok, melyek egymás megfordítottai;

Reláció:



megfordítása: (b, a) .

2) Pasa-axióma:



3 nem kollineáris pont

Ha $A \leq B$:

$$S_{AB} = \{x : A \leq x \leq B\}$$

AB-szakasz

Ha a A egyik csúcsára nem illeszkedik $S_{BA} = \{y : B \leq y \leq A\}$.

Állítás: $S_{AB} = S_{BA}$. A szakasz definíciója független a szakasz egyenes irányításától.

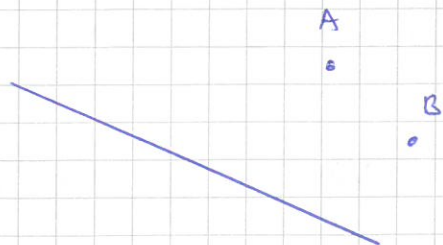
Van egy olyan egyenes, amely nem illeszkedik A, B, C -re (egyikre sem).

$$A, B, C \notin e. \quad P = e \cap AB \neq \emptyset.$$

$$\text{Egyen: } e \cap AC = \emptyset \text{ vagy } e \cap BC = \emptyset.$$

(HF.) belátni, hogy nem metrikai nihilizmus ^{síkban} ~~egyenesen~~ az egyenes.

Az egyenes a síkot két félsíkra bontja.



$$A, B \in S$$

$$A, B \notin e \subset S \text{ egyenes.}$$

$$A \sim B \Leftrightarrow AB \cap e = \emptyset.$$

Állítás a Pasch-axiómából: $\exists$ pont a felstík.

Azaz az $S \setminus e$ -n két két osztályra van az $\sim$ -vel

Lássuk be.



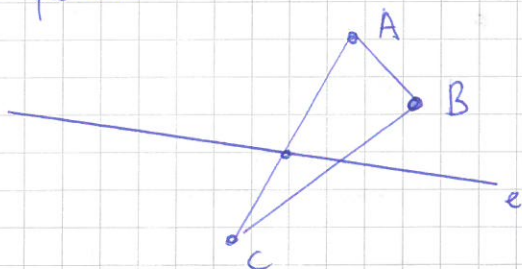
$$A \sim B, B \sim C \Rightarrow A \sim C$$

$$\text{Tfh } AC \cap e = P \Rightarrow \exists Q \text{ hogy } Q = AB \cap e \text{ vagy}$$

Van két
felstík.

$$Q = BC \cap e. \downarrow$$

Tfh van két felstík.



$$B \sim A \text{ vagy } B \sim C$$

Folytonossági axióma

— g egyenes Q pont

$$Q \in g \quad \exists P, R \quad P < Q < R$$

$\uparrow$ közelebb.

Dedekind-axióma:

$$a \subseteq PR \subseteq g$$

$\exists Q_-$ és Q_+ pontok, hogy

$$\forall Q \in Q \text{ esetén } Q_- \leq Q \leq Q_+$$

(3)

és bñaly olyan $X, Y \in g - \pi$, hogy $Q \subseteq XY$ ($X \leq Y$)

$$X \leq Q_- \leq Q_+ \leq Y.$$

Van inf és sup ez tulajdon-
képpen

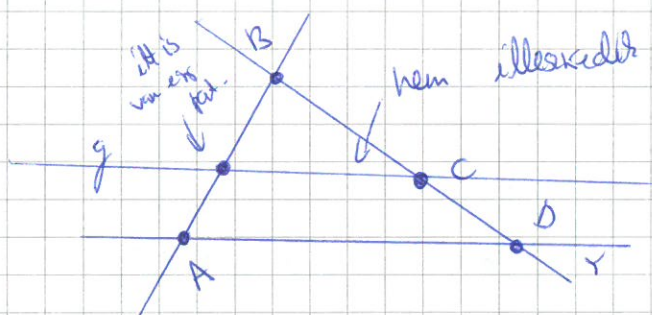
Rajzon:



egy egyenesen végtelen sok pont van.

De három pont legkevesebb van.

Biz.:



$$C \in g, g \parallel AB$$

A-ra nem illeszkedik.

B-re sem, mert akkor C D-re is illeszkedne.

A síkok, melyek ezen axiómákat teljesítik: AFFIN-SÍKOK.

3 tulajdonság alapján lehet őket ism. az.

Egyenestartó leképezés, egyenestartó leképezés, hollíneáció, ha bijektív.

Két affin sík izomorf, ha van hollíneáció közöttük.

Minden egyenesen szinjektív: egyenesstabil.

Kollináció:

$$\varphi: S \rightarrow S$$

$$\varphi(x) = x \text{ a képezési fix pontja}$$

Van identitás transzformáció is.

$$\varphi(e) = e \quad \begin{matrix} \swarrow e. \\ \text{egyenest egyenesbe viszi.} \end{matrix}$$

$$\varphi(x) = x \quad \forall x \in e - \pi.$$

A kollinációk tulajdonság a párhuzamosságot.

Ezt be lehet látni.

$$e \parallel f, e \neq f. \Rightarrow e \cap f = \emptyset.$$

$$\varphi(e) = e' \quad \text{úgy egyenes lesz.}$$

$$\varphi(f) = f'.$$

All: $e' \cap f' = \emptyset.$

Így metszik egymást.

$$e' \cap f' = P \Rightarrow P \in \varphi(e), \varphi(f)$$

$$Q = \varphi^{-1}(P) \in e, \text{ azaz } Q \in e \cap f. \quad \checkmark.$$

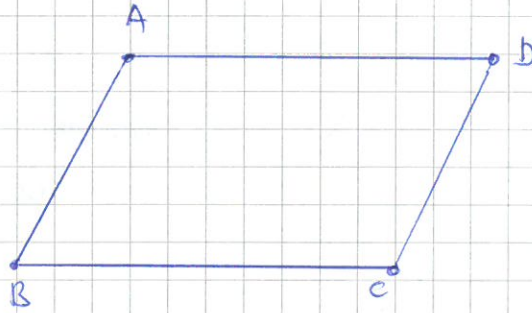
Kollináció inverse is kollináció.

$$\varphi \circ \varphi^{-1} = \varphi^{-1} \circ \varphi = \text{id}.$$



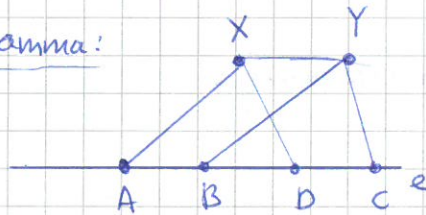
Kollinárus pontok kollinárusak maradnak.

A kollineáris csoportot alkotnak.



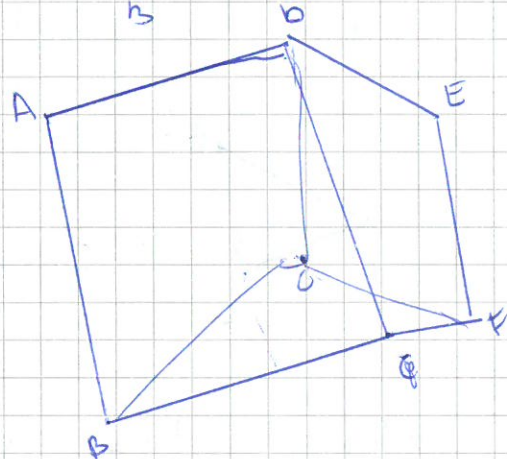
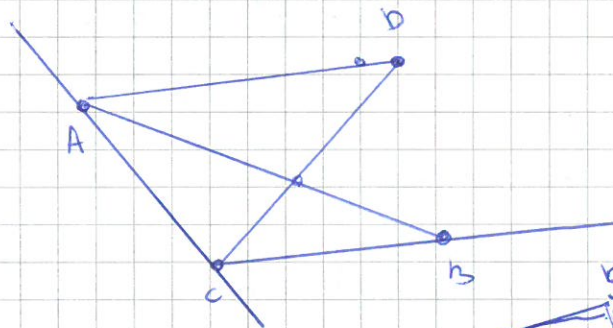
Paralelogramma: $AB \parallel CD \wedge BC \parallel AD$.

Előjelű paralelogramma:



$XY \parallel e$, $XABY$ alla lesz pal., ha
 $XDCY$ is az.

All: AC és BD szakasz (átlók) metszik egymást.



Nyitott lánc tulajdonság:

$ABCD, CDEF \Rightarrow ABFE$
paralelogramm $\uparrow$ is az

Es a nyitott körvonal tulajdonság. (9-10. oldal a körvonal leírásáról.)

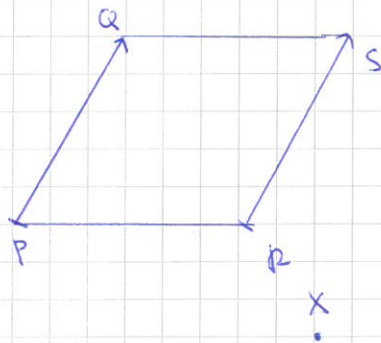
Vektorok.

(P, Q) rendezett pontpár

$(P, Q) \sim (R, S)$ két vektor



P -relációban vannak, ha $PQSR$ paralelogramma.



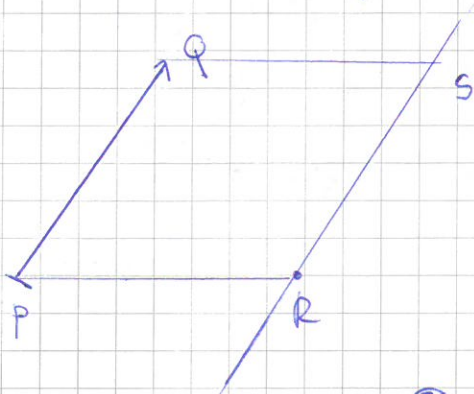
ez egy ekvivalenciareláció.

Reflexivitás



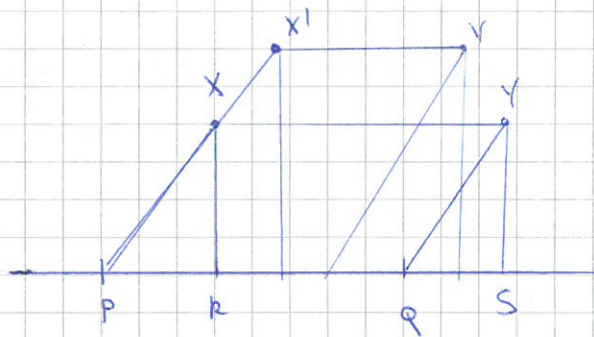
Transzitivitás: $\left. \begin{array}{l} (P, Q) \sim (R, S) \\ (R, S) \sim (U, V) \end{array} \right\} \Rightarrow (P, Q) \sim (U, V)$

ez a nyitott körvonal tulajdonság és



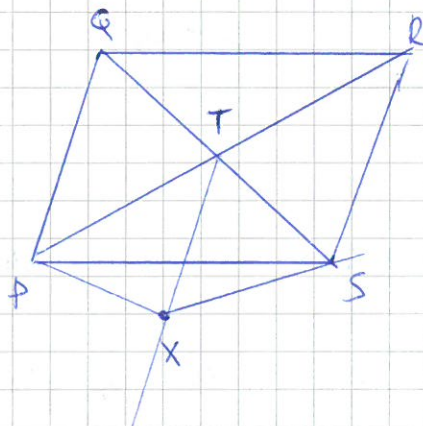
három csúcs adott,
lehet a negyedik.

Degenerált eset:



Bármely X, Y -ra paralelogrammus lesz.

Állítás:



$$(P, T) \sim (T, R) \text{ lesz igaz.}$$

$$(T, R) \sim (X, S)$$

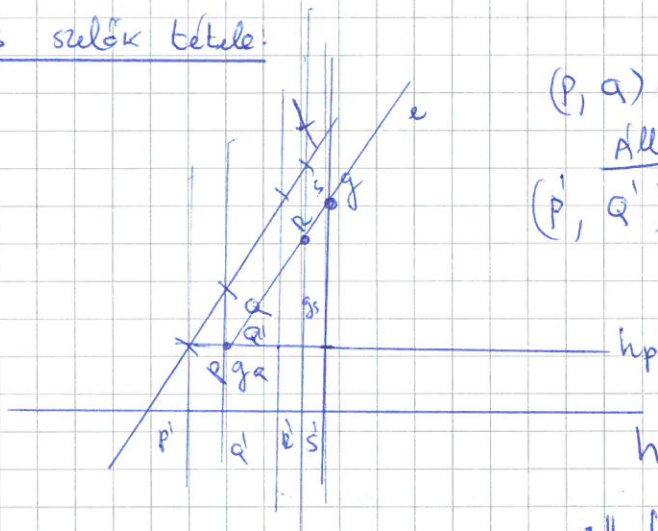
$$(T, X) \sim (S, R)$$

(H.F.)



T megszerkesztése

Párhuzamos szelők tétele:



$$(p, q) \sim (r, s) \Rightarrow (p, r) \sim (q, s)$$

Áll:

$$(p', q') \sim (r', s').$$

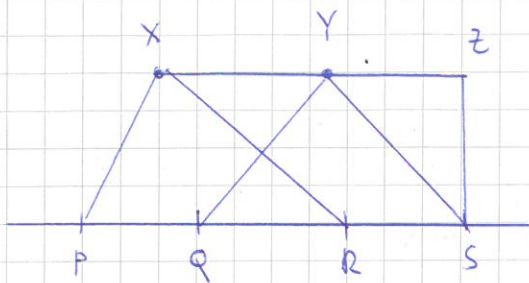
$$e \parallel f, e \in g \cap hp = q''$$

$$(q'', s') \sim (p, r) \sim (q, s)$$

$$p \in hp$$

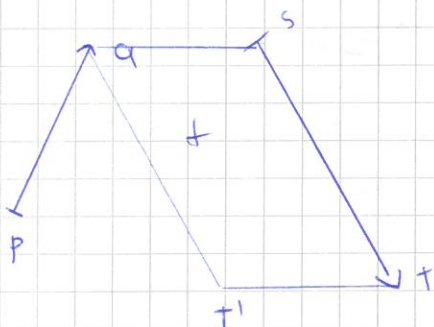
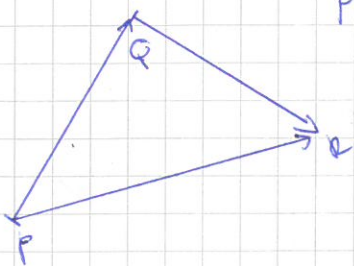
$$(p', q') \sim (p, q'') \sim (r, s'') \quad s'' = e \cap gs$$

$$\sim (r', s')$$



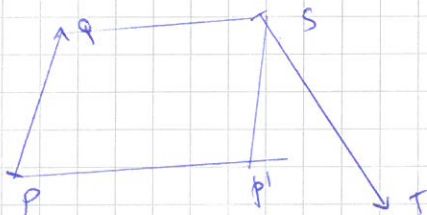
Összeadás

$$\vec{PQ} + \vec{QR} = \vec{PR}$$



= ?

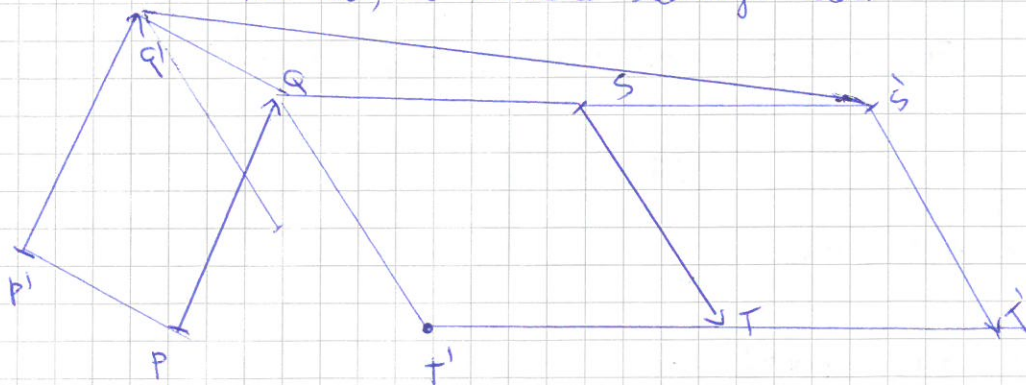
$$\vec{PQ} + \vec{ST} = \vec{PT'}$$



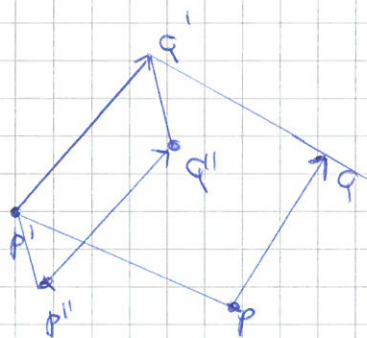
$$(P, T') \sim (P', T)$$

↑ a nyitott háromszög tulajdonsága miatt.

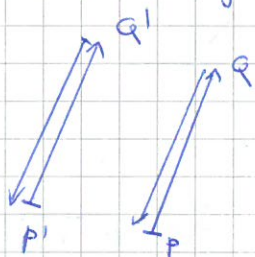
Két eset, de felcserélve az eredményt ad.



Az összeadás kompatibilis az ekvivalenciarelációval.



ismét a nyitott körv tulajdonság miatt



parallelogramma
marad, csak
a zárójelcsí irány
váltott.

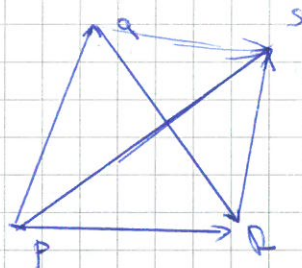
$$(P', Q') \sim (P, Q)$$

$$(Q', P') \sim (Q, P)$$

Igen,

Degenerált esetek: a pontok egy egyenesre esnek.

Asszociativitás:



$$\vec{PQ} + \vec{QR} = \vec{PR}$$

$$\vec{PR} + \vec{RS} = \vec{PS}$$

$$\vec{PQ} + (\underbrace{\vec{QR} + \vec{RS}}_{\vec{QS}}) = \vec{PQ} + \vec{QS} = \vec{PS}$$

Zéruselem a pont lesz.

Vektor szorzása egész számmal:

$$i \cdot V = \begin{cases} \underbrace{V + V + \dots + V}_i & i > 0 \\ (-V) + (-V) + \dots + (-V) & i < 0 \\ 0 & i = 0 \end{cases}$$

(10)

Rac. számmal szorzás:

$$\frac{p}{q}$$

$X_p\left(\frac{p}{q}, Q\right)$ függvény
is bevezethető.

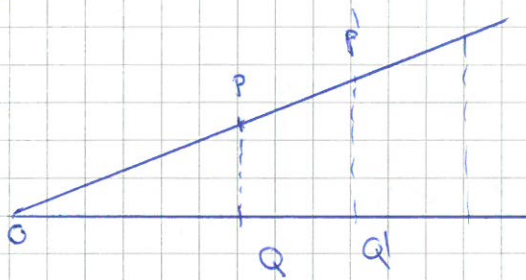
$$\vec{X_{PQ}} = X_p(\lambda, Q) = \sup_{\lambda} \{X\left(\frac{p}{q}, Q\right) : \frac{p}{q} < \lambda\}$$

Párhuzamos síelőtétel:

O, P, Q

nem kollin.
pontok

$$\lambda, \mu \neq 0$$



$$PQ \parallel X_O(\lambda, P) X_O(\mu, Q)$$
$$\Downarrow$$
$$\lambda = \mu$$

$$\vec{OR} = \lambda \vec{OP}$$

$$\lambda \vec{OP} = \frac{\lambda}{\mu} \vec{OR}$$