

SZABÓ ZOLTÁN
BEVEZETŐ FEJEZETEK A GEOMETRIÁBA

1. KÖTET

József Attila Tudományegyetem

Szeged

Bolyai Intézet

1982.

Tartalomjegyzék

Halmazelméleti alapfogalmak és jelölések bevezetése. 1.o.

1. Fejezet

Az euklideszi geometria axiomatikus tárgyalásáról 9.

1.§ A sík axiomatikus tárgyalásáról..... 10.

2.§ A tér axiomatikus tárgyalásáról..... 24.

2. Fejezet

Izometriák..... 32.

1.§ Fixponttételek a síkban..... 32.

2.§ Konjugálás..... 35.

3.§ Speciális síkizometriák

 Forgások..... 37.

 Párhuzamos eltolások..... 42.

4.§ A síkizometriák osztályozása..... 49.

5.§ Alakzatok egybevágósága..... 54.

6.§ Térizometriák..... 58.

3. Fejezet

Szögek..... 77.

1.§ Irányítás..... 77.

2.§ Szögek definíciója, szögek összege..... 80.

3.§ Szögmérés..... 87.

4.§ Elemi tételek szögekről..... 93.

4. Fejezet

Vektorok..... 99.

1.§ Vektorok definíciója, vektorműveletek..... 99.

2.§ Párhuzamos szelők tétele..... 102.

3.§ Hasonlóságok.....	108.
4.§ Vektorok skalár vagy belsőszorzata.....	114.
5.§ Koordináták.....	117.
6.§ Kúpszeletek.....	124.
7.§ Területmérés.....	136.
8.§ Térfogatmérés.....	143.
9.§ Terület és térfogatforma.....	148.
10.§ Vektorszorzat.....	152.
11.§ Kvaterniók.....	156.
12.§ Háromszögek és tetraéderek nevezetes pontjai.....	163.
13.§ n -dimenziós euklideszi terek.....	169.

5. Fejezet

Affin geometria.....	179.
1.§ n -dimenziós affin terek és affin altereik.....	179.
2.§ Konvex alakzatok, konvex burok.....	191.
3.§ Helly tétele.....	196.
4.§ Konvex poliéderek és politopok.....	204.
5.§ Euler tétele konvex politopokra.....	215.
6.§ Lineáris leképezések és invariánsaik.....	219.
7.§ Affinitások.....	225.
8.§ Térfogatformák és irányítás. Térfogattartó affinitások.....	234.
9.§ Dilatációk.....	241.
10.§ Izometriák és hasonlóságok euklideszi terekben.....	242.
11.§ Merőleges affinitások.....	247.
12.§ Tenzorok.....	253.

Halmazelméleti alapfogalmak és jelölések bevezetése

Halmazon bizonyos dolgoknak, elemeknek az összességét értjük. Ha valamely h jellel jelölt dolog vagy tárgy a H halmaz eleme, akkor ezt szokásos módon a $h \in H$ képlettel jelöljük. Ha pedig a h dolog nem eleme a H halmaznak, akkor ennek jele $h \notin H$.

Egy halmazt mindig az alkotó elemek által adunk meg. Jelölésükre többféle lehetőségünk van. Ha módunk van rá, akkor az elemeket $\{ \}$ alakú zárójelben soroljuk fel. Pl. az $\{1, 2, 3\}$ halmaz elemei az 1, 2, 3 számok. A halmazok másik igen gyakori jelölési módját általánosabban az

$$A = \{x \mid T(x)\}$$

alakban írjuk, ahol $T(x)$ valamilyen tulajdonság vagy állítás. Ezt a képletet a konkrét esetekben a következő formában mondjuk: Az A halmaz azokat az x tárgyakat tartalmazza, amelyekre a $T(x)$ tulajdonság vagy állítás érvényes.

Néhány halmazműveletet vezetünk be.

Az A és B halmazok $A \cap B$ jellel jelölt metszetét, $A \cup B$ jellel jelölt egyesítését és az $A \setminus B$ különbségét a következő képletekkel definiáljuk:

$$A \cap B := \{x \mid x \in A \text{ és } x \in B\},$$

$$A \cup B := \{x \mid x \in A \text{ vagy } x \in B\},$$

$$A \setminus B := \{x \mid x \in A \text{ és } x \notin B\}.$$

Megjegyezzük még, hogy a $:=$ jelet mindig "definíció szerint egyenlő" értelemben alkalmazzuk.

Az üres halmazon azt a halmazt értjük, amelynek egyetlen eleme nincs, és jelölésére a $\emptyset$ jelet használjuk. Az A és B halmazokat diszjunktak mondjuk, ha $A \cap B = \emptyset$. Az A halmazt a B halmaz részalmazának mondjuk, ha $A \cap B = A$. A részalmaz jelölésére a $\subseteq$ jelet alkalmazzuk.

Ha valamely A halmazt olyan A_i , $i \in I$, (ahol az I halmaz az u.n. index halmaz) részalmazokra bontunk, amelyek nem üresek, páronként diszjunktak valamint egyesítésük lefedi az A halmazt, akkor az A_i halmaz rendszerről azt mondjuk, hogy osztályozza az A alaphalmazt.

Még egy további fontos halmazműveletet definiálunk, a Descartes szorzás vagy más szóval a direkt szorzás műveletét. Ennek jelölésére a $\times$ jelet használjuk.

Az $a \in A$ és $b \in B$ elemeket tekintve az (a, b) alakú kifejezést rendezett elempárnak nevezzük. Az $a \in A$ elem az u.n. első elem a b pedig a második elem. Ezek után az $A \times B$ Descartes szorzat elemeit az összes (a, b) alakú rendezett elempárok alkotják, tehát

$$A \times B := \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

Példaként említjük, hogy mivel a sík pontjait egyértelműen (x, y) alakú számpárokkal írhatjuk le, ezért a sík ugy is tekinthető mint a valós számegyenesnek önmagával vett Descartes szorzata.

Most pedig a relációelméletből tekintünk át néhány alapfogalmat.

$A \subseteq H$ és G halmaz elemei között adott egy ρ reláció, ha adott a $H \times G$ egy ρ részalmaz. Ha az $a \in H$ és $b \in G$ elemekre

$(a, b) \in \rho$ teljesül, akkor azt mondjuk, hogy az elemek ρ relációban állnak egymással, és ennek jelölésére az $a \rho b$ jelet használjuk. Ha pedig az "a" nincs ρ relációban a b elemmel, akkor ennek jele $a \bar{\rho} b$. A ρ reláció ρ^{-1} inverz relációja az a reláció, amelyre az $a \rho^{-1} b$ pontosan akkor teljesül, ha $b \rho a$ érvényes.

A H halmaz elemei között definiált ρ relációból azt mondjuk, hogy

reflexív, ha minden $a \in H$ elemre $a \rho a$ teljesül,

szimmetrikus, ha az $a \rho b$ relációból $b \rho a$ következik,

antiszimmetrikus, ha az $a \rho b$ és $b \rho a$ relációból $a = b$ következik,

transzitiv, ha az $a \rho b$ és $b \rho c$ relációkból $a \rho c$ következik,

teljes, ha bármely két $a, b \in H$ elemre $a \rho b$ vagy $b \rho a$ teljesül.

Rendezési relációknak a reflexív, antiszimmetrikus és transzitiv relációkat nevezzük. Könnyen igazolható, hogy egy rendezési reláció inverze is rendezés, sőt egy teljes rendezés inverze is teljes rendezés.

A reflexív, szimmetrikus és transzitiv relációkat ekvivalencia relációknak nevezzük. Ilyen relációkkal később gyakran találkozunk, ezért részletesen foglalkozunk velük.

Megmutatjuk, hogy egy halmaz minden osztályozásához természetes módon egy ekvivalencia reláció rendelhető, és fordítva, minden ekvivalencia relációhoz egy osztályozás tartozik.

Először tekintsük egy H halmaz valamely $H_i, i \in I$, osztályozását. Két $a, b \in H$ elem definíció szerint ρ relációban álljon egymással, ha a két elem egy osztályba esik. Könnyen beláthatjuk, hogy

a ρ reláció ekvivalencia reláció, így minden osztályozásból természetes módon ekvivalencia relációt származtathatunk.

Most fordított esetként tekintsünk a H elemei között valamely ρ ekvivalencia relációt. Minden $a \in H$ elemre jelölje $R(a) \subseteq H$ azt a részhalmazt, amelyik az a elemmel relációban álló elemeket tartalmazza, vagyis

$$R(a) = \{x \mid x \in H \text{ és } x \rho a\}.$$

Megmutatjuk, hogy az $R(a)$, $a \in H$, részhalmazok osztályozzák a H alaphalmazt.

A reflexivitás miatt $a \in R(a)$, ezért az $R(a)$ halmazok nem üresek és lefedik az egész H halmazt. Ezért az osztályozás igazolásához csak annyit kell bizonyítanunk, hogy bármely két $R(a)$ és $R(b)$ részhalmaz vagy elemenként megegyezik, vagy pedig diszjunktak. Ennek igazolásához pedig csak annyit kell belátnunk, hogy ha az $R(a)$ és $R(b)$ halmazoknak létezik közös c eleme, akkor minden elemük közös. Valóban, ez utóbbi esetben $c \rho a$ és $c \rho b$ teljesül, így a szimmetria miatt $a \rho c$ és $c \rho b$, a tranzitivitás miatt pedig $a \rho b$, vagyis $a \in R(b)$ érvényes. De ekkor minden $x \in R(a)$ elemre $x \rho a$ és $a \rho b$, és így a tranzitivitás miatt $x \rho b$ vagyis $x \in R(b)$ következik. Ezzel beláttuk az $R(a) \subseteq R(b)$ tartalmazást. Hasonlóan adódik az $R(b) \subseteq R(a)$ reláció is, amiből a bizonyítandó $R(a) = R(b)$ azonosság következik.

A ρ ekvivalencia reláció $R(a)$, $a \in H$, osztályait ekvivalencia osztályoknak, magát az osztályozást pedig ekvivalencia osztályozásnak nevezzük. A fenti bizonyításból látható, hogy ez egyes ekvivalencia

osztályok pontosan az egymással relációban álló elemeket tartalmazzák.

Később szükségünk lesz a leképezés fogalmára is. Az A halmaznak a B halmazba való $\varphi: A \rightarrow B$ leképezésén olyan hozzárendelést értünk, amelyik az A minden x eleméhez a B halmaz egy és csak egy $\varphi(x)$ elemét rendeli. A B halmaznak azt a $\varphi(A)$ részhalmazát, amelynek elemei a $\varphi(x)$ képelemek a φ képhalmazának hívjuk. A φ leképezés ráképezés, ha $\varphi(A) = B$ érvényes. Ha pedig a φ különböző elemekhez különböző elemeket rendel, akkor a leképezést kölcsönösen egyértelmű-nek mondjuk. A kölcsönösen egyértelmű ráképezéseket bijekcióknak, egy halmaz önmagára képező bijekcióit pedig a halmaz transzformációinak nevezzük.

Egy halmaz legegyszerűbb transzformációja az identikus leképezés, amelynél minden elemhez önmagát rendeljük. Ennek jelölésére az id jelet alkalmazzuk.

Egy $\varphi: A \rightarrow B$ bijekció $\varphi^{-1}: B \rightarrow A$ inverzén azt a bijekciót értjük, amelyik minden $y \in B$ elemhez azt az $x \in A$ elemet rendeli, amelyre $\varphi(x) = y$ teljesül.

Vezessük még be a függvénykompozíció vagy függvénysszorzás fogalmát is. Ha $\varphi: A \rightarrow B$ és $\lambda: B \rightarrow C$ két leképezés, akkor ennek

$$\lambda \varphi: A \rightarrow C$$

szorzatán azt a leképezést értjük, amelyik minden $x \in A$ elemhez a $\lambda \varphi(x) := \lambda(\varphi(x)) \in C$ elemet rendeli. A leképezések között ez a szorzásművelet asszociatív, hiszen a $\varphi: A \rightarrow B$, $\gamma: B \rightarrow C$, $\lambda: C \rightarrow D$ leképezések szorzatában nyilvánvaló módon elvégezhetők a

$$\lambda(\gamma \varphi)(x) = \lambda(\gamma(\varphi(x))) = (\lambda \gamma)(\varphi(x))$$

átzárójelozések.

Végezetül az algebra néhány alapfogalmát tekintjük át.

A H halmazon valamely kétfélelmező $\ast$ műveletén egy $\ast: H \times H \rightarrow H$ alakú függőséget értünk, amelyik a H két a és b eleméhez a H halmazon $a \ast b$ elemet rendel.

A $\ast$ művelet kommutatív, ha minden $a, b \in H$ elemre

$$a \ast b = b \ast a$$

teljesül, és asszociatív, ha minden $a, b, c \in H$ elemre

$$(a \ast b) \ast c = a \ast (b \ast c)$$

érvényes. Valamely $e \in H$ elemet a $\ast$ műveletre nézve egységelem-nek mondunk, ha minden $a \in H$ elemre

$$e \ast a = a \ast e = a$$

teljesül. Világos, hogy valamely $\ast$ műveletnek legfeljebb egy egységelem lehet. Ugyanis ha e_1 és e_2 két egységelem, akkor triviálisan

$$e_1 = e_2 \ast e_1 = e_2$$

áll, hiszen az első azonosság igazolásához az e_2 elemet a másodikhoz pedig az e_1 elemet kell egységelemnek tekintetünk. Ez pedig pontosan az egyértelműséget igazolja.

Most tegyük fel, hogy a $\ast$ műveletre nézve létezik az e egységelem. Ekkor valamely h elemnek h^{-1} inverzén olyan elemet értünk, amelyre

$$h \ast h^{-1} = h^{-1} \ast h = e$$

érvényes.

Megmutatjuk, hogy asszociatív műveletre nézve egy elemnek legfeljebb egy inverze létezik. Valóban, ha h_1^{-1} és h_2^{-1} a h két inverze, akkor

$$h_1^{-1} = h_1^{-1} * e = h_1^{-1} * (h * h_2^{-1}) = (h_1^{-1} * h) * h_2^{-1} = e * h_2^{-1} = h_2^{-1}$$

adódik, ami állításunkat igazolja.

Egy halmazt csoportnak nevezünk, ha olyan kétváltozós művelet definiált benne, amelyik asszociatív, létezik egységelem és bármely elemének létezik inverze. Kommutatív csoportokat Abel csoportok-nak nevezzük.

Nyilvánvaló, hogy a valós számok $\mathbb{R}$ halmaza az összeadás műveletére nézve csoportot, sőt Abel csoportot alkot. Hasonlóan Abel csoportot képeznek a nullától különböző valós számok a szorzás műveletére nézve. További kevésbé triviális példát egy tetszőleges halmaz transzformációi szolgáltatják, amik között műveletként a leképezés-szorzást tekintjük. Mint láttuk ez a művelet asszociatív, az identikus leképezés az egységelem, valamint az is nyilvánvaló hogy egy transzformáció algebrai értelemben vett inverze nem más mint a függvényteni értelemben definiált inverz. Tehát egy halmaz transzformációi a leképezésszorzásra nézve valóban csoportot alkotnak, amit teljes transzformáció csoportnak vagy permutáció csoportnak is nevezünk. Világos, hogy a permutáció csoportok általában nem Abel csoportok.

Rögzítsünk le a $(H, *)$ csoportban két $a, b \in H$ elemet.

Ekkor az

$$a * x = b \quad \text{ill.} \quad x * a = b$$

egyenletek az x ismeretlenre nézve egyértelműen megoldhatók, mégpedig a megoldásokat az

$$x = a^{-1} * b \quad \text{ill.} \quad x = b * a^{-1}$$

elemek adják. Ez utóbbi két egyenletről azt is mondjuk, hogy az előttük szereplő egyenletekből az $a \in H$ elemmel a megfelelő oldalról történő átszorzással adódtak.

Végezetül a részcsoporth fogalmát definiáljuk.

Ha a (H, κ) csoportban valamely $H' \subseteq H$ részhalmazból sem a csoport művelet, sem az invertálás művelete nem vezet ki, akkor a H' szintén csoportot alkot a κ műveletre nézve. A (H', κ) csoportot a (H, κ) csoport részcsoporthjának nevezzük.

Példaként említiük, hogy az egész számok az összeadásra nézve részcsoporthot alkotnak a valós számok között.

Valamely halmazban a teljes transzformáció csoport részcsoporthjait a halmaz transzformáció csoportjainak nevezik.

1. FEJEZET

AZ EUKLIDESZI GEOMETRIA AXIOMATIKUS TÁRGYALÁSÁRÓL

A geometria a matematika egyik legősibb ága. Első nyomait már az ősi mezopotámiai és egyiptomi kultúrákban is megtalálhatjuk, de igazi, mai értelemben vett tudománnyá a görögök fejlesztették. Alexandriai Euklidesz i.e. 300 körül tizenhárom könyvben gyűjtötte össze az akkori geometria összes eredményét. Elemek című munkája szigorú dedukciós tárgyalási módjával igen nagy hatással volt a geometria későbbi fejlődésére. A múlt században F. Gauss (1777-1855), Bolyai János (1802-1860), N.I. Lobacsevszkij (1792-1856), G.F.B. Riemann (1826-1866), J.H. Poincaré (1854-1912), Félix Klein (1849-1925) és mások nem-euklideszi geometriákkal kapcsolatos vizsgálatai szükségessé tették a geometria alapjainak felülvizsgálatát. Ezt a feladatot D. Hilbert (1862-1943) hajtotta végre századunk elején. Az általa megalkotott axióma-rendszert az euklideszi geometria Hilbert-féle axiómáinak nevezik.

Nem törekedhetünk arra, hogy az euklideszi és a különböző nem-euklideszi geometriáknak szigorú axiomatikus felépítését adjuk. Ehelyett itt csak egy rövid felépítési lehetőséget írunk le, hogy a geometria alapfogalmai tiszták és érthetők legyenek. Célunk még egy "lista" elkészítése is azokról a szemléletes, egyszerű tényekről, amelyek habár nem axiómák, a tárgyalást mégis rájuk építjük. Ezek közül többet bizonyítás nélkül közlünk, és csak arra világítunk rá, hogy hogyan épülnek be egy axiomatikus felépítés hierarchiájába.

1. § A sík axiomatikus tárgyalásáról

Minden axiomatikusan tárgyalt elmélet bizonyos alapelemeket, alapfogalmakat adottnak tételez fel, és definiálatlanul hagy. De adottnak tekint ezek között az alapelemek között bizonyos relációkat is. Egy axiomatikusan kiépített elméletben az axiómák pontosan azt rögzítik, hogy az alapelemek között milyen tulajdonsággal rendelkező relációkat tekintünk. A sík felépítésénél alapelemek a pontok és az egyenesek. Ezért adottnak tételezünk fel egy $\mathcal{P}$ halmazt, amelynek elemeit pontoknak nevezzük, és adottnak tételezünk fel egy $\mathcal{L}$ halmazt, amelynek elmei a $\mathcal{P}$ bizonyos részhalmazai, és ennek elemeit egyeneseknek nevezzük.

Ha a $g \in \mathcal{L}$ egyenesre és a $P \in \mathcal{P}$ pontra $P \in g$ teljesül, akkor azt mondjuk, hogy a P pont illeszkedik a g egyenesre, vagy a g egyenes illeszkedik a P pontra. Ha több pont közös egyenesre illeszkedik, akkor a pontokat kollineárisnak nevezzük.

A $(\mathcal{P}, \mathcal{L})$ rendszer az illeszkedési axiómákat kielégíti, ha a rendszerben igazak a következő állítások.

I_1 Létezik legalább két különböző egyenes, és bármely egyenesre legalább két különböző pont illeszkedik.

I_2 Két különböző pontra egy és csak egy egyenes illeszkedik.

Két egyenes párhuzamosnak mondunk, ha pontonként megegyeznek, vagy nincs közös pontjuk. A párhuzamosság jelölésére a $g_1 \parallel g_2$ jelet használjuk. A nem párhuzamos egyeneseket metszőknek nevezzük, és jelölésükre a $g_1 \nparallel g_2$ jelölést alkalmazzuk.

Ezek után a párhuzamosság axiómáját vezetjük be.

I_3 Minden g egyeneshez és P ponthoz pontosan egy P pontra illeszkedő, a g egyenessel párhuzamos egyenes létezik.

Ezekből az axiómákból könnyen igazolhatók a két egyenes kölcsönös helyzetére vonatkozó tétel. Eszerint két egyenes vagy párhuzamos vagy pedig egyetlen pontban metszik egymást.

Valóban, ha a két egyenes nem párhuzamos, vagyis metszők, akkor csak egy pontban metszhetik egymást, mert ellenkező esetben az I_2 axióma miatt egybeesnének, és párhuzamosak lennének.

Hasonló egyszerűséggel igazolható, hogy a párhuzamosság mint reláció ekvivalencia reláció. Ennek a ténynek a bizonyítását az olvasóra bizzuk.

Az eddig említett tételek lehetővé teszik, hogy az irány fogalmát logikailag kielégítő módon vezessük be. Irányoknak definíció szerint a párhuzamossági reláció ekvivalencia osztályait nevezzük.

Most pedig az axiómák következő csoportjára az u.n. rendezési axiómákra térünk át.

R_1 Bármely g egyenesen adott két egymással inverz teljes rendezés.

Az R_1 axióma szemléletesen annyit jelent, hogy minden egyenes pontjai két egymással inverz módon sorrendbe soroltak. A rendezések jelölésére a $\leq$, ill. ennek inverzére a $\geq$ jelet alkalmazzuk. Ha valamely g egyenesen az egyik rendezést kiválasztjuk (jelben $(g, \leq)$ vagy $(g, \geq)$), akkor a g egyenest rendezettnek vagy pedig irányított-nak mondjuk. Ha az irányított $(g, \leq)$ egyenes P és Q pontjára

$P \leq Q$ áll, akkor azt mondjuk, hogy a Q pont követi a P pontot, vagy a Q a P után van a G egyenesen az adott rendezésben.

Az egyenesek rendezettségé lehetővé teszi a közrefogás, a szakasz és a félegyenes fogalmak bevezetését.

Az $A; B \in \Pi$ pontokról azt mondjuk, hogy a P pontot közre fogják, ha a P az A, B pontokra illeszkedő G egyenesre /vagy egyenesekre/ illeszkedik, és ezen a egyenesen bármelyik $\leq$ rendezést kiválasztva vagy $A \leq P$ és $P \leq B$ vagy pedig $B \leq P$ és $P \leq A$ teljesül. Könnyen megmutatható, hogy a közrefogás független a G egyenes rendezésének választásától.

Az A és B pontok közé eső pontokat az A, B végpontu szakasznak nevezzük, és $\overline{AB}$ jellel jelöljük. Ha csak AB jelet írunk, akkor ez mindig a pontokra illeszkedő egyenest jelöli, feltéve, hogy $A \neq B$ is áll.

Tekintsünk most egy $(G, \leq)$ rendezett egyenest és azon egy P pontot. Ez a pont az egyenest két félegyenesre bontja, mégpedig az egyik félegyenes pontjait a pontot megelőző a másikat pedig a pontot követő pontok alkotják. Itt is könnyen kimutatható, hogy a két félegyenes a G rendezésének választásától függetlenül egyértelműen meghatározott.

A háromszögeket ABC alakban felírt ponthármasokkal definiáljuk, ahol a pontokat csucsoknak nevezzük. Ha a csucsok között nem tüntetünk ki sorrendet, akkor a háromszöget irányítatlannak, ha pedig sorrendet tüntetünk ki

közöttük, akkor irányítottnak mondjuk. A csucsk két sorrendjéről azt mondjuk, hogy ugyanazt az irányítást, vagy körüljárást definiálják, ha a csucsk sorrendje páros permutációban különbözik egymástól. Azonnal látható, hogy minden háromszöghöz pontosan két irányítás vagy más szóval körüljárás tartozik. A pontos definíció szerint egy háromszöget akkor nevezünk irányítottnak, ha a két körüljárás valamelyikét kitüntetjük. A későbbi szóhasználatban háromszögön mindig irányítatlant értünk és az irányitottságot külön jelezzük.

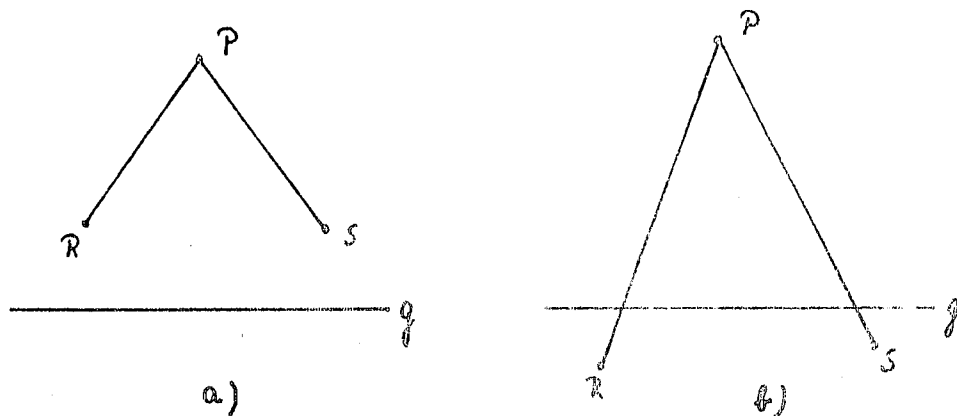
Valamely ABC háromszögben az $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ és $\overline{CA}$ szakaszokat oldalaknak hívjuk. Egy háromszöget nem-elfajuló-nak mondunk, ha csucsai nem kollineárisak és elfajulónak, ha a csucsk kollineárisak.

Ezek után a második rendezési axiómát is bevezetjük.

R_2 /Pasch axióma/ Ha valamely g egyenes az ABC háromszög egyik csucsára sem illeszkedik, de az egyik oldalát metszi, akkor pontosan még egy másik oldalt metsz.

Pasch axiómájának egyik legfontosabb következménye, hogy segítségével bevezethető a félsík fogalma. Tekintsünk ugyanis egy g egyenest és vegyük ki ennek pontjait a Π pontok halmazából, vagyis tekintsük a $\Pi \setminus g$ halmazt. Ezek között a pontok között vezessük be a következő relációt. Két pontról akkor mondjuk, hogy relációban áll egymással, ha az őket összekötő szakasz nem metszi a g .

egyenest. Ez a reláció nyilvánvalóan reflexív és szimmetrikus. De Pasch axiómája miatt tranzitív is, hiszen ha g nem metszi az $\overline{RP}$ és $\overline{PS}$ szakaszokat, akkor nem metszheti az $\overline{RS}$ szakaszt sem /ld. az a ábrát/. Így a tekintett reláció valóban tranzitív is, tehát ekvivalencia reláció. Ennek ekvivalencia osztályait nyílt félsíkoknak nevezzük.



Azt is könnyen beláthatjuk, hogy egy egyeneshez legfeljebb két nyílt félsík tartozik. Valóban, legyen $P \notin g$ egy pont, és $C(P)$ az a félsík, amelyik ezt a pontot tartalmazza, és legyenek az R és S pontok olyanok, hogy ne tartozzanak ebbe a félsíkba. Ekkor a g egyenes a $\overline{PR}$ és $\overline{PS}$ szakaszokat metszi, így Pasch axiómája miatt nem metszheti az $\overline{RS}$ szakaszt. Tehát az R és S pontok ugyanabba a félsíkba tartoznak és az összes $C(P)$ félsíkba nem tartozó pont /amennyiben ez a halmaz nem üres/, a másik félsíkot alkotja.

Megjegyezzük, hogy az eddigi axiómákból nem igazolható, hogy minden egyeneshez pontosan két félsík tartozik.

Ez az állítás csak olyan további feltételek mellett lenne igazolható, mint például a következő: Minden rendezett egyenesen bármely pont előtt is és után is létezik tőle különböző pont. Ezt a tulajdonságot később majd a folytonossági axióma biztosítja, így ez után az axióma után a két félsík létezése is igazolható lesz.

A soron következő metrikus axiómákban azt tesszük fel, hogy minden két P, Q ponthoz egy $|PQ|$ jellel jelölt távolság /valós szám/ adott a következő tulajdonságokkal.

M_1 $|PQ| \geq 0$ és $|PQ| = 0$ pontosan akkor, ha $P = Q$.

M_2 $|PQ| = |QP|$, vagyis a távolság szimmetrikus.

M_3 Minden P, Q, R ponthármasra a $|PQ| + |QR| \geq |PR|$ u.n. háromszög-egyenlőtlenség érvényes, és az egyenlőség pontosan akkor érvényes, ha $Q \in \overline{PR}$.

M_4 /Folytonossági axióma/ Minden $(g, \leq)$ rendezett egyeneshez, $P \in g$ ponthoz és $\lambda \geq 0$ valós számhoz létezik $Q \in g$ pont, amelyre $P \leq Q$ és $|PQ| = \lambda$ teljesül.

Nyilvánvaló, hogy az M_4 axiómában szereplő Q pont egyértelműen meghatározott.

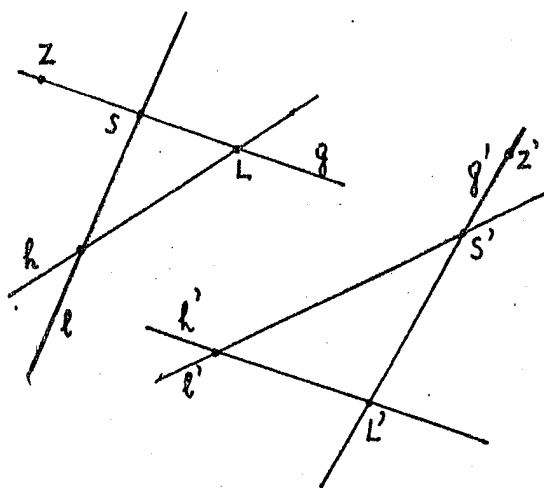
A pontok egy $\alpha: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ leképezését izometriának nevezzük, ha megőrzi a pontok távolságát. Nyilvánvaló, hogy az izometriák kölcsönösen egyértelmű leképezések.

1.1.1 | Az izometriák szakaszt szakaszba, félegyenest félegyenesbe, egyenest egyenesbe transzformálnak. Az

| izometriák bijekciók.

Bizonyítás: Tekintsünk először egy $\overline{PQ}$ szakaszt, és annak egy R pontját. Ekkor az M_3 axióma miatt $|PR| + |RQ| = |PQ|$ teljesül, és így a távolságtartás miatt az $|\alpha(P) \alpha(R)| + |\alpha(R) \alpha(Q)| = |\alpha(P) \alpha(Q)|$ egyenlőséget kapjuk. Ismét az M_3 axiómából kapjuk, hogy az $\alpha(R)$ pont az $\overline{\alpha(P) \alpha(Q)}$ szakaszra esik, és így a $\overline{PQ}$ szakasz képe az $\overline{\alpha(P) \alpha(Q)}$ szakasz. A távolságtartásból és a folytonossági axiómából nyilvánvaló, hogy egy szakasz a teljes képszakaszra képeződik le kölcsönösen egyértelműen.

A fenti bizonyításból az is adódik, hogyha a P és S pontok a Q pontot közrefogják, akkor az $\alpha(P)$ és $\alpha(S)$ pontok közrefogják az $\alpha(Q)$ pontot. Ebből pedig nyilvánvalóan következik, hogy a P pontból kiinduló és a Q pontot is tartalmazó félegyenes az $\alpha(P)$ pontból kiinduló és az $\alpha(Q)$ pontot tartalmazó félegyenesbe transzformálódik.



Azt is kapjuk, hogy a PQ egyenes a teljes $\alpha(P) \alpha(Q)$ egyenesre képeződik le kölcsönösen egyértelműen.

Legyen h és l két különböző egyenes is jelölje h' és l' a képegyneseket. Egy Z' ponton keresztül húzzunk egy olyan g' egyenest, amelyik a

a h' és l' egyeneseket a két különböző S' és L' pontokban metszi. Mivel ezeknek a pontoknak létezik az $S \in l$ és $L \in h$ ösképe, ezért az egész g egyenes az $SL = g$ egyenes képeként áll elő. Így a Z' pontot is a $Z \in g$ pont képeként kapjuk. Ezzel megmutattuk, hogy a síkban minden Z pont képpont, tehát az α izometria valóban bijekció. $\square$

Később gyakran használjuk a fixpont, invariáns egyenes és fixegyenes elnevezéseket.

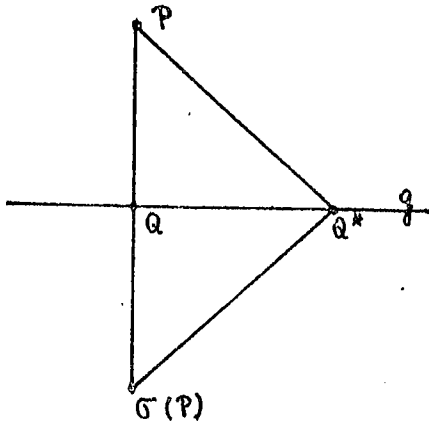
Egy pontot egy leképezés fixpontjának nevezzük, ha a leképezésnél önmagára képződik le. Hasonlóan, ha egy leképezés egy egyenest önmagára képez le, akkor az egyenest invariáns egyenesnek nevezzük. Ha pedig a leképezésnél az egyenes pontonként fixen marad, akkor ezt fixegyenesnek mondjuk.

Most a sík axiómái közül az utolsót fogalmazzuk meg. Ezt az axiómát tengelyes tükrözések axiómájának nevezzük.

T_1 Minden g egyeneshez létezik olyan τ_g ^{involutív} izometria, amely a g egyenest fixen hagyja, a hozzá tartozó két félsíkot pedig felcseréli egymással.

Az olyan transzformációt, amelynek négyzete az identikus leképezés, involutív transzformációnak, vagy röviden involúciónak nevezzük.

1.1.2 Minden g egyeneshez a tengelyes tükrözések axiómájában szereplő leképezés egyértelműen meghatározott, ~~és involutív~~.



Bizonyítás: Legyen σ olyan leképezés amelyik eleget tesz az axióma feltételeinek, és tekintsünk egy $P \notin g$ pontot. A $\overline{P\sigma(P)}$ szakasz egy Q pontban metszi a g egyenest, mivel a P és $\sigma(P)$ pontok különböző félsíkba esnek.

Legyen $Q^* \in g$ tetszőleges, de a Q ponttól különböző pont. Mivel a Q és Q^* pontok fixen maradnak a σ leképezésnél, ezért a háromszög-egyenlőtlenségből az alábbiak adódnak:

$$2|PQ| = |P\sigma(P)| < |PQ^*| + |\sigma(P)Q^*| = 2|PQ^*|.$$

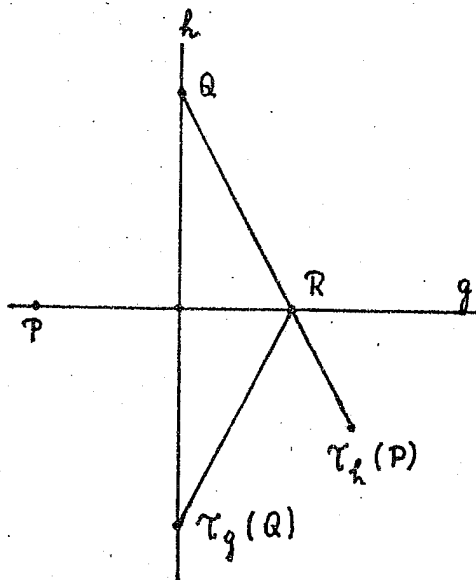
Igy a Q pont az az egyértelműen meghatározott pont a g egyenesről, amely legközelebb esik a P ponthoz. De ebből következően a $\sigma(P)$ kép-pont is egyértelműen meghatározott, hiszen illeszkedik a PQ egyenesre, és a Q felezi a $\overline{P\sigma(P)}$ szakaszt. Ezzel az unicitást bebizonyítottuk.

Jelölje τ_g ezt az egyértelműen meghatározott leképezést. Ennek τ_g^3 köbe is kielégíti az axióma feltételeit, ezért $\tau_g^3 = \tau_g$ és így $\tau_g^2 = \text{id}$ adódik. Tehát a τ_g valóban involúció. □

A fenti tétel szerint egyértelműen meghatározott τ_g leképezést a g egyenesre vonatkozó tengelyes tükrözésnek nevezzük. Ennek segítségével két egyenes merőlegességét definiáljuk.

A h egyenes definíció szerint merőleges a g egyenesre /jelben $h \perp g$ /, ha $h \neq g$ és $\tau_g h = h$ érvényesek.

1.1.3 | Az egyenesek között a merőlegesség szimmetrikus reláció.



Bizonyítás: Tegyük fel,

hogy $h \perp g$; vagyis $h \neq g$ és $\tau_g h = h$ érvényesek.

Az állításhoz azt kell igazolnunk, hogy $\tau_h g = g$.

Indirekt feltevésként tegyük fel, hogy létezik olyan $P \in g$ pont, amelyre a $\tau_h(P)$ pont nem illeszkedik a g egyenesre, hanem az ábra szerinti félsíkra esik. Jelöljük még ki egy

$Q \in h$ pontot is, amely a g egyenesre vonatkozóan ellenkező félsíkba esik, mint a $\tau_h(P)$ pont, és így a $\overline{Q\tau_h(P)}$ szakasz az R pontban metszi a g egyenest. Most vegyük észre, hogy a $\tau_h \tau_g \tau_h$ izometria a $\tau_h(P)$ pontot fixen hagyja, a Q pontot pedig a $\tau_g(Q)$ pontba viszi, tehát $|Q\tau_h(P)| = |\tau_g(Q)\tau_h(P)|$. Ugyanakkor $|RQ| = |\tau_g(Q)R|$ is teljesül, mert a τ_g tükrözés az R pontot fixen hagyja.

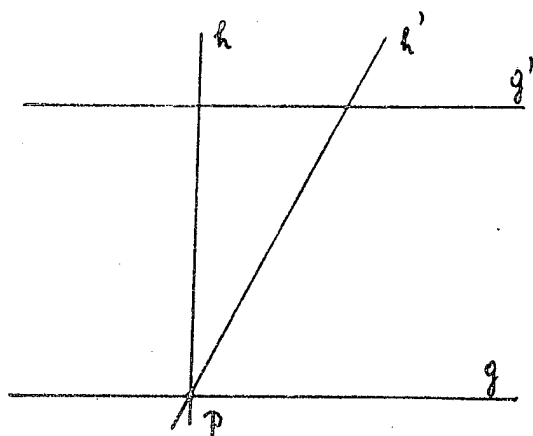
Ezért

$$\begin{aligned} |\tau_g(Q)R| + |R\tau_h(P)| &= |RQ| + |R\tau_h(P)| = |Q\tau_h(P)| = \\ &= |\tau_g(Q)\tau_h(P)|, \end{aligned}$$

ami ellentmond a háromszög-egyenlőtlenségnek. Tehát a fenti P pont nem létezik, és ezzel a merőlegesség szimmetriáját bebizonyítottuk. $\square$

1.1.4 Tetszőleges g egyenesre tetszőleges P ponton keresztül pontosan egy merőleges egyenes bocsátható.

Bizonyítás Ha $P \notin g$, akkor a merőleges egyenesnek illeszkednie kell a különböző P és $\tau_g(P)$ pontokra, tehát a P ponton át a g egyenesre legfeljebb egy merőleges egyenes bocsátható. Ugyanakkor a $P \tau_g(P)$ egyenes invariáns a τ_g tükrözésnél, mivel a tükrözés a P és $\tau_g P$ pontokat felcseréli. Tehát a $P \tau_g(P)$ egyenes a tételnek megfelelő, és az állítást a $P \notin g$ esetre bebizonyítottuk.



Most pedig tekintsük a $P \in g$ esetet, és tekintsünk egy g egyenessel párhuzamos g' egyenest is ($g \neq g'$). A P külső ponttól bocsátsunk a g' egyenesre merőleges h egyenest. A merőlegesség szimmetriája miatt $\tau_h(g') = g'$ is érvényes. Mivel az izometriák

párhuzamos egyeneseket párhuzamos egyenesekbe visznek, ezért a $\tau_h(g)$ tükrözött egyenes is párhuzamos a g' egyenessel, és áthalad a P ponton a g egyenessel együtt.

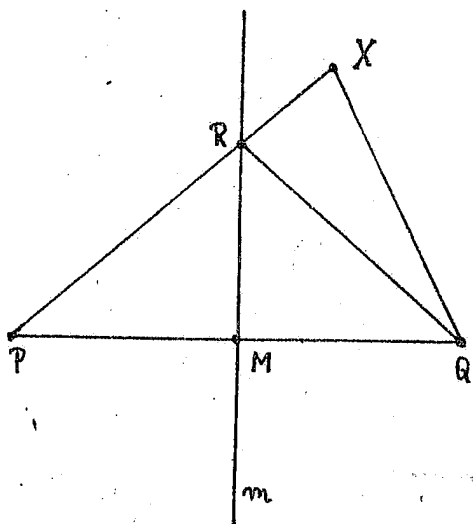
A párhuzamossági axióma miatt $\tau_h(g) = g$, vagyis a h egyenes merőleges a g egyenesre is.

De a P ponton keresztül több merőleges egyenes nem haladhat. Mert ha h egy másik merőleges egyenes lenne, akkor a fenti gondolatmenet megismétlésével azt kapjuk, hogy a h' merőleges a g' egyenesre is, és így a P külső pontból a g' egyenesre két merőleges egyenest bocsáthatnánk. Ez pedig első megállapításunk alapján lehetetlen. $\square$

A tétel legegyszerűbb következménye, hogy két egyenes párhuzamos, ha közös egyenesre merőlegesek.

Tekintsünk most egy $\overline{PQ}$ szakaszt és legyen M ennek a felezőpontja. A $\overline{PQ}$ szakaszra az M pontban állított merőlegest a szakasz felezőmerőlegesének nevezzük.

1.1.5 A felezőmerőleges azoknak a pontoknak a halmaza, amelyek a szakasz két végpontjától azonos távolságra helyezkednek el.



Bizonyítás: Az m felezőmerőleges pontjai a két végponttól azonos távolságra helyezkednek el, mivel a τ_m tükrözés a P és Q pontokat felcseréli egymással. De a sík többi pontja a P és Q pontoktól különböző távolságra vannak. Pl. ha az X pontot az ábra szerint választjuk, akkor a

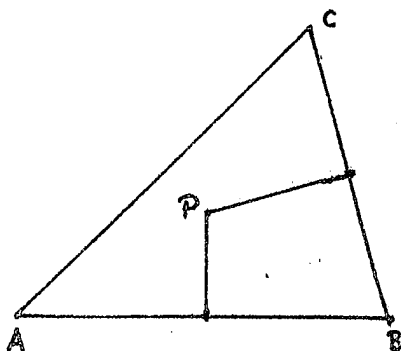
háromszög-egyenlőtlenségből a következők adódnak:

$$|PX| = |PR| + |RX| = |RQ| + |RX| > |XQ|.$$

Ezzel állításunkat bebizonyítottuk. $\square$

Még további két állítást igazolunk.

Először bebizonyítjuk, hogy egy nem-elfajuló háromszög oldalfelező merőlegesei közös ponton haladnak át.



Ha a háromszög ABC, akkor először huzzuk meg az $\overline{AB}$ és $\overline{BC}$ oldalak felezőmerőlegeseit. Ezek nem lehetnek párhuzamosak, mert ha párhuzamosak lennének, akkor korábbi tételünk alapján $AB \parallel BC$ is teljesülne. De a

párhuzamossági axióma alapján $AB = BC$ adódna, ami ellentmondás, mert a háromszög nem-elfajuló. Tehát a két felezőmerőleges metszi egymást egy P pontban. Mivel $|PA| = |PB| = |PC|$ azonosságok teljesülnek a felezőmerőlegesre vonatkozó tétel alapján, így ismét ugyanerre a tételre hivatkozva a P pont illeszkedik az $\overline{AC}$ szakasz felezőmerőlegesére. Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

Valamely O ponttól azonos $r > 0$ távolságra lévő pontok halmazát O középpontu, r sugaru körnek nevezzük. Azokat a P pontokat, amelyekre $|OP| < r$ teljeül a kör belsejének, és azokat a P pontokat, amelyekre $|OP| > r$

teljesül a kör külsejének mondjuk. Egy ponthalmazt korlá-
tosnak mondunk, ha egy kör belsejébe foglalható.

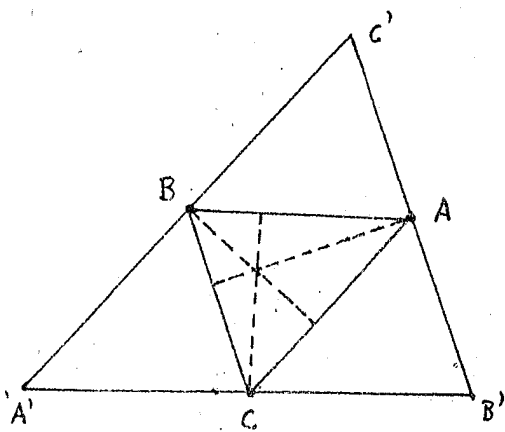
Az előző tételben szereplő P pont nyilvánvalóan nem
más, mint a háromszög köré írható egyetlen kör középpont-
ja.

Parallelogrammán különböző pontokból álló rendezett
 A, B, C, D pontnégycset értünk, ahol a szemköztés AB és
 CD ill. AC és BD oldalegyenesek párhuzamosak.

Vegyük észre, hogy a definícióban a sorrend valóban
fontos, mert a fenti sorrend mellett csak a $BCDA, CDAB,$
 $DABC$ sorrendeknél párhuzamosak a szemköztés oldalak. Erről
a négy esetről azt mondjuk, hogy ugyanazt a parallelogram-
mát definiálják.

A háromszög csucsából a szemköztés oldalra bocsátott
merőlegest magasságvonalnak nevezzük.

Most pedig térjünk rá egy másik igen közismert állítás
bizonyítására, t.i. arra, hogy egy nem-elfajuló háromszög
magasságvonalai is egy közös pontban metszik egymást.



Ezt a tételt rendszerint
úgy bizonyítják, hogy a csucso-
kon keresztül a szemközti oldal-
lal párhuzamosokat húznak, majd
azt veszik észre, hogy az eredeti
háromszög magasságvonalai az
újonnan keletkező háromszögnek az
oldalfelező merőlegesei. Így az előző tétel miatt a

bizonyítást befejezettnek tekinthetjük.

Azonban a bizonyítás részletes vizsgálatánál látható, hogy közben felhasználtuk azt a szemléletes ténnyt, hogy a paralelogrammokban a szemközti oldalak azonos hosszúságúak. Ennek az egyszerű ténynek a bizonyítása az eddigiek alapján korántsem egyszerű, és csak a párhuzamos eltolások vizsgálata után igazoljuk.

A leirt axiómákról el kell mondanunk, hogy ezek sok tekintetben különböznek a Hilbert féle axiómáktól. Egyrészt a Hilbert féle felépítésben nem a távolságot, hanem az egybevágóságokat /izometriákat/ vezetik be axiomatikusan és csak ezek után vezetik le a távolságmérést. De igen lényeges különbség még az is, hogy a Hilbert féle axiómákban az itteniekkel ellentétben a párhuzamossági axióma utolsóként szerepel. Másrészt az itt leirt axiómákat nem a lehető leggyengébb alakjukban mondtuk ki, ami egy gyorsabb tárgyalásmenetet tett lehetővé. Egyébként az itt leirt rövid bevezetővel éppen az volt szándékunk, hogy a tárgykörben használatos terminológiát minél gyorsabban - és mégis pontosan - bevezessük. Hasonlóan járunk el a tér tárgyalásánál is.

2. § A tér axiomatikus tárgyalásáról

A tér axiomatikus tárgyalásánál az alapelemek szerepét a pontok, egyenesek és a síkok játsszák. Ezek halmazát rendre a $\mathcal{P}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{S}$ jelekkel jelöljük. Az egyeneseket

is és a síkokat is a pontok részhalmazainak tekintjük. A $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{S})$ rendszerről azt mondjuk, hogy teljesíti az illeszkedési axiómákat ha a rendszerben igazak a következő állítások.

- I_1 Létezik három nem kollineáris pont és minden egyenesre legalább két különböző pont illeszkedik.
- I_2 Két különböző pontra pontosan egy egyenes illeszkedik.
- I_3 Három nem kollineáris pontra pontosan egy sík illeszkedik.
- I_4 Ha egy egyenes két különböző pontja egy síkra illeszkedik, akkor az egyenes minden pontja a síkra illeszkedik.
- I_5 Ha két síknak van közös pontja, akkor létezik legalább még egy ettől különböző közös pont is.
- I_6 Létezik négy olyan pont, amely nem illeszkedik közös síkra.

Két síkot párhuzamosnak mondunk, ha vagy pontonként megegyeznek vagy nincs közös pontjuk. Hasonlóan, egy sík és egy egyenes párhuzamos ha vagy a metszetük üres, vagy pedig a sík az egyenest tartalmazza. Két egyenest párhuzamosnak mondunk, ha közös síkra illeszkednek és ebben a síkban síkbeli értelemben párhuzamosak. Két közös síkra illeszkedő, de nem párhuzamos egyenest metszőnek nevezünk, végül két egyenes kitérő, ha nem illeszkednek közös síkra.

A soron következő axióma a párhuzamossági axióma.

I₇ Minden g egyeneshez és P ponthoz pontosan egy egyenes létezik, amely párhuzamos a g egyenessel, és illeszkedik a P pontra.

Ezekből az axiómákból rendre beláthatjuk a térelemek kölcsönös helyzeteire vonatkozó következő állításokat. Ezeket a tételeket bizonyítás nélkül közöljük, és igazolásukat az olvasóra bizzuk.

Két egyenes vagy párhuzamos, vagy kitérő, vagy pedig pontosan egy pontban metszik egymást.

Egy egyenes és egy sík, vagy párhuzamos, vagy pontosan egy pontban metszik egymást.

Két sík vagy párhuzamos, vagy egy és csak egy egyenesben metszik egymást.

Három síknak vagy nincs közös pontja, vagy egyetlen közös pontjuk van, vagy pedig egy közös egyenesre illeszkednek. Ha nincs közös pont, akkor a páronként alkotott metszésvonalak egymással párhuzamosak.

Az egyenesek közti és a síkok közti párhuzamossági reláció ekvivalencia-reláció.

Egy síkhoz egy adott ponton keresztül egy és csak egy párhuzamos sík fektethető.

Ha a h és g kitérő egyenesek, akkor a h egyenesre egy és csak egy a g egyenessel párhuzamos sík illeszthető. Ez utóbbi síkot a h pontjain keresztül haladó és a g egyenessel párhuzamos egyenesek feszítik ki.

A rendezési axiómák a síkbeli esethez hasonlóak.

R_1 Minden egyenesen adott két egymással adott inverz teljes rendezés.

R_2 Minden síkban igaz a síkbeli Pasch axióma.

A síkbeli esethez teljesen hasonló módon bevezethetők a szakasz, félegyenes, félsík sőt a féltér fogalmak. Pl. az utóbbi fogalmat a következőképpen vezethetjük be.

Ha Δ egy sík, akkor a $\mathbb{P} \setminus \Delta$ ponthalmazban definiáljuk a következő relációt. A P és Q pontokról akkor mondjuk, hogy relációban állnak, ha $\overline{PQ} \cap \Delta = \emptyset$ teljesül. Pasch axiómájából /a síkbeli esethez hasonlóan/ igazolható, hogy ez a reláció ekvivalencia-reláció, amelynek legfeljebb két ekvivalencia-osztálya van. Sőt a következőkben bevezetett folytonossági axiómából igazolható, hogy pontosan két ekvivalencia-osztály van, és ezeket a Δ által meghatározott két nyílt féltérnek nevezzük.

Az M_1, M_2, M_3 és M_4 /folytonossági axióma/ térbeli metrikus axiómák a síkbeli alakjukkal teljesen megegyeznek, így ezeket nem ismételjük meg. A térben is az $\alpha : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$ leképezést izometriának vagy egybevágóságnak mondjuk, ha megőrzi a pontok távolságát. Ezekről szintén igazolható, hogy egyenest egyenesbe, szakaszt szakaszba, félegyeneset félegyenesbe, síkot síkba, félsíkot félsíkba, végül féltérrel féltérbe transzformálnak, és az izometriák bijekciók.

Most pedig a térbeli axiómák közül az utolsót ismertetjük.

T_1 Síkra tükrözések axiómája.

Minden Δ síkhoz létezik olyan τ_Δ ^{involutív} (izometrikus) leképezés, amelyik a Δ pontjait fixen hagyja és a Δ által meghatározott két féltérrel egymással felcseréli.

Itt is könnyen igazolható, hogy a síkra tükrözés egyértelműen meghatározott. ~~és involutív.~~

A síkra tükrözések segítségével először a különböző merőlegességi viszonyokat definiáljuk.

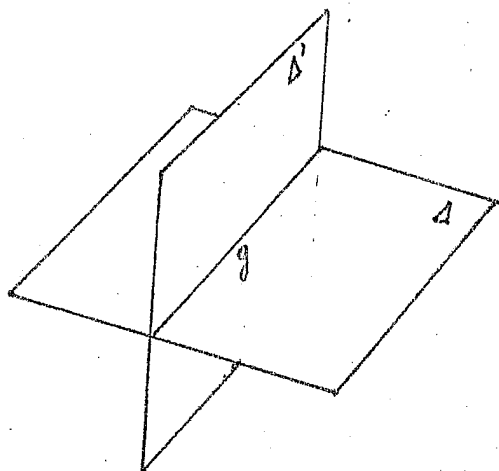
A Δ_1 sík merőleges a Δ_2 síkra, ha $\Delta_1 \neq \Delta_2$ és $\tau_{\Delta_1}(\Delta_2) = \Delta_2$ érvényes.

A h egyenes merőleges a Δ síkra, ha a h nem illeszkedik a Δ síkra és $\tau_\Delta(h) = h$.

A síkok közti merőlegességről - a síkbeli esethez hasonló bizonyítással - belátható, hogy szimmetrikus reláció. Bizonyítás nélkül közöljük azt az állítást is, hogy bármely Δ síkhoz és g egyeneshez, g egyenesre illeszkedő és a Δ síkra merőleges sík létezik, és ha g nem merőleges Δ -ra, akkor ez egyértelmű. Hasonlóan, minden Δ síkhoz egy P ponton keresztül egy és csak egy merőleges egyenes bocsátható.

Ezeknek a tételeknek a segítségével egy fontos kérdést tisztázhatunk, t.i. azt, hogy a tér síkjai euklideszi síkok-e? A sík axiómáin végigtekintve látható, hogy a tér síkjaiban a tengelyes tükrözések axiómája kivételével minden axióma nyilvánvalóan teljesül. A tükrözések axiómájának

vizsgálatához pedig tekintsünk a Δ síkban egy g egye-



nest, és legyen Δ' a g egyenesre illeszkedő és a Δ síkra merőleges sík. Ekkor a $\tau_{\Delta'}$ tükrözés a Δ síkot invariánsan hagyja, és benne olyan izometriát indukál, ami eleget tesz a tengelyes tükrözések axiómájának. Ezzel

beláttuk, hogy a tér síkjai valóban euklideszi síkok.

Végezetül az egyenesek közti merőlegesség fogalmát definiáljuk.

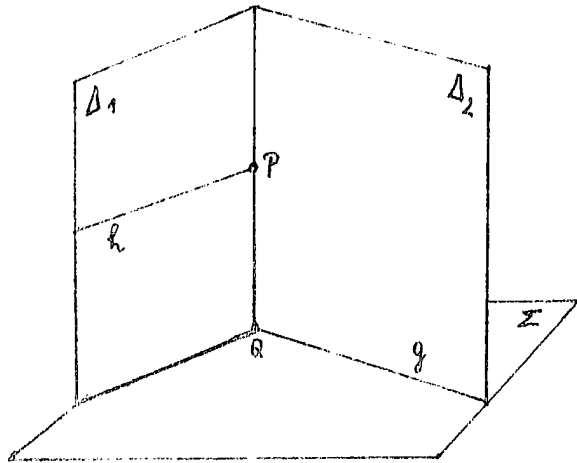
Két közös síkra illeszkedő egyenest merőlegesnek mondunk, ha ott síkbeli értelemben merőlegesek. Végül a két kitérő h és g egyenes esetében a h definíció szerint merőleges a g egyenesre, ha valamely $P \in g$ pontra illeszkedő, és a h egyenessel párhuzamos egyenes síkbeli értelemben merőleges a g egyenesre.

Az egyenesek közti merőlegességről is belátható, hogy szimmetrikus reláció. Ennek bizonyításával sem foglalkozunk.

Tekintsünk két kitérő egyenest. Az olyan egyenest, amelyik mindegyiket merőlegesen metszi a két kitérő egyenes normáltranszverzálisának nevezzük.

1.2.1 | Bármely két kitérő egyeneshez pontosan egy normáltranszverzális létezik.

Bizonyítás: Jelölje h és g a két kitérő egyenest, és



jelölje Σ a g egyenesre illeszkedő és a h egyenessel párhuzamos síkot, valamint Δ_1 és Δ_2 a h ill. g egyenesre illeszkedő és a Σ síkra merőleges síkot. Akkor a h nem párhuzamos a Δ_2 síkkal, mert ellenkező esetben a h párhuzamos lenne a g egyenessel.

Ezért a h egyetlen P pontban metszi a Δ_2 síkot. Hasonlóan, a g egyetlen Q pontban metszi a Δ_1 síkot. Ekkor a Δ_1 és Δ_2 síkok $l = PQ$ metszésvonala a h és a g egyeneseket merőlegesen metszi, hiszen merőlegesen metszi a Σ síkot. Tehát legalább egy normáltranszverzális létezik.

De több normáltranszverzális nem létezhet, mert ha l' olyan egyenes, amely merőlegesen metszi a h és g egyeneseket, akkor merőlegesen metszené a Σ síkot is, és így benne van a Δ_1 és Δ_2 síkokban egyaránt. Ezért csak a Δ_1 és Δ_2 síkok l metszésvonala lehet. $\square$

Valamely O ponttól azonos $r > 0$ távolságra lévő pontok halmazát O középpontu r sugaru gömbnek nevezzük. Az $|OP| < r$ feltételt teljesítő P pontok a gömb

belsejét, az $|OP| < r$ feltételt teljesítő pontok pedig a gömb külsejét alkotják. Valamely ponthalmazt korlátnak nevezünk, ha egy gömb belsejébe foglalható.

tükrözés szorzataként állitható elő.

Bizonyítás Ha $\alpha \neq \text{id}$, és $Q \neq \alpha(Q)$, valamint m a $Q \alpha(Q)$ szakasz felezőmerőlegese, akkor a $\tau_m \alpha$ izometriánál a Q pont fixen marad, ezért a $\tau_m \alpha = \text{id}$,
 $\tau_m \alpha = \tau_{m_1}$, $\tau_m \alpha = \tau_{m_2} \tau_{m_1}$ esetek lehetségesek. Ezekből étszorozással a tétel állítását kapjuk. $\square$

A fenti tétel-sorozat után még két megjegyzést teszünk.

2.1.5 Ha két tengelyes tükrözésre $\tau_{m_1} = \tau_{m_2}$ érvényes,
 akkor $m_1 = m_2$.

Bizonyítás Ha $\tau_{m_1} = \tau_{m_2}$ esetén $m_1 \neq m_2$ állna, akkor válasszunk $A_1, A_2 \in m_1$, $A_3 \in m_2$ nem-kollineáris pontokat. Ezek az $\alpha = \tau_{m_1} = \tau_{m_2}$ izometriánál helyben maradnak, ezért $\alpha = \text{id}$ teljesülne, ami ellentmondás. $\square$

2.1.6 Két tengelyes tükrözés szorzata nem fejezhető ki egyetlen tengelyes tükrözéssel.

Bizonyítás Induljunk ki a $\tau_g = \tau_m \tau_m$ indirekt feltevésből. Ha a három tengely közül kettő egybeesne, akkor egy tengelyes tükrözés az identikus leképezés lenne. Ezért a három tengely páronként különböző, és

$$\tau_g(m') = \tau_m \tau_m(m') = \tau_m(m')$$

is adódik. Válasszunk egy $P \in m'$, $P \notin g$, $P \notin m$ pontot. Mivel

$$\tau_g(P) = \tau_m(P) := Q,$$

ezért a g is és az m is a $\overline{PQ}$ szakasz felezőmerőlegese, és így az $m = g$ ellentmondásra jutottunk. $\square$

2. § Konjugálás

Az α és a β izometriákból képezett
 $\alpha \beta \alpha^{-1}$

izometriát a β izometriának az α izometriával képezett konjugáltjának nevezzük.

2.2.1 Tetszőleges α izometriára és τ_m tengelyes tükrözésre az

$$(2.2.1) \quad \alpha \tau_m \alpha^{-1} = \tau_{\alpha(m)}$$

azonosság, valamint tetszőleges $\beta = \tau_{m_k} \tau_{m_{k-1}} \dots$

$\dots \tau_{m_1}$ izometriára az

$$(2.2.2) \quad \alpha \beta \alpha^{-1} = \tau_{\alpha(m_k)} \tau_{\alpha(m_{k-1})} \dots \tau_{\alpha(m_1)}$$

azonosság érvényes.

Bizonyítás Az $\alpha \tau_m \alpha^{-1}$ izometriánál az $\alpha(m)$ egyes pontjai fixpontok, hiszen minden $Q \in m$ pontra

$$\alpha \tau_m \alpha^{-1} \alpha(Q) = \alpha \tau_m (Q) = \alpha(Q)$$

teljesül. Ezért a fixponttétel miatt

$$\alpha \tau_m \alpha^{-1} = \tau_{\alpha(m)} \quad \text{vagy} \quad \alpha \tau_m \alpha^{-1} = \text{id}$$

adódik. De a második azonosságból a $\tau_m = \text{id}$ ellentmondásra jutunk, amivel a (2.2.1) azonosságot bebizonyítottuk.

A (2.2.2) azonosság pedig az

$$\alpha \beta \alpha^{-1} = \alpha \tau_{m_k} \tau_{m_{k-1}} \dots \tau_{m_1} \alpha^{-1} = \alpha \tau_{m_k} \alpha^{-1} \alpha \tau_{m_{k-1}} \dots \alpha \tau_{m_1} \alpha^{-1}$$

átalakítással a (2.2.1) formulából nyerhető. □

2.2.2 | Ket tengelyes tükrözés szorzatában a tényezők
| pontosan akkor cserélhetők fel, ha a tengelyek
| megegyeznek vagy merőlegesek egymásra.

Bizonyítás Az $m = m'$ esetben a $\tau_m \tau_{m'} = \tau_m \tau_m$
azonosság nyilvánvalóan érvényes. Ha pedig $m \perp m'$, akkor
a (2.2.1) alapján

$$\tau_m \tau_{m'} = \tau_{\tau_m(m')} \tau_m = \tau_m \tau_m,$$

amivel a tétel első felét bebizonyítottuk.

Fordítva, ha $\tau_m \tau_{m'} = \tau_m \tau_m$ teljesül, akkor is-
mét a (2.2.1) formula felhasználásával a

$$\tau_{m'} = \tau_m \tau_m \tau_m = \tau_{\tau_m(m')}$$

azonosság, amiből pedig az $m' = \tau_m(m')$ azonosság adódik.
Ebből pedig a bizonyítandó $m = m'$ vagy az $m \perp m'$ relá-
ció következik. □

2.2.3 | Az izometriák merőleges egyeneseket merőleges egye-
| nesekbe transzformálnak.

Bizonyítás Ha $a \perp b$, akkor nemcsak a τ_a , τ_b izo-
metriák, de a $\tau_{\alpha(a)} = \alpha \tau_a \alpha^{-1}$, $\tau_{\alpha(b)} = \alpha \tau_b \alpha^{-1}$ kon-
jugált izometriák is felcserélhetők, ugyanis

$$\begin{aligned} \tau_{\alpha(a)} \tau_{\alpha(b)} &= \alpha \tau_a \alpha^{-1} \alpha \tau_b \alpha^{-1} = \alpha \tau_a \tau_b \alpha^{-1} = \\ &= \alpha \tau_b \tau_a \alpha^{-1} = \alpha \tau_b \alpha^{-1} \alpha \tau_a \alpha^{-1} = \tau_{\alpha(b)} \tau_{\alpha(a)}. \end{aligned}$$

Mivel $\alpha(a) \neq \alpha(b)$, ezért $\alpha(a) \perp \alpha(b)$ következik
minden α izometriára. □

3. § Speciális síkizometriák

Forgások

Két metsző egyenesre vonatkozó tengelyes tükrözés szorzatát forgásnak nevezzük. Az $\alpha = \tau_m \tau_m$ forgásnál az $m \cap m'$ metszéspontot a forgás centrumának nevezzük. Az $m = m'$ esetben az $\text{id} = \tau_m \tau_m$ izometriát is forgásnak tekintjük, amelynél minden pont centrumnak tekinthető.

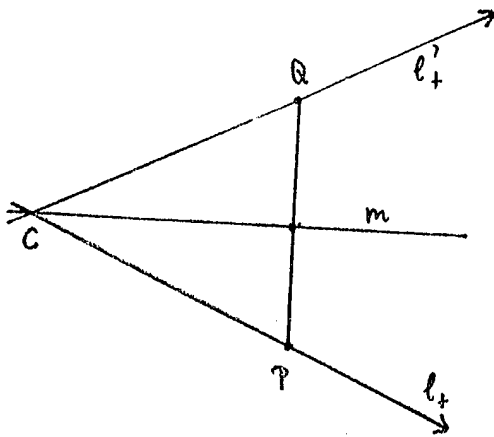
2.3.1 Ha egy α forgásnál egy centrumon kívüli P pont fixpont, akkor $\alpha = \text{id}$.
Két azonos C kezdőpontu l_+, l'_+ félegyeneshez pontosan egy C centrumu φ forgás létezik, amelyre $\varphi(l_+) = l'_+$ teljesül.

Bizonyítás Az első esetben a fixponttételéből az

$$\alpha = \text{id} \text{ vagy } \alpha = \tau_g$$

következik, ahol g a P pontot a centrummal összekötő egyenest jelöli. Az $\alpha = \tau_g$ esetben két tengelyes tükrözés szorzata egy tengelyes tükrözés lenne, ami 2.1.6 tétel miatt lehetetlen. Tehát $\alpha = \text{id}$, amivel az első állítást bebizonyítottuk.

A második állítás igazolásához olyan $P \in l_+$ és $Q \in l'_+$ pontokat tekintsünk, amelyre $|CP| = |CQ| \neq 0$ teljesül. Ha $P = Q$, akkor a tételnek megfelelő egyetlen forgás az identikus leképezés. A $P \neq Q$ esetben jelölje m a



$\overline{PQ}$ szakasz felező merőlegesét. Mivel az m egyenes áthalad a C ponton /hiszen $|CP| = |CQ|$ /, ezért az egzisztenciát a $\varphi = \tau_m \tau_l$ forgás biztosítja, ahol l az l_+ tartóegyenese.

Az unicitás igazolásához, ha φ^* tetszőleges, a tételnek

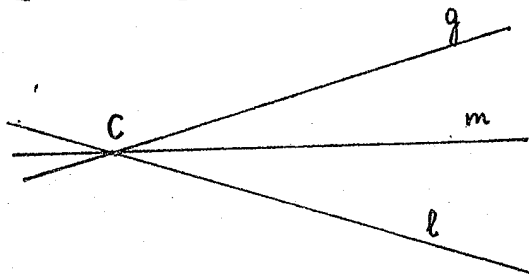
megfelelő forgás, akkor tekintsük először a $\tau_m \varphi^*$ leképezést. Mivel a φ^* a P pontot csak a Q pontba viheti, ezért a $\tau_m \varphi^*$ izometria a P pontot fixen hagyja, és így a fixponttételekből

$$\tau_m \varphi^* = \text{id} \text{ vagy } \tau_m \varphi^* = \tau_l$$

adódik. Az első azonosság a 2.1.6 tétel miatt nem állhat, tehát $\varphi^* = \tau_m \tau_l$, ami az unicitást igazolja. $\square$

2.3.3 Három közös pontra illeszkedő egyenesre vonatkozó tükrözések szorzata tengelyes tükrözés.

Bizonyítás Az $\alpha = \tau_l \tau_m \tau_g$ izometriánál a $C = l \cap m \cap g$ közös pont fixpont, ezért az α izometriára



vonatkozóan a $\tau_l \tau_m \tau_g = \text{id}$ vagy $\tau_l \tau_m \tau_g = \tau_p$ vagy $\tau_l \tau_m \tau_g = \tau_r \tau_s$ esetek lehetségesek, ahol $C \in p$ ill. $C = r \cap s$. Ezek közül az

első egyenlet a 2.1.6 tétel miatt nem állhat. Hasonlóan ellentmondáshoz jutunk az utolsó egyenletnél is. Ugyanis ekkor a g egyenesre

$$\tau_l \tau_m(g) = \tau_l \tau_m \tau_g(g) = \tau_r \tau_s(g)$$

érvényes, vagyis a $\tau_l \tau_m$ ill. a $\tau_r \tau_s$ forgások a g egyenest ugyanabba az egyenesbe forgatják. Ezért az előző tétel miatt $\tau_l \tau_m = \tau_r \tau_s$, amiből pedig a $\tau_g = \text{id}$ ellentmondás következik. $\square$

A forgások tengelyes tükrözések szorzatával való kifejezésénél a tengelyek nem egyértelműen meghatározottak. Erre vonatkozóan a következő tétel érvényes.

2.3.3 Valamely forgást két tengelyes tükrözés szorzataként kifejezve akár az első, akár a második centrumon áthaladó tengely tetszőlegesen választható, és a másik tengely ezekhez már egyértelműen meghatározott.

Bizonyítás Az $\alpha = \tau_x \tau_y$ forgáshoz vegyünk fel egy tetszőleges a $C = x \cap y$ centrumra illeszkedő u egyenest, és tekintsük a

$$\tau_u \tau_x \tau_y = \tau_u \alpha$$

izometriát. Az előző tétel miatt $\tau_u \alpha$

$$\tau_u \alpha = \tau_{v^*}, \quad C \in v^*$$

alakba írható, amiből átszorzással $\alpha = \tau_u \tau_{v^*}$. A v^* tengely egyértelműsége, valamint a másik tengely megválasztására vonatkozó állítás hasonlóan adódik. $\square$

2.3.4 | Ha l, m, g közös pontra illeszkedő egyenesek,
 akkor
 (2.3.1) $\tau_l \tau_m \tau_g = \tau_l \tau_m \tau_l.$

Bizonyítás A 2.3.2 tétel miatt

$$\tau_l \tau_m \tau_g = \tau_v,$$

és így

$$\tau_l \tau_m \tau_g \tau_l \tau_m \tau_g = \tau_v \tau_v = \text{id}.$$

A τ_l, τ_m, τ_g leképezésekkel rendre balról átszorzva a (2.3.1) formula adódik. $\square$

2.3.5 | Az azonos centrumu forgások a leképezésszorzásra
 nézve Abelcsoportot alkotnak.

Bizonyítás Ha a közös centrumu α_1, α_2 forgásokat

$$\alpha_1 = \tau_x \tau_y, \quad \alpha_2 = \tau_z \tau_x$$

alakban fejezzük ki, akkor az

$$\alpha_2 \alpha_1 = \tau_z \tau_x \tau_x \tau_y = \tau_z \tau_y$$

szorzat ismét $C = x \cap y \cap z$ centrumu forgás.

A csoportaxiómák triviálisan teljesülnek, hiszen a leképezésszorzás asszociatív, az id leképezés az egységelem, valamint az $\alpha = \tau_x \tau_y$ inverze az $\alpha^{-1} = \tau_y \tau_x$ C centrumu forgás.

Még megmutatjuk, hogy ezek között a leképezések között a leképezésszorzás kommutatív.

Az $\alpha_1 = \tau_x \tau_y, \alpha_2 = \tau_z \tau_x$ forgásokra a (2.3.1) formula alapján a következőket írhatjuk.

$$\begin{aligned}\alpha_1 \alpha_2 &= \tau_x(\tau_y \tau_z \tau_x) = \tau_x(\tau_x \tau_z \tau_y) = \tau_z \tau_y = \\ &= \tau_z \tau_x \tau_x \tau_y = \alpha_2 \alpha_1,\end{aligned}$$

ami az állítást igazolja. $\square$

2.3.6 Ha $\alpha = \tau_x \tau_y$ és α^* közös centrumu forgások, akkor

$$(2.3.2) \quad \alpha = \tau_{\alpha^*(x)} \tau_{\alpha^*(y)},$$

vagyis egy forgás tengelyeit a centrum körül tetszőlegesen elforgatva a forgás nem változik.

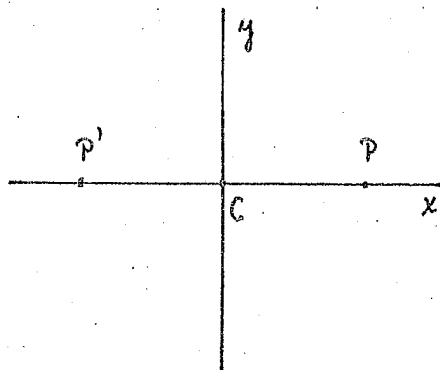
Bizonyítás A kommutativitásból és a konjugálásra vonatkozó formulából

$$\alpha = \alpha^* \alpha \alpha^{*-1} = \tau_{\alpha^*(x)} \tau_{\alpha^*(y)}$$

adódik, ami az állítást bizonyítja. $\square$

A forgások speciális típusa az u.n. centrális tükrözés. Ezt két egymásra merőleges tengelyre vonatkozó tükrözés szorzataként definiáljuk.

Mindenek előtt megmutatjuk, hogy a centrális tükrözések a C centrumuk által egyértelműen meghatározottak.



Ugyanis a fenti állítás szerint az egymást a C pontban merőlegesen metsző x, y tengelyeket tetszőlegesen és tetszőleges sorrendben választva a $\tau_x \tau_y = \tau_y \tau_x$ izometria egyértelműen

meghatározott. Ezt az egyértelműen meghatározott izometriát a τ_c jellel jelöljük.

Nyilvánvaló, hogy a centrális tükrözések involúciók, ugyanis

$$\tau_c^2 = \tau_x \tau_y \tau_x \tau_y = \tau_x \tau_x \tau_y \tau_y = \text{id}$$

érvényes.

Ha a P pont valamelyik tükröző tengelyre illeszkedik, akkor azonnal látható, hogy a C pont felezi a P és a $P' = \tau_c(P)$ pontokat összekötő szakaszt. De a tengelyek mindig választhatók úgy, hogy valamelyik tengely éppen a kiszemelt P ponton haladjon át. Így általánosan is igaz, hogy a C felezi a $\overline{PP'}$ szakaszt.

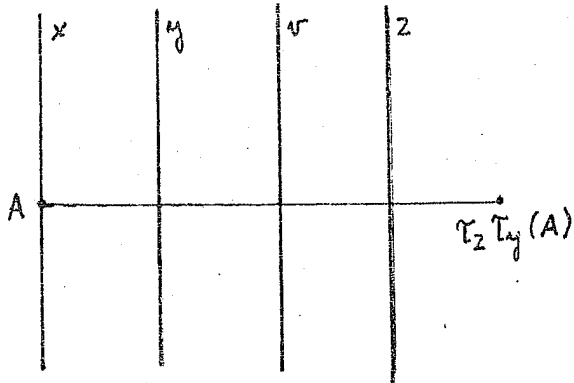
Ez utóbbi állításból azonnal következik, hogy a centrális tükrözések a centrumon áthaladó egyeneseket invariánsan hagyják, a centrumra nem illeszkedő egyeneseket pedig önmagukat nem metsző és így önmagukkal párhuzamos egyenesekbe transzformálják.

Párhuzamos eltolások

Két párhuzamos tengelyre vonatkozó tükrözés szorzatát párhuzamos eltolásnak nevezzük. A párhuzamos eltolások vizsgálatát egy segédállítás bizonyításával kezdjük.

2.3.7 | Három párhuzamos tengelyre vonatkozó tükrözés
| szorzata egy velük párhuzamos tengelyre vonatko-
| zó tükrözés.

Bizonyítás Legyen x, y, z a három tengely és $A \in x$.



Továbbá jelölje v az A és $T_z T_y(A)$ pontok felező merőlegesét. Nyilvánvaló, hogy v párhuzamos a három tengellyel, és független az A pont választásától.

Ezért a

$$T_v T_z T_y T_x = \alpha$$

izometriánál az x egyenes minden pontja fixpont. Ezért

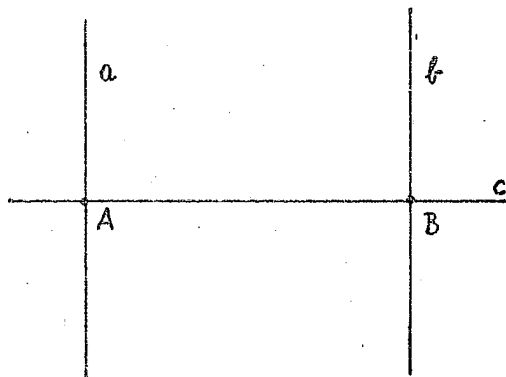
$\alpha = \text{id}$ vagy $\alpha = T_x$. De az utóbbi egyenletből

$T_y T_x = T_v$ következne, ezért $\alpha = \text{id}$, és

$$T_z T_y T_x = T_v$$

következik. □

2.3.8 Két centrális tükrözés szorzata párhuzamos eltolás, és minden párhuzamos eltolás két centrális tükrözés szorzataként fejezhető ki.



Bizonyítás $A: T_A, T_B$

centrális tükrözésekhez jelölje c az AB egyenest és fejezzük ki ezeket a tükrözéseket a

$$T_A = T_c T_a, T_B = T_b T_c$$

alakban. Ekkor $a \parallel b$, és így a

$$\tau_B \tau_A = \tau_b \tau_c \tau_c \tau_a = \tau_b \tau_a$$

szorzat párhuzamos eltolás.

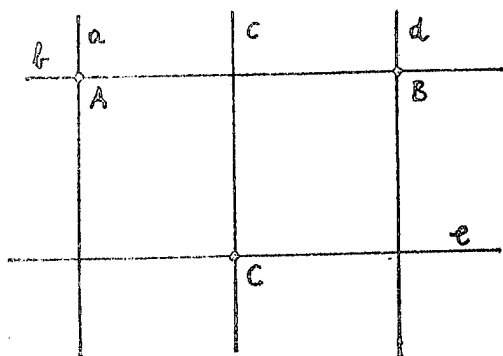
Fordítva, valamely $\tau_b \tau_a$ párhuzamos eltoláshoz válasszunk a két tengelyre merőleges c tengelyt, amelyik az a, b egyeneseket rendre az A, B pontokban metszi.

Ekkor

$$\tau_b \tau_a = \tau_b \tau_c \tau_c \tau_a = \tau_B \tau_A,$$

vagyis a párhuzamos eltolás két tengelyes tükrözés szorzata. $\square$

2.3.9 Három centrális tükrözés szorzata centrális tükrözés.



Az előzőek szerinti $\tau_A \tau_B$ párhuzamos eltolás. Állítsuk elő $\tau_a \tau_d$ alakban, ahol $a \parallel d$ és $A \in a, B \in d$. Állítsuk elő τ_c -t $\tau_c \tau_e$ alakban, ahol c az AB -re C -ből állított merőleges. Ekkor

$$\tau_A \tau_B \tau_C = \tau_a \tau_d \tau_c \tau_e = \tau_g \tau_e, \quad g \perp e,$$

ami az e és g metszéspontjára vonatkozó centrális tükrözés. $\square$

2.3.10 | Párhuzamos eltolások centrális tükrözések szorzatával való előállításnál akár az első centrum, akár a második tetszőlegesen választható, és a másik centrum ezekhez már egyértelműen meghatározott.

Bizonyítás Az $\alpha = \tau_X \tau_Y$ párhuzamos eltoláshoz válasszunk tetszőleges A pontot. Ekkor az előző tétel miatt

$\alpha \tau_A = \tau_X \tau_Y \tau_A = \tau_B$, $\tau_A \alpha = \tau_A \tau_X \tau_Y = \tau_{B^*}$,
vagyis $\alpha = \tau_B \tau_A$ ill. $\alpha = \tau_A \tau_{B^*}$, ami az állítást igazolja. $\square$

2.3.11 | Tetszőleges három A, B, C centrumra

$$(2.3.3) \quad \tau_A \tau_B \tau_C = \tau_C \tau_B \tau_A.$$

Bizonyítás A 2.3.9 tétel miatt

$$\tau_A \tau_B \tau_C \tau_A \tau_B \tau_C = \text{id},$$

amiből balról való átszorzásokkal a (2.3.3) formula adódik. $\square$

2.3.12 | A párhuzamos eltolások Abel-féle transzformáció csoportot alkotnak.

Bizonyítás Tetszőleges $\alpha = \tau_A \tau_B$, $\beta = \tau_B \tau_C$ párhuzamos eltolásokat tekintve az

$$\alpha \beta = \tau_A \tau_B \tau_B \tau_C = \tau_A \tau_C$$

szorzat ismét párhuzamos eltolás. Mivel az id leképezés (és egy eltolás) párhuzamos eltolás inverze is párhuzamos eltolás, ezért a

párhuzamos eltolások nyilvánvalóan transzformáció csoportot alkotnak.

Megmutatjuk, hogy ez a transzformáció csoport Abel-féle. Az előző tétel miatt

$$\begin{aligned}\beta\alpha &= \tau_B(\tau_C \tau_A \tau_B) = \tau_B \tau_B \tau_A \tau_C = \tau_A \tau_C = \\ &= \alpha\beta,\end{aligned}$$

ami az állítást igazolja. $\square$

2.3.13 Tetszőleges $\alpha = \tau_a \tau_b$, α^* párhuzamos eltolásokra

$$(2.3.4) \quad \alpha = \tau_{\alpha^*(a)} \tau_{\alpha^*(b)},$$

vagyis egy párhuzamos eltolás tengelyeit tetszőlegesen párhuzamosan eltolva a rájuk vonatkozó tükrözések szorzata nem változik.

Bizonyítás A kommutatív tulajdonságból és a konjugálásra vonatkozó formulából

$$\alpha = \alpha^* \alpha \alpha^{*-1} = \tau_{\alpha^*(a)} \tau_{\alpha^*(b)}$$

adódik, ami az állítást igazolja. $\square$

A párhuzamos eltolásokkal kapcsolatban három további megjegyzést teszünk.

2.3.14 Bármely két P, Q ponthoz pontosan egy párhuzamos eltolás létezik, amelyik a P pontot a Q pontba transzformálja.

Bizonyítás Ha $P = Q$, akkor a tételben megfogalmazott

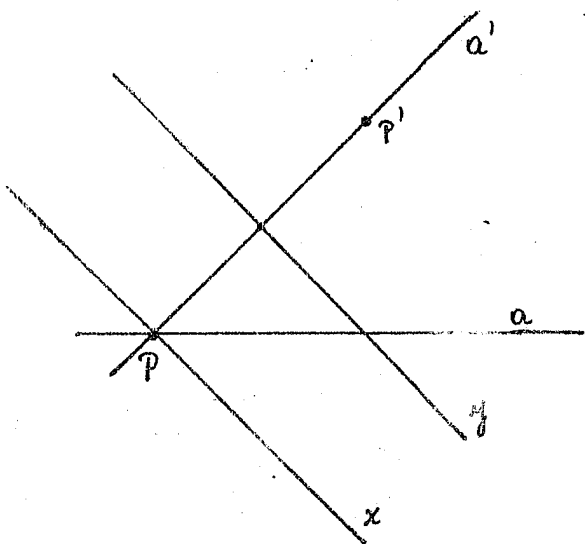
párhuzamos eltolás az id leképezés. Ugyanis ha az $\alpha = \tau_a \tau_b$ párhuzamos eltolásnál a b tengely a P pontra illeszkedik, akkor az α a P pontot pontosan akkor hagyja fixen, ha $a = b$. /A b tengely szabad választásához ld. a 2.3.10 tételt./

Ha pedig $P \neq Q$, akkor az egzisztenciát az az $\alpha = \tau_x \tau_y$ párhuzamos eltolás biztosítja, ahol x a $\overline{PQ}$ szakasz felezőmerőlegese, és $y \parallel x$ valamint $P \in y$ teljesül.

Ha φ_1 és φ_2 két olyan párhuzamos eltolás, amelyre $\varphi_1(P) = \varphi_2(P) = Q$ teljesül, akkor a $\varphi_1^{-1} \varphi_2$ párhuzamos eltolásnál a P pont fixpont, ezért $\varphi_1^{-1} \varphi_2 = \text{id}$, amiből pedig $\varphi_1 = \varphi_2$ következik. Ezzel az unicitást is igazoltuk. $\square$

2.3.15 | A párhuzamos eltolások minden egyenest önmagukkal párhuzamos egyenesbe transzformálnak.

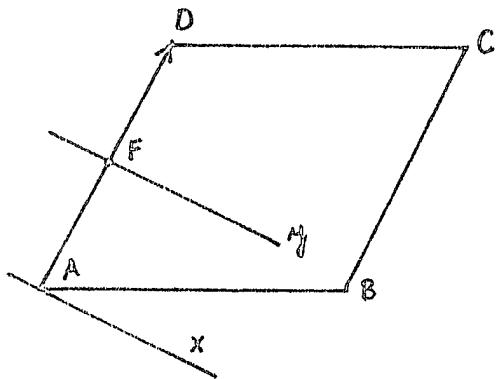
Bizonyítás



Az állítást indirekt úton igazoljuk. Ha létezik olyan a egyenes, amelyik a' képe az a egyenest egyetlen P pontban metszi, akkor a P pont P' képére $P \neq P'$ teljesül, hiszen az eltolás nem az identikus leképezés az $a \neq a'$ feltétel miatt. De az eltolás

nem más, mint a $\tau_y \tau_x$ leképezés, ahol y a $\overline{PP'}$ szakasz felezőmerőlegese, valamint az x tengelyre $P \in x$ és $x \parallel y$ teljesül. Ennél az eltolásnál az a' invariáns és így nem lehet az a képe, ami ellentmondás. Ezzel az indirekt bizonyítást befejeztük. $\square$

2.3.16 | A parallelogrammokban a szemközt eső oldalak hossza megegyezik.



Bizonyítás Tekintsük az ABCD parallelogrammát, és legyen φ az a párhuzamos eltolás, amelyik az A csúcsot a D csúcsba transzformálja. Ekkor az AB oldalegyenes képe a DC oldalegyenes, mivel a képegynes a D ponton áthalad

és párhuzamos az AB egyenessel. Az is világos, hogy az AD egyenes a φ transzformációnál invariáns, mert az AD képe is áthalad a D ponton, és az AD egyenessel párhuzamos. De a φ eltolásnál a BC egyenes is invariáns. Ugyanis ha a φ eltolást $\varphi = \tau_y \tau_x$ alakban írjuk, ahol $x \perp AD$, $y \perp AD$, $A \in x$ és az y tengely pedig tartalmazza az AD szakasz F felezőpontját, akkor az x és y tengelyek merőlegesek a BC oldalegyenesre is, hiszen az AD és DC oldalak párhuzamosak. Ezért a BC oldalegyenes is invariáns az $\tau_y \tau_x$ eltolásnál. Az eddigieket összefoglalva a B pont, amelyik az AB és BC oldalak

metszéspontja, a DC és BC oldalak metszéspontjába, vagyis a C pontba transzformálódik a φ eltolásnál. Ezért az AB szakasz képe a DC szakasz, és ebből $|AB| = |DC|$ következik. Hasonlóan igazolhatjuk az $|AD| = |BC|$ azonosságot is. $\square$

Egy sikizometriát csusztatva tükrözésnek nevezünk, ha egy párhuzamos eltolásnak és egy olyan tengelyes tükrözésnek a szorzataként áll elő, amelynek tengelye az eltolás irányával párhuzamos. Tehát egy csusztatva tükrözés $\alpha = \tau_x \tau_b \tau_a$ alakban írható, ahol $a \parallel b$ és $x \perp a$, $x \perp b$. A merőlegesség miatt $\alpha = \tau_b \tau_a \tau_x$ is írható.

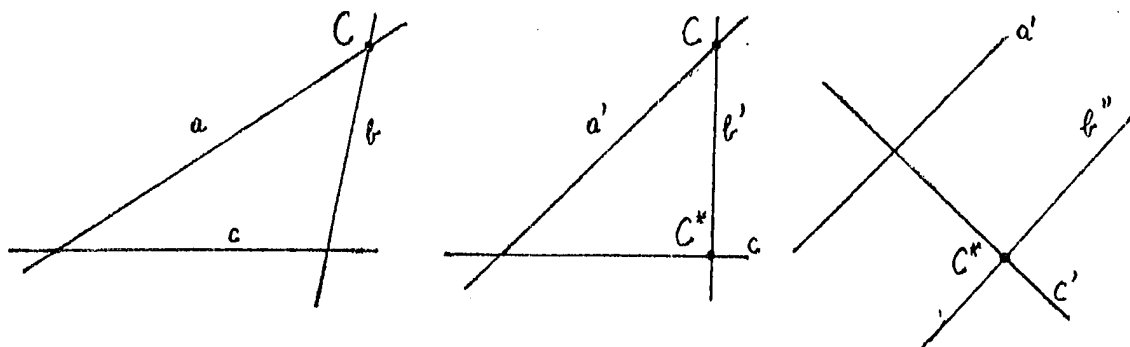
4. § A sikizometriák osztályozása

2.4.1 | A sikizometriák összes lehetséges típusai a tengelyes tükrözések, a párhuzamos eltolások, a forgások és a csusztatva tükrözések.

Bizonyítás A fixponttétel szerint bármely sikizometria legfeljebb három tengelyes tükrözés szorzataként állítható elő. Ha a tengelyek száma 1 vagy 2, akkor a tételben szereplő esetek közül az első három esetet kapjuk.

Ha a tengelyek száma 3, és ezek páronként párhuzamosak, vagy közös ponton haladnak át, akkor a 2.3.2 és 2.3.7. tételek alapján a tekintett izometria tengelyes

tükrözés. Ha pedig a három tengely közül az első kettő vagy a második kettő metszi egymást a C pontban, és a



harmadik tengely nem halad át ezen a közös ponton, akkor a következőképpen járunk el /az egyes lépéseket a fenti ábrák is mutatják/. Itt csak azt az esetet írjuk le, amikor az első két a és b tengely metsző, mert a másik eset teljesen hasonlóan bizonyítható.

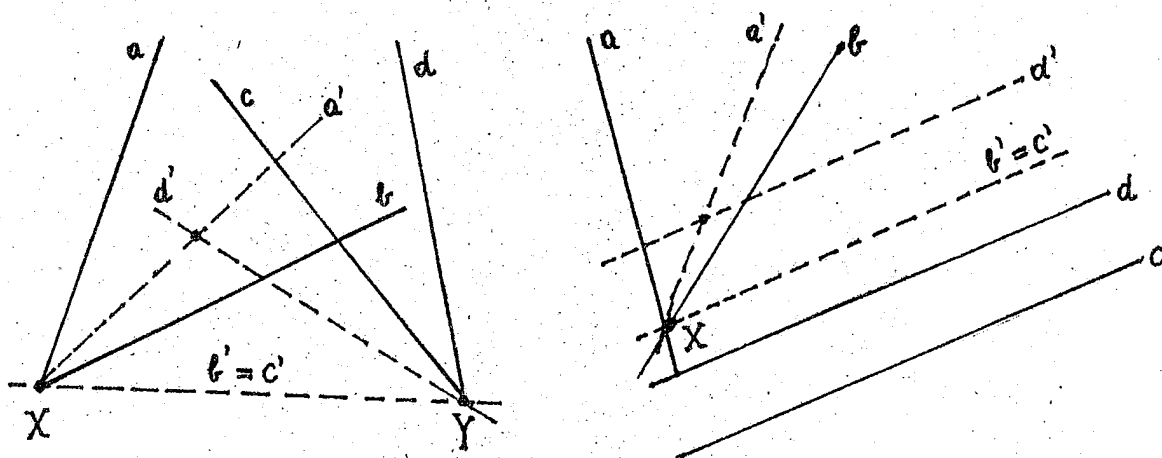
Forgassuk el az a és b tengelyeket a C körül addig, amíg a c merőlegesen áll a b tengely b' képére, majd a $C^* = b' \cap c$ pont körül forgassuk a b' és c egyeneseket abba a b'' és c' tengelyekbe, amelyekre $c' \perp a'$ teljesül. Ekkor rendre az a' , b'' és c' egyenesekre tükrözve a vizsgált izometriát kapjuk, és ez nem más mint egy csusztatva tükrözés, hiszen $a' \parallel b''$ és $c' \perp a'$, $c' \perp b''$. $\square$

A fenti tételt és annak bizonyítását arra is felhasználhatjuk, hogy a síkizometriákat a fixpontjaik alapján is felismerjük. Ugyanis, ha egy izometria pontosan egy egyenes pontjait hagyja fixen, akkor nem más, mint erre a tengelyre vonatkozó tükrözés. Ha egyetlen fixpontja van, akkor körül a centrum körül egy forgás. Végül, ha nincs fixpontja,

akkor vagy párhuzamos eltolás vagy pedig csusztatva tükrözés.

A síkizometriákat aszerint is osztályozhatjuk, hogy páros vagy páratlan számú tengelyes tükrözés szorzataként állnak elő. Először a következő állítást bizonyítjuk.

2.4.2 Két forgás szorzata forgás vagy párhuzamos eltolás.
Forgások és párhuzamos eltolások szorzata is forgás vagy párhuzamos eltolás.



Bizonyítás Ha az X körüli forgást $\alpha_1 = \tau_b \tau_a$, és az Y körüli forgást pedig $\alpha_2 = \tau_d \tau_c$ alakban állítjuk elő /ld. a bal oldali ábrát/, akkor forgassuk el az a és b tengelyeket az X körül az a', b' tengelyekbe, ill. a c és d tengelyeket az Y körül a c', d' tengelyekbe úgy, hogy a b' az Y ponton a c' pedig az X ponton haladjon át, és így b' = c' teljesüljön. Ekkor

$$\alpha_2 \alpha_1 = \tau_d \tau_c \tau_b \tau_a = \tau_d \tau_c \tau_b \tau_a = \tau_d \tau_a,$$

tehát a végeredmény forgás vagy pedig párhuzamos eltolás, annak megfelelően, hogy $d' \nparallel a'$ vagy pedig $d' \parallel a'$ teljesül.

Ha pedig az $\alpha = \tau_b \tau_a$ valamely X pont körüli forgás és a $\beta = \tau_d \tau_c$ pedig párhuzamos eltolás /ld. a jobboldali ábrét/, akkor forgassuk el az a és b tengelyeket az X körül olyan a' és b' tengelyekbe, hogy $b' \parallel d$ teljesüljön, majd toljuk el a d és c tengelyeket olyan d' , c' tengelyekbe, hogy $b' = c'$ teljesüljön. Ekkor

$$\beta\alpha = \tau_d \tau_c \tau_b \tau_a = \tau_d \tau_c \tau_b \tau_a = \tau_d \tau_a,$$

tehát a végeredmény forgás az $Y = d' \cap c'$ pont körül. $\square$

Ebből a tételből nyilvánvalóan következik, hogy négy tengelyes tükrözés szorzata két tengelyes tükrözés szorzatára redukálható, ha figyelembe vesszük azt is, hogy párhuzamos eltolások szorzata ismét párhuzamos eltolás.

- 2.4.3 | Páros számú tengelyes tükrözés szorzata két tengelyes tükrözés szorzatára redukálható.
 Páratlan számú tengelyes tükrözés szorzata nem fejezhető ki páros számú tengelyes tükrözés szorzataként.
 Páratlan számú tengelyes tükrözés szorzata 1 vagy 3 tengelyes tükrözés szorzatára redukálható.

Bizonyítás Az első állítás úgy igazolható, hogy páros számú tengelyes tükrözés szorzatában négy egymás mellett lévő tényezőt az előző tétel alapján két tengelyes tükrözés szorzatára redukálunk. Így véges lépésben az egész kifejezés két tengelyes tükrözés szorzatára redukálódik.

A második állítást indirekt uton igazoljuk. Tegyük

fel, hogy valamely $1, 2, \dots, 2n+1$, ill. $1', 2', \dots, 2m'$ jelekkel jelölt tengelyekre

$$\tau_1 \dots \tau_{2n+1} = \tau_{1'} \dots \tau_{2m'}$$

teljesül. Ebből

$$\tau_1 = \tau_{1'} \dots \tau_{2m'}, \tau_{2n+1} \dots \tau_2$$

következik, és az előző tétel szerint a jobb oldal két tengelyes tükrözés szorzata. Ez pedig ellentmond a 2.1.6 tételnek, amivel a második állítást bebizonyítottuk.

A harmadik állítás a fenti tételeknek és a fixponttételek triviális következménye. □

Páros számú tengelyes tükrözés szorzataként kifejezhető izometriákat mozgásoknak nevezzük, páratlan számú tengelyes tükrözések szorzataként kifejezhető izometriákat pedig irányításváltó, vagy pedig körüljárást váltó izometriáknak.

A mozgások nyilván maguk is csoportot alkotnak, hiszen két mozgás szorzata is mozgás, és egy mozgás inverze is mozgás. Ennek a csoportnak az elemeit a párhuzamos eltolások és a forgások alkotják.

Az irányítás fordító izometriák viszont nem alkotnak részcsoportot, mert két ilyen elem szorzata mozgás, vagyis a művelet kivezet a halmaz elemei közül. Az irányítás fordító izometriák a tengelyes tükrözések és a csusztatva tükrözések.

5. § Alakzatok egybevágósága

Két A és B ponthalmazt /alakzatot/ egybevágónak mondunk, ha létezik olyan φ izometria, amelyre $\varphi(A) = B$ teljesül. Ez a reláció az alakzatok között nyilvánvalóan ekvivalencia reláció. Jelölésére az $A \cong B$ jelet használjuk.

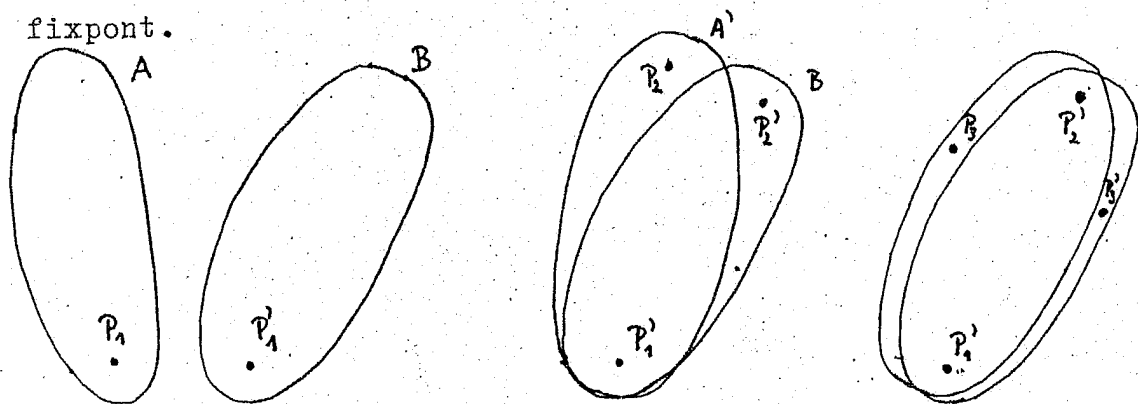
2.5.1 Az A és B alakzatok akkor és csak akkor egybevágók, ha létezik olyan /a két alakzat pontjai közötti/ $\varphi : A \rightarrow B$ ráképezés, amelyik megőrzi a pontok távolságát.

Bizonyítás Ha a két alakzat egybevágó, akkor az egybevágóságot biztosító izometriát az A ponthalmazra megszorítva, nyilván a tételben szereplő leképezéshez jutunk.

Fordítva, tegyük fel, hogy az A és B alakzatok között létezik távolságot tartó $\varphi : A \rightarrow B$ ráképezés. Ekkor ezt kiterjesztjük a sík izometriájára, és ezzel a tételt nyilván igazoltnak tekinthetjük.

Legyen $P_1 \in A$ olyan pont, amelyre $P_1 \neq \varphi(P_1)$. Ha ilyen pont nem létezik, akkor $A = B$, és a kiterjesztett izometria az identikus leképezés. Ha viszont a fenti P_1 pont létezik, akkor legyen α_1 a $\overline{P_1 \varphi(P_1)}$ szakasz felezőmerőlegesére vonatkozó tükrözés. Jelölje továbbá A' az $\alpha_1(A)$ halmazt. Ekkor a $\varphi' := \varphi \alpha_1^{-1} : A' \rightarrow B$ távolságtartó leképezés a $P'_1 = \varphi(P_1)$ pontot fixen hagyja. Legyen most $P_2 \in A'$ olyan pont, amelyre $P_2 \neq P'_1$ és

$P_2 \neq \psi'(P_2) := P_2'$ teljesül. Ha ilyen pont nincs, akkor a ψ nyilván nem más, mint az α_1 izometriának az A alakzatra vett megszorítottja, és ebben az esetben a bizonyítás kész. Ha pedig ilyen pont létezik, akkor legyen α_2 a $\overline{P_2 P_2'}$ szakasz felező merőlegesére való tükrözés, és jelölje A'' a $\psi'(A')$ alakzatot. Mivel a P_2 és P_2' a P_1' ponttól azonos távolságra helyezkednek el /hiszen a ψ' a P_1' pontot fixen hagyja/, ezért a P_1' pont az előbbi felező merőlegesén van, így a $\psi'' := \psi' \alpha_2^{-1} : A'' \rightarrow B$ távolságtartó leképezésnél a P_1' pont is, és a P_2' pont is fixpont.



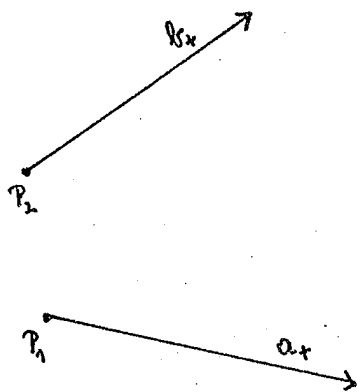
Ha $\psi'' = \text{id}$, akkor a ψ leképezés nem más, mint az $\alpha_2 \alpha_1$ izometriának az A ponthalmazra vett megszorítottja. Ha pedig $\psi'' \neq \text{id}$ teljesül, akkor legyen $P_3 \in A''$ olyan pont, amelyre $P_3 \neq \psi''(P_3) := P_3'$ teljesül. Nyilvánvaló, hogy a P_3 nem illeszkedik a $P_1' P_2'$ egyenesre. Mivel a P_1' és P_2' pontok a P_3, P_3' pontokról azonos távolságra helyezkednek el, ezért ezek a pontok a $\overline{P_3 P_3'}$ szakasz felezőmerőlegesére esnek. Legyen α_3 az erre a felező-

merőlegesre vonatkozó tükrözés, és $A''' := \varphi''(\Lambda'')$.

Ekkor a $\varphi''' := \varphi'' \alpha_3^{-1} : A''' \rightarrow B$ távolságtartó ráképezésnél a P_1', P_2' és P_3' pontok mindegyike fixen marad. De fixen marad az A''' minden Q pontja is, hiszen a φ''' távolságtartása miatt a Q és $\varphi'''(Q)$ pontok a nem kollineáris P_i' $i=1,2,3$ pontokról rendre azonos távolságra helyezkednek el. Tehát $\varphi''' = \text{id}$, és a φ nem más mint az $\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1$ izometriának az A ponthalmazra vett megszorítottja. Ezzel a bizonyítást befejeztük. $\square$

Ebből a tételből azonnal adódik, hogy két háromszög egybevágó, ha oldalaiik páronként azonos hosszúak. A háromszögegybevágóságok többi eseteit a szögfogalom bevezetése után tárgyaljuk.

2.5.2 | A síkban két a_+ , b_+ félegyeneshez pontosan egy olyan φ mozgás létezik, amelyik az a_+ félegyeneset a b_+ félegyenesre transzformálja.



Bizonyítás Az egzisztencia igazolásához legyen α az a párhuzamos eltolás, amelyre az ábra jelölései mellett $\alpha(P_1) = P_2$ teljesül, majd φ az a P_2 körüli forgás, amelyik az $\alpha(a_+)$ félegyeneset a b_+ félegyenesbe forgatja.

Ekkor a $\varphi \alpha$ mozgás a tételnek megfelelő.

Az unicitás bizonyításához legyen a φ_1 és φ_2 két megfelelő mozgás. Ekkor a $\varphi_2^{-1}\varphi_1$ mozgás az a_+ félegyenest pontonként fixen hagyja, ezért $\varphi_2^{-1}\varphi_1 = \text{id}$ és így $\varphi_1 = \varphi_2$ következik. $\square$

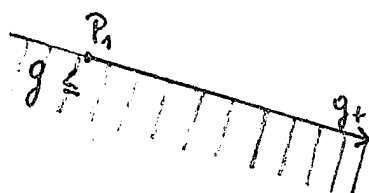
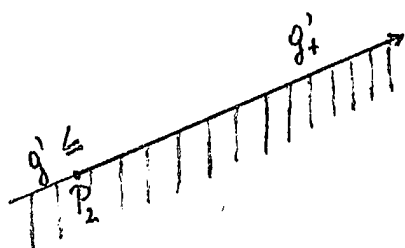
Tekintsük a $(g, \leq)$ rendezett egyenest, és tekintsük ennek valamely φ izometriára vett képét. Definíáljuk a $\varphi(g)$ egyenesen azt a $\leq$ rendezést, amelyre a $\varphi(P) \leq \varphi(Q)$ pontosan akkor teljesül, ha $P \leq Q$. Megmutatjuk, hogy a képeggyenes így definiált rendezése az egyenes /axiomatikusan definiált!/ valamelyik rendezésével egyezik meg.

Valóban, ha a g egyenes $A \leq B$ és $A' \leq B'$ pontjaira a $\varphi(g)$ egyenes valamelyik $\leq$ /axiomatikusan definiált/ rendezésében az állítással ellentétben $\varphi(A) \leq \varphi(B)$ és $\varphi(B') < \varphi(A')$ teljesülnének, akkor az $\overline{AB'}$ szakasz képe nem a $\overline{\varphi(A)\varphi(B)}$ szakasz lenne, ami ellentmondás. Ezzel a fenti megjegyzésünket bebizonyítottuk.

A fent definiált $(\varphi(g), \leq)$ rendezett egyenest a $(g, \leq)$ rendezett egyenes képének nevezzük.

2.5.3 Ha $(g, \leq)$ és $(g', \leq)$ két rendezett egyenes, akkor léteznek olyan mozgások, amelyek az első rendezett egyenest a másodikba viszik át. Minden ilyen mozgás egyértelműen meghatározott olyan párhuzamos eltolás erejéig, amelyik a g' egyenest önmagába viszi át. Pontosabban fogalmazva, ha a φ mozgás a $(g, \leq)$ rendezett egyenest a $(g', \leq)$ rendezett egyenesbe viszi, akkor az összes többi

ilyen mozgás $\varphi' = \alpha \varphi$ alakban írható fel, ahol α olyan párhuzamos eltolás, amelyre $\alpha(g') = g'$ teljesül. Ha pedig a g egyeneshez tartozó egyik félsíkot kitüntetjük, akkor a fenti φ' mozgások ezt a félsíkot a g' egyenesnek mindig ugyanabba a félsíkjaiba viszik át.



Bizonyítás Az állítást legegyszerűbben úgy igazolhatjuk, hogy a $(g, \leq)$ ill. a $(g', \leq)$ egyenesen kitüntetünk a növekvő pontok irányába mutató g_+ ill. g'_+ félegyenest. A g_+ félegyenest a g'_+ félegyenesbe transzformáló mozgás a tételnek nyilván megoldása lesz. A P_2 kezdőpont változtatásával megkapjuk az

összes tételben szereplő mozgást, és ezekről már könnyen kimutathatók a tételben leírt tulajdonságok. A részletes bizonyítást gyakorlásképpen az olvasóra bizzuk. $\square$

6. § Térizometriák

A térizometriák vizsgálatánál gyakran felhasználjuk azt a tényt, hogy egy valódi szakasz felezőpontjában a szakaszra állított merőleges sík pontosan azokat a pontokat tartalmazza, amelyek a szakasz két végpontjától azonos

távolságra vannak. Ez az állítás a síkbeli analóg állítás-hoz hasonlóan igazolható, ezért a részletes bizonyítást az olvasóra bizzuk.

2.6.1 | Ha az α térizometria négy nem egy síkra illesz-
kedő pontot fixen hagy, akkor $\alpha = \text{id}$.

Bizonyítás Ha volna olyan Q pont, amely nem egyezne meg az $\alpha(Q)$ képével, akkor a $\overline{Q \alpha(Q)}$ szakasz két végpontja mind a négy A_i $i=1,2,3,4$ fixponttól rendre azonos távolságra volna, mivel

$$(2.6.1) \quad |A_i Q| = |\alpha(A_i) \alpha(Q)| = |A_i \alpha'(Q)|.$$

Igy a négy fixpont a $\overline{Q \alpha(Q)}$ szakasz felező merőleges síkjára illeszkedne, ami ellentmondás. $\square$

2.6.2 | Ha az α térizometria nem az identikus leképezés,
és három nem-kollineáris pontot fixen hagy, akkor
az α a három fixpont síkjára vonatkozó tükrözés.

Bizonyítás Ismét legyen Q olyan pont, amelyre $Q \neq \alpha(Q)$, és jelölje Δ a $\overline{Q \alpha(Q)}$ szakasz felező merőleges síkját. Az előző tétel (2.6.1) azonosságai alapján a három fixpont a Δ síkra illeszkedik, ezért a $\tau_\Delta \alpha$ izometria a három fixponttal együtt a Q pontot is helyben hagyja. Az előző tétel miatt $\tau_\Delta \alpha = \text{id}$, és így átszorzással $\alpha = \tau_\Delta$ adódik. $\square$

2.6.3 | Két síkra vonatkozó tükrözés szorzata nem helyet-
tesíthető egyetlen síkra vonatkozó tükrözéssel.

A tétel bizonyítását szintén az olvasóra bizzuk, mivel

az állítás a 2.1.6 tételhez hasonlóan igazolható.

2.6.4 Tetszőleges α térizometriára és τ_Δ tükrözésre

$$(2.6.2) \quad \alpha \tau_\Delta \alpha^{-1} = \tau_{\alpha(\Delta)}$$

érvényes.

Bizonyítás A tételben szereplő egyenlet baloldala az $\alpha(\Delta)$ sík pontjait fixen hagyja, ezért vagy erre a síkra vonatkozó tükrözés, vagy pedig az identikus leképezés. Ha az utóbbiból a $\tau_\Delta = \text{id}$ következne, ami lehetetlen, így a tételben szereplő egyenlőség érvényes. $\square$

A fenti formulából átszorzással az

$$(2.6.3) \quad \alpha \tau_\Delta = \tau_{\alpha(\Delta)} \alpha$$

felcserélési szabályt kapjuk.

A felcserélési szabályból a 2.2.2 és 2.2.3 tételekhez hasonló módon igazolható a következő tétel is.

2.6.5 két síkra vonatkozó tükrözés szorzatában a tényezők akkor és csak akkor cserélhetők fel egymással, ha a síkok megegyeznek vagy pedig merőlegesek egymásra.

Az izometriák merőleges síkokat merőleges síkokba transzformálnak.

2.6.6 Ha egy $\alpha \neq \text{id}$ és $\alpha \neq \tau_\Delta$ izometriánál két különböző pont fixpont, akkor $\alpha = \tau_{\Delta_1} \tau_{\Delta_2}$, ahol a Δ_1, Δ_2 síkok a fixpontokra illeszkednek.

Bizonyítás Legyen Q olyan pont, amelyre $Q \neq \alpha(Q)$.

Ha a fixpontokat A_1 és A_2 jelöli, akkor a (2.6.1) egyenlet alapján az A_i fixpontok a $Q \propto (Q)$ szakasz felező merőleges síkjára illeszkednek. Így a $\tau_A \propto$ izometria az A_1, A_2, Q nem-kollineáris pontokat fixen hagyja, és a 2.6.2 tétel alapján $\tau_A \propto = \text{id}$ vagy pedig $\tau_A \propto = \tau_{\Delta_*}$ teljesül, ahol Δ_* az A_1, A_2 és Q pontok síkja. De az első egyenletből $\propto = \tau_A$ következne, ami a feltételek miatt lehetetlen, ezért

$$\propto = \tau_A \tau_{\Delta_*}.$$



Két metsző síkra vonatkozó tükrözés szorzatát tengely körüli forgásnak nevezzük, ahol tengelyen a két sík metszészonalát értjük. Nyilvánvaló, hogy a tengely pontjai a forgás során fixen maradnak. Ha a két sík merőlegesen metszi egymást, akkor a tengely körüli forgást tengelyes tükrözésnek hívjuk. Erről szintén megmutatható, hogy a tengelye által egyértelműen meghatározott, és független a tükröző síkok választásától. Sőt egy P pont képe az az egyértelműen meghatározott P' pont, amelyre a PP' szakasz merőleges a tengelyre, és azt felező pontjában metszi. Ezek igazolásával sem foglalkozunk, mivel bizonyításuk megegyezik a síkban a centrális tükrözésekre vonatkozó hasonló állítások bizonyításával. Bizonyítás nélkülük jegyezzük meg a forgások következő alaptulajdonságait is.

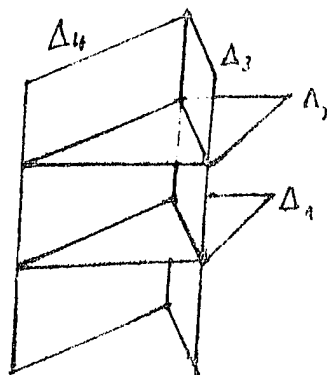
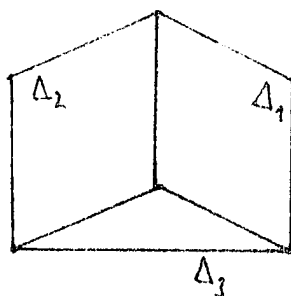
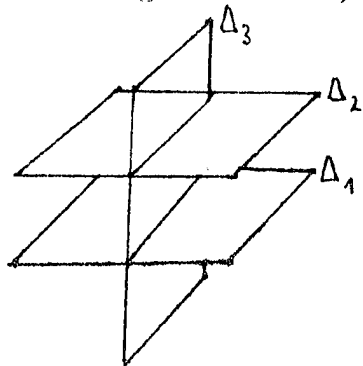
2.6.7 | Két közös határoló egyenessel rendelkező félsíkhöz
| pontosan egy tengelyes forgás létezik, amelyik az

egyik felületet a másikba forgatja.

A közös tengely körüli forgások Δ_1 - Δ_2 - Δ_3 transzformáció csoportot alkotnak.

A tengely körüli forgásoknál a két tükröző felület a tengely körül tetszőlegesen elforogtatva az általuk meghatározott tengely körüli forgás nem változik.

Ezek a tételek is a síkbeli analóg állításokhoz hasonlóan igazolhatók, ezért bizonyításukkal nem foglalkozunk.



A következőkben néhány speciális térizometriát definiálunk.

Két egymással párhuzamos síkra vonatkozó tükrözések sorozatát párhuzamos eltolásnak nevezzük.

Az $\alpha = \tau_{\Delta_3} \tau_{\Delta_2} \tau_{\Delta_1}$ alakban előálló izometriát pedig, ahol $\Delta_1 \parallel \Delta_2$ és $\Delta_1 \perp \Delta_3$, $\Delta_2 \perp \Delta_3$ teljesül csúsztatva tükrözéseknek mondjuk. Mivel a szerőlegesség miatt az $\alpha = \tau_{\Delta_3} \tau_{\Delta_2} \tau_{\Delta_1} = \tau_{\Delta_2} \tau_{\Delta_1} \tau_{\Delta_3}$ felcserélhetőség érvényes, ezért ezeket az izometriákat néha tükrözve csúsztatásnak is nevezzük.

Ha pedig az $\alpha = \tau_{\Delta_3} \tau_{\Delta_2} \tau_{\Delta_1}$ izometriánál az egymást metsző Δ_1 és Δ_2 síkok merőlegesek a Δ_3 síkra, akkor az α izometriát forgatva tükrözésnek, vagy a $\tau_{\Delta_3} \tau_{\Delta_2} \tau_{\Delta_1} = \tau_{\Delta_2} \tau_{\Delta_1} \tau_{\Delta_3}$ felcserélhetőség miatt tükrözve forgatásnak mondjuk. Abban az esetben, ha a három sík páronként merőleges, akkor az izometriát centrális tükrözésnek nevezzük, amelynek centruma a három sík metszéspontja. A síkbeli analóg állításhoz hasonlóan megmutatható, hogy ez a centrális tükrözés is független a páronként merőleges síkok választásától, és egy P pont képe az az egyértelműen meghatározott P' pont, amelyre a $\overline{PP'}$ szakasz felezőpontja a C centrum.

Végül az $\alpha = \tau_{\Delta_4} \tau_{\Delta_3} \tau_{\Delta_2} \tau_{\Delta_1}$ alakú izometriákat, ahol

$$\Delta_1 \parallel \Delta_2, \Delta_3 \perp \Delta_1, \Delta_4 \perp \Delta_1,$$

csavarmozgásoknak nevezzük /ld. a fenti 3. ábrát/. A csavarmozgásoknál is érvényes a

$$(\tau_{\Delta_4} \tau_{\Delta_3})(\tau_{\Delta_2} \tau_{\Delta_1}) = (\tau_{\Delta_2} \tau_{\Delta_3})(\tau_{\Delta_4} \tau_{\Delta_1})$$

felcserélés. Látható, hogy a párhuzamos eltolások és a tengely körüli forgások lényegében olyan csavarmozgások, amelyek nem tartalmaznak forgás ill. csusztatás részt. Ezért az olyan csavarmozgásokat, amelyek két síkra tükrözés szorzataként nem fejezhetők ki, valódi csavarmozgásoknak nevezzük.

Még röviden a párhuzamos eltolásokkal foglalkozunk. Az ezekre vonatkozó alaptulajdonságokat is bizonyítás nélkül

közöljük.

2.6.8 A párhuzamos eltolások Abel-féle transzformáció csoportot alkotnak.

A párhuzamos eltolásoknál a tükröző síkokat tetszőlegesen párhuzamosan eltolva az általuk meghatározott párhuzamos eltolás nem változik.

Két ponthoz pontosan egy párhuzamos eltolás létezik, amelyik az egyik pontot a másikba transzformálja.

A párhuzamos eltolások minden egyenest ill. síkot önmagukkal párhuzamos egyenesbe ill. síkba transzformálnak.

Az állítások bizonyításáról csak annyit jegyzünk meg, hogy a párhuzamos eltolásokat két centrális tükrözés szorzataként kifejezve a sík esetében látott analóg tételek rendre igazolhatók.

2.6.9 Ha az α térizometriának egyetlen fixpontja létezik, akkor olyan forgatva tükrözés, amelynél a három tükröző sík a fixpontra illeszkedik.

Bizonyítás Legyen a Q olyan pont, amelyre $Q \neq \alpha(Q)$ érvényes, valamint jelölje Δ_3 a $\overline{Q\alpha(Q)}$ szakasz felező merőleges síkját. A (2.6.1) azonosságok alapján a fix A pont a Δ_3 síkra illeszkedik, és így a $\tau_{\Delta_3}\alpha$ izometria a Q és A pontokat fixen hagyja. Ezért a $\tau_{\Delta_3}\alpha$ vagy az identikus leképezés, vagy a $Q A$ tengely körüli forgás vagy pedig $\tau_{\Delta_3}\alpha = \tau_{\Delta_*}$, ahol a Δ_* a QA tengelyre

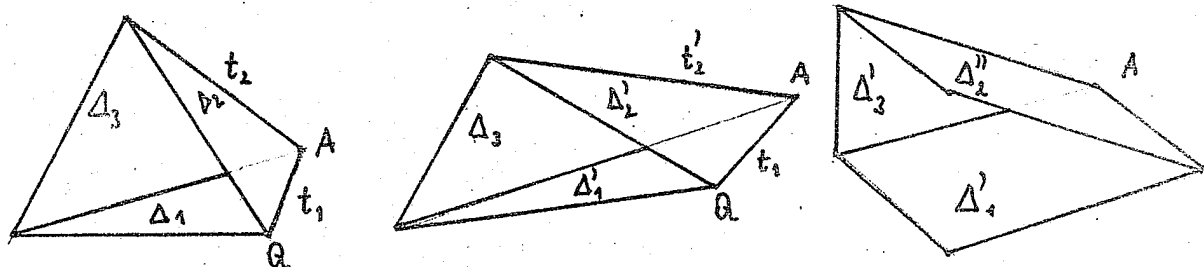
illeszkedik. De a $\tau_{\Delta_3} \alpha = \text{id}$ és $\tau_{\Delta_3} \alpha = \tau_{\Delta_*}$ egyike sem teljesülhet. Ugyanis az utóbbi esetben az α a $\Delta_3 \cap \Delta_* \neq \emptyset$ tengely minden pontját az első esetben pedig a Δ_3 minden pontját fixen hagyná, ami a tétel feltétele alapján lehetetlen. Tehát

$$\tau_{\Delta_3} \alpha = \tau_{\Delta_2} \tau_{\Delta_1},$$

ahol $\Delta_2 \cap \Delta_1 = QA$. Ebből átszorzással

$$\alpha = \tau_{\Delta_3} \tau_{\Delta_2} \tau_{\Delta_1}$$

adódik. Nyilvánvalóan kapjuk a $\Delta_1 \cap \Delta_2 \cap \Delta_3 = A$ azonosságot is.



Legyen $t_1 := \Delta_1 \cap \Delta_2$ és $t_2 := \Delta_3 \cap \Delta_2$ a két metszéspont. Forgassuk el a t_1 körül a Δ_1 és Δ_2 síkokat olyan Δ'_1, Δ'_2 síkokba, hogy $\Delta_3 \perp \Delta'_2$ teljesüljön. Ezek után a Δ_3 és Δ'_2 síkokat forgassuk el a $t'_2 := \Delta_3 \cap \Delta'_2$ tengely körül addig, hogy a Δ'_3 merőlegesen messe a Δ'_1 síkot. Ekkor $\Delta'_1 \perp \Delta'_3$ és $\Delta'_3 \perp \Delta'_2$, valamint $\Delta'_1 \cap \Delta'_2 \cap \Delta'_3 = A$ teljesül. Így az α izometriára

$$\alpha = \tau_{\Delta_3} \tau_{\Delta_2} \tau_{\Delta_1} = \tau_{\Delta_3} \tau_{\Delta'_2} \tau_{\Delta'_1} = \tau_{\Delta'_3} \tau_{\Delta'_2} \tau_{\Delta'_1}$$

adódik, vagyis az α izometria forgatva tükrözés. $\square$

2.6.1o Ha az α térizometriának nem létezik fix pontja, akkor az α párhuzamos eltolás vagy csusztatva tükrözés vagy pedig csavarmozgás.

Bizonyítás Legyen a Q pont ismét olyan, hogy $Q \neq \alpha(Q)$ teljesül, és legyen a Σ a $\overline{Q\alpha(Q)}$ szakasz felező merőleges síkja. A $\tau_\Sigma \alpha$ izometria a Q pontot fixen hagyja. Ez az izometria nem lehet az identikus leképezés, mert különben $\alpha = \tau_\Sigma$ állna, és az α a Σ síkot pontonként fixen hagyná. Ezért a korábbi fixponttételek alapján a következő esetek lehetségesek.

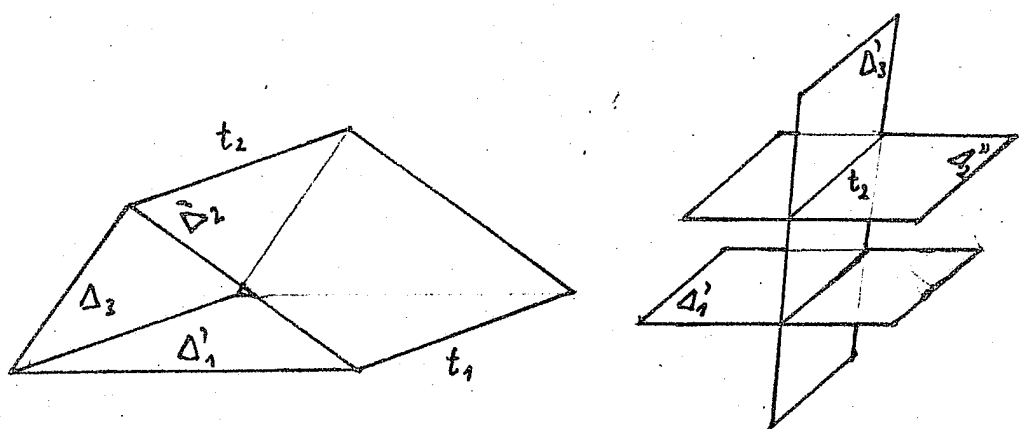
1. $\tau_\Sigma \alpha = \tau_\Delta$
2. $\tau_\Sigma \alpha = \tau_{\Delta_2} \tau_{\Delta_1}$, ahol $\Delta_1 \neq \Delta_2$ és
 $Q \in \Delta_1 \cap \Delta_2 := t_1$.
3. $\tau_\Sigma \alpha = \tau_{\Delta_3} \tau_{\Delta_2} \tau_{\Delta_1}$, ahol $\Delta_1 \cap \Delta_2 \cap \Delta_3 = Q$.

Az 1. esetben $\alpha = \tau_\Sigma \tau_\Delta$, és a Σ és Δ síkok nem metszik egymást, különben ezek metszete fix lenne. Tehát ekkor az α párhuzamos eltolás.

A 2. esetben a Δ_2 és Δ_1 síkok a t_1 tengelyben metszik egymást. Ez a tengely nem metsz bele a Σ síkba, mert különben a metszetük az α izometriánál fixen maradna. Jelöljük át a Σ_3 síkot a Δ_3 jellel. Ekkor

$$\alpha = \tau_{\Delta_3} \tau_{\Delta_2} \tau_{\Delta_1}.$$

Forgassuk el a Δ_1 és Δ_2 síkokat a t_1 tengely körül addig, hogy a Δ'_2 merőlegesen messe a Δ_3 síkot a t_2 tengelyben.



Ezután a t_2 tengely körül forgassuk el a Δ_3 és Δ'_2 síkokat addig, hogy a Δ'_3 merőlegesen messe a Δ'_1 síkot, és így a Δ''_2 párhuzamos lesz a Δ'_1 síkkal. Ekkor az

$$\alpha = \tau_{\Delta_3} \tau_{\Delta_2} \tau_{\Delta_1} = \tau_{\Delta_3} \tau_{\Delta'_2} \tau_{\Delta'_1} = \tau_{\Delta'_3} \tau_{\Delta''_2} \tau_{\Delta'_1}$$

izometria csusztatva tükrözés, hiszen a $\Delta'_1 \parallel \Delta''_2$ és $\Delta'_1 \perp \Delta'_3$, $\Delta''_2 \perp \Delta'_3$ relációk teljesülnek.

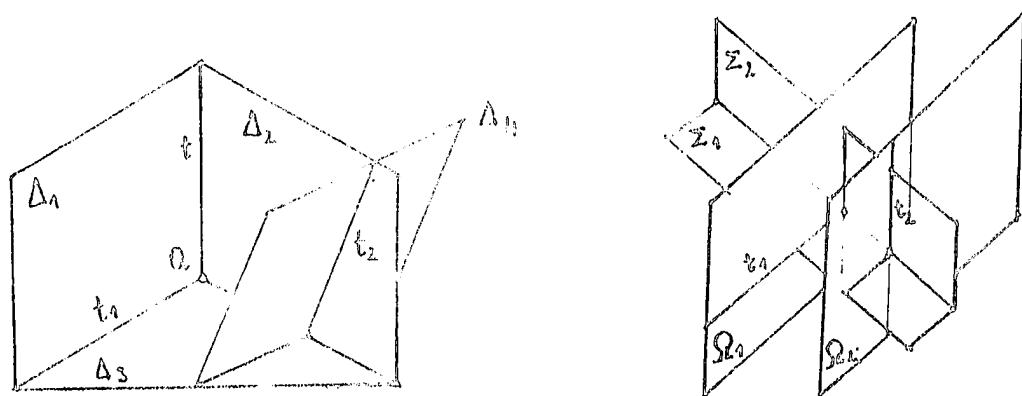
A 3. esetben jelöljük át a Σ síkot a Δ_4 jellel. Ekkor

$$\alpha = \tau_{\Delta_4} \tau_{\Delta_3} \tau_{\Delta_2} \tau_{\Delta_1}.$$

Mivel a $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ síkoknak egyetlen közös pontjuk létezik, ezért a 2.6.9 tétel bizonyítása alapján feltehető, hogy a Δ_1 és Δ_2 síkok metszők és merőlegesen metszik a Δ_3 síkot. Legyen $t := \Delta_1 \cap \Delta_2$. Ha a Δ_4 párhuzamos a Δ_3 síkkal, akkor az α nyilván csavarmozgás. Ha pedig $\Delta_4 \nparallel \Delta_3$, akkor a következőképpen járunk el.

A Δ_2 síkról feltehető, hogy merőlegesen áll nemcsak a Δ_3 síkra, de a Δ_4 síkra is, mert különben a Δ_1 és Δ_2 síkokat addig forgatjuk a t metszéspontjuk körül,

amíg a Δ_2 képe merőlegesen nem metszi a Δ_4 síkot. Ekkor továbbra is a Δ_1 és Δ_2 síkok a t tengelyben metszik



egymást és merőlegesek a Δ_3 síkra, továbbá a $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ síkoknak egyetlen közös pontjuk létezik a Q pont. A Δ_4 nem illeszkedik erre a Q pontra, mert különben az α a Q pontot fixen hagyná, ezért a Δ_2 és Δ_4 síkok t_2 metszésvonala, ill. a Δ_1 és Δ_3 síkok t_1 metszésvonala kitérő egyenesek. Ugyanakkor a merőlegességi viszonyok miatt a következő felcseréléseket végezhetjük el.

$$\alpha = \tau_{\Delta_4} \tau_{\Delta_3} \tau_{\Delta_2} \tau_{\Delta_1} = (\tau_{\Delta_4} \tau_{\Delta_2}) (\tau_{\Delta_3} \tau_{\Delta_1}).$$

Mivel $\Delta_4 \perp \Delta_2$ és $\Delta_3 \perp \Delta_1$, ezért az α a fenti zárójelzés alapján nem más mint a t_1 és t_2 tengelyekre vonatkozó tükrözések szorzata, tehát

$$\alpha = \tau_{t_2} \tau_{t_1}.$$

Legyen most Ω_1 a t_1 egyenesre illeszkedő és a t_2 egyenessel párhuzamos sík, ill. Ω_2 a t_2 egyenesre illeszkedő és a t_1 egyenessel párhuzamos sík. Ha Σ_1 ill.

Σ_2 a t_1 ill. t_2 tengelyre illeszkedő és az Ω_1 és Ω_2 síkokra merőleges síkok, akkor,

$$\tau_{t_1} = \tau_{\Sigma_1} \tau_{\Omega_1}, \quad \tau_{t_2} = \tau_{\Sigma_2} \tau_{\Omega_2},$$

és így a merőlegességi relációkból adódó felcserélési szabályokat felhasználva az

$$\alpha = \tau_{\Sigma_2} \tau_{\Omega_2} \tau_{\Sigma_1} \tau_{\Omega_1} = \tau_{\Sigma_2} \tau_{\Sigma_1} \tau_{\Omega_2} \tau_{\Omega_1}$$

egyenlőséget kapjuk. Eszerint az α valódi csavarmozgás, hiszen $\Omega_1 \parallel \Omega_2$, a Σ_1, Σ_2 síkok merőlegesen metszik az Ω_1, Ω_2 síkokat, és egymást is metszik mégpedig a t_1 és t_2 kitérő egyenesek normáltranszverzálisában. $\square$

Az eddigi eredményeket összefoglalva a következő tételeket kapjuk.

2.6.11 | A térizometriák összes lehetséges esetei a síkra vonatkozó tükrözések, a tengely körüli forgások, a párhuzamos eltolások, a forgatva tükrözések, a csusztatva tükrözések és a csavarmozgások.

2.6.12 | Bármely térizometria legfeljebb négy síkra vonatkozó tükrözés szorzataként állítható elő.

A térizometriák is két osztályba sorolhatók, mégpedig a mozgások ill. az irányítást fordító izometriák osztályába. Az erre vonatkozó tétel előtt néhány segédtételt igazolunk.

2.6.13 | Három síkra vonatkozó tükrözés szorzata csusztatva tükrözés vagy forgatva tükrözés vagy pedig

egyetlen síkra vonatkozó tükrözésre redukálható.
Négy síkra vonatkozó tükrözés szorzata csavarmoz-
gás.

Bizonyítás Ha a három síknak egyetlen közös pontja léte-
zik, akkor a 2.6.9 tétel alapján a tükrözések szorzata
forgatva tükrözés. Ha a három $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ síknak nincs
közös pontja, vagy egynél több közös pontja van, akkor az
izometria síkra vonatkozó tükrözés vagy pedig csusztatva
tükrözés.

Ugyanis, ha a három sík egybeesik, akkor a tükrözések
szorzata erre a közös síkra vonatkozó tükrözés.

Ha a három sík közös tengelyre illeszkedik, akkor a
 Δ_1 és Δ_2 síkot a közös tengely körül addig forgatjuk,
hogy a Δ_2 egybeessék a Δ_3 síkkal, és ekkor a síkokra vo-
natkozó tükrözések szorzata a Δ_1 síkra vonatkozó tükrözés,
hiszen

$$\tau_{\Delta_3} \tau_{\Delta_2} \tau_{\Delta_1} = \tau_{\Delta_3} \tau_{\Delta_3} \tau_{\Delta_1}' = \tau_{\Delta_1}'.$$

Ha pedig a három síknak nincs közös pontja és páronként
párhuzamosak, akkor a Δ_1 és Δ_2 síkokat párhuzamosan tol-
juk el, egészen addig, hogy $\Delta_2' = \Delta_3$ teljesüljön, és
akkor a tükrözések szorzata ismét a Δ_1 síkra vonatkozó
tükrözésre redukálódik.

Végül, ha a három síknak nem létezik közös pontja, de
közülük kettő egyenesben metszi egymást, akkor a 2.6.10
tétel bizonyításának második esete alapján az $\alpha =$
 $= \tau_{\Delta_3} \tau_{\Delta_2} \tau_{\Delta_1}$ izometria csusztatva tükrözés.

Ezzel a három sík kölcsönös helyzeteinek lehetséges eseteit áttekintettük, és az első állítást bebizonyítottuk. Végül tekintsük a négy sík esetét és az izometria legyen az

$$\alpha = \tau_{\Delta_4} \tau_{\Delta_3} \tau_{\Delta_2} \tau_{\Delta_1}.$$

Ha a $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ síkoknak egynél több közös pontja létezik, akkor az ezekre vonatkozó szorzat egyetlen síkra vonatkozó tükrözésre redukálható, így az α vagy tengely körüli forgás vagy pedig párhuzamos eltolás.

Ha a $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ síkoknak egyetlen közös pontja létezik, akkor a 2.6.10 tétel 3. esetének bizonyítása alapján az α csavarmozgás. Megjegyezzük, hogy az ott közölt bizonyítás akkor is alkalmazható, ha a Δ_4 áthalad a közös Q ponton, csak ebben az esetben az α két egymást metsző tengelyre vonatkozó tengelyes tükrözés szorzataként áll elő. Mivel ekkor az Ω_1 , és Ω_2 síkok egybeesnek, ezért ebben az esetben az α izometria olyan tengely körüli forgás, amelynek tengelye áthalad a Q ponton.

Végül azt az esetet vizsgáljuk, amikor a $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ síkoknak nem létezik közös pontjuk. Ha ezek páronként párhuzamosak, akkor a rájuk vonatkozó tükrözések szorzata egyetlen síkra vonatkozó tükrözésre redukálható, ezért az α párhuzamos eltolás vagy tengely körüli forgás. Ha pedig a három sík közül kettő egyenesben metszi egymást, akkor ezt a két síkot metszésvonaluk mentén elforgatva elérhetjük, hogy a $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ síkok páronként messék egymást páronként párhuzamos tengelyekben.

Jelölje t a Δ_1 és Δ_2 metszésvonalát. Ha a Δ_3 és Δ_4 párhuzamosak, akkor a Δ_3 és Δ_4 síkokat toljuk addig párhuzamosan, míg a Δ_3 és a t metszete nem az üres halmaz. Ha pedig a Δ_3 és Δ_4 a t_* egyenesben metszi egymást, akkor a Δ_3 és Δ_4 síkokat a t_* tengely körül forgassuk addig, hogy a Δ'_3 sík messe a t_* tengelyt. Így mindig elérhető, hogy a $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ síkoknak létezzék közös pontja, és így ezt az esetet a már vizsgált esetekre vezettük vissza. $\square$

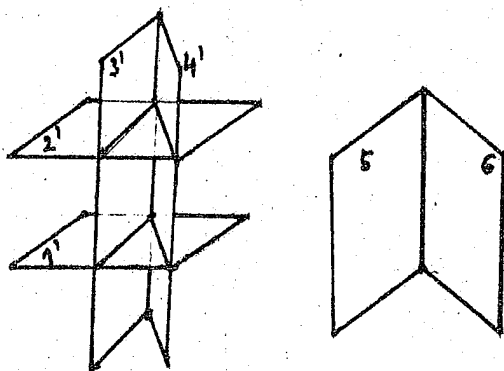
Később szükségünk lesz még a következő tételre is.

2.6.14 | Négy síkra vonatkozó tükrözés szorzata nem helyettesíthető egyetlen síkra vonatkozó tükrözéssel.

Bizonyítás Négy síkra vonatkozó tükrözés szorzata csavarmozgás, amelynek vagy nincs fixpontja /ha az α párhuzamos eltolás vagy valódi csavarmozgás/ vagy pontosan egy egyenes pontjai fixek /ha az α valódi tengely körüli forgás/ vagy pedig minden pont fixpont. Ezért ez az izometria nem lehet egyetlen síkra vonatkozó tükrözés, mert ennél a sík pontjai fixpontok. $\square$

2.6.15 | Páros számú síkra tükrözés szorzatát két vagy négy síkra tükrözés szorzatára redukálható.

Bizonyítás Ha hat síkra tükrözzünk egymás után, akkor az első négy síkra vett tükrözések szorzatát hozzuk csavarmozgás alakra, és az ebben szereplő síkokat jelölje rendre



$1', 2', 3', 4'$. A $3'$ és $4'$ síkokhoz vegyük hozzá az eredeti síkok közül az 5. és 6. síkokat. Erre a négy síkra vett tükrözések szorzatát ismét hozzuk csavarmozgás alak-
ra, és az ebben szereplő sí-

kokat jelölje $3'' 4'' 5' 6'$. Ekkor az $1', 2', 3'', 4''$ síkokra vett tükrözések szorzata párhuzamos eltolás, hiszen ez két párhuzamos eltolás szorzata. Ezzel a síkok száma valóban négyre redukálható, ami esetleg még két tükrözés szorzatára redukálható tovább.

Általában, ha egy szorzatban páros számú tényező szerepel, akkor mindig hat szomszédos tényezőt négyre vagy kettőre redukálva véges sok lépésben az egész kifejezést kettő vagy négy tényezős kifejezésre redukálhatjuk. Ezzel az állítást bebizonyítottuk. $\square$

2.6.16 | Páratlan számú síkra vett tükrözés szorzata nem helyettesíthető páros számú síkra vett tükrözés szorzatával.

Bizonyítás Az állítást indirekt módon bizonyítjuk. Tegyük fel, hogy

$$(\tau_1 \dots \tau_{2n}) \tau_{2n+1} = \tau_{1'} \dots \tau_{2m'} = \tau_{\Delta_1} \tau_{\Delta_2} \tau_{\Delta_3} \tau_{\Delta_4}$$

teljesül valamely szorzatra. Ha a zárójelben lévő részt étszorozásokkal a jobb oldalra átvisszük, akkor a jobb

oldalon páros sok tükrözés szerepel, ami négy tükrözés szorzatára redukálható, vagyis

$$\tau_{2n+1} = \tau_{\Delta'_1} \tau_{\Delta'_2} \tau_{\Delta'_3} \tau_{\Delta'_4}$$

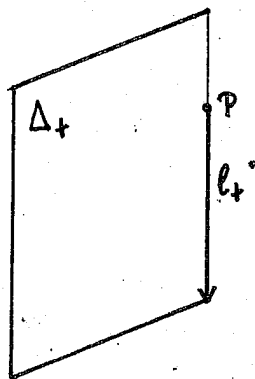
teljesül. Ez pedig egy korábbi megállapításunk alapján el-
lentmondás. Ezzel a bizonyítást befejeztük. $\square$

Azokat az izometriákat, amelyek páros számú síkra vo-
natkozó tükrözés szorzataként állnak elő, mozgásoknak neve-
zük. Ezek nyilvánvalóan csoportot alkotnak, amelynek elemei
a csavarmozgások.

Azokat az izometriákat, amelyek páratlan számú síkra vo-
natkozó tükrözés szorzataként állnak elő, irányítást fordító
izometriáknak nevezzük. Mivel két ilyen izometria szorzata
mozgás, ezért ezek nem alkotnak részcsoporthoz az izometriák
csoportjában. Az irányítást fordító izometriák a síkra vett
tükrözések, forgatva tükrözések és a csusztatva tükrözések.

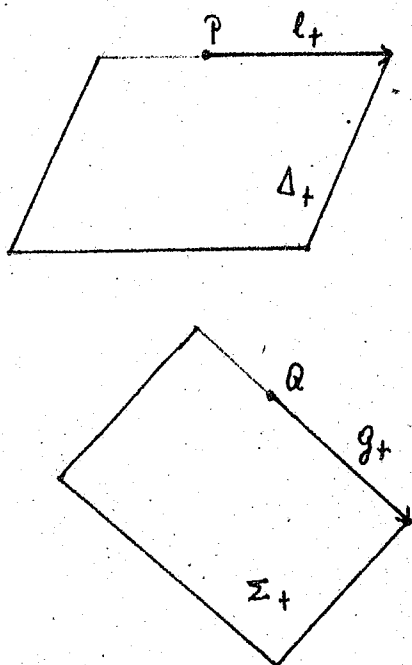
A térben az alakzatok egybevégőségét ugyanugy definiál-
juk, mint a síkban. Ezekkel a fogalmakkal itt külön nem fog-
lalkozunk.

Még néhány további megjegyzést teszünk.



Ha a térben egy nyílt félsíkhöz hozzá-
vesszük az egyik zárt határoló félegyene-
sének a pontjait, akkor az így nyert alak-
zatot zészlónak nevezzük. Az ábrán a nyílt
félsíkot Δ_+ jellel, a határoló zárt
félegyenest pedig l_+ jellel jelöljük,
és az utóbbinak a végpontja a P pont.

2.6.17 | Bármely két zászlóhoz egy és csak egy mozgás létezik, amelyik az egyiket a másikra transzformálja.



Bizonyítás Legyen (Δ_+, l_+) és (Σ_+, g_+) a két zászló. Az egzisztencia bizonyításához legyen α_1 az a párhuzamos eltolás, amelyre $\alpha_1(P) = Q$ teljesül. Ezek után legyen α_2 az a tengely körüli forgás, amelynek tengelye áthalad a Q ponton és merőleges a g_+ és $\alpha_1(l_+)$ félegyenesekre, és az $\alpha_1(l_+)$ félegyenest a g_+ félegyenésbe

fordítja. Végül, ha α_3 az a g tengely körüli forgás, amelyik az $\alpha_2\alpha_1(\Delta_+)$ félsíkot a Σ_+ félsíkba fordítja, akkor az $\alpha_3\alpha_2\alpha_1$ mozgás a tételnek megfelelő mozgás.

Az unicitás bizonyításához, ha α és φ két olyan mozgás, amelyik a (Δ_+, l_+) zászlót a (Σ_+, g_+) zászlóra képezi, akkor az $\alpha^{-1}\varphi$ mozgás az l_+ félegyenest is és a Δ_+ félsíkot is fixen hagyja. Így az $\alpha^{-1}\varphi$ izometria vagy az identikus leképezés /és akkor $\alpha = \varphi$ teljesül/, vagy pedig a Δ síkra vonatkozó tükrözés / Δ a Δ_+ tartó síkja/. De az utóbbi eset nem állhat, hiszen az $\alpha^{-1}\varphi$ leképezés mozgás. Ezzel az unicitást is igazoltuk. $\square$

Végezetül a térmozgások invariáns síkjainak a kérdését érintjük. A valódi csavarmozgásoknak nyilvánvalóan nincs invariáns síkjuk. Így a mozgások közül invariáns síkjuk csak a párhuzamos eltolásoknak és a tengely körüli forgásoknak létezik. Mégpedig az első esetben pontosan azok a síkok invariánsak, amelyek az eltolás irányával párhuzamosak, a második esetben pedig pontosan a tengelyre merőleges síkok képződnek le önmagukra. Az is világos, hogy az invariáns síkokon az első esetben párhuzamos eltolások, a második esetben pedig forgások indukálódnak, továbbá minden invariáns síkhoz a hozzájuk tartozó két féltér is invariáns. Ervényes tehát a következő állítás

2.6.18 Ha egy térmozgás valamely síkot invariánsan hagy, akkor invariánsan hagyja a hozzá tartozó féltételeket is, és magán az invariáns síkon síkbeli értelemben vett mozgást indukál.

3. FEJEZET

SZÖGEK

1. § Irányítás

A sík minden (q, ε) rendezett egyeneséhez rendeljük hozzá az egyenes egyik nyílt félsíkját. A hozzárendelést mozgásinvariáns-nak nevezzük, ha valahányszor egy φ mozgás a (q, ε) egyenest a (h, ε) egyenesbe viszi, mindannyiszor a (q, ε) egyeneshez rendelt félsíkot a (h, ε) egyeneshez rendelt félsíkba transzformálja.

A síkot irányítottnak nevezzük, ha minden (q, ε) rendezett egyeneshez mozgásinvariáns módon az egyik nyílt félsíkját rendeljük.

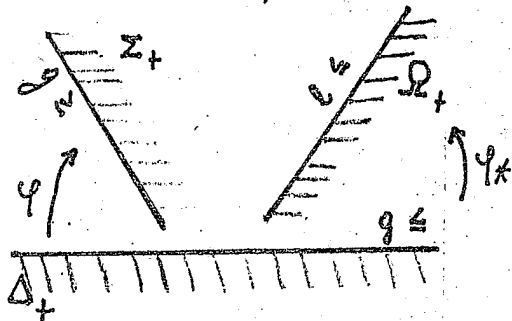
A (q, ε) egyeneshez rendelt félsíkot a rendezett egyenes jobbpartjának mondjuk.

3.1.1. | A síknak pontosan két irányítása létezik.

Ez az állítás speciális következménye az alábbi tételnek.

3.1.2. | Tetszőleges (q, ε) egyenes Δ_+ jobbpartját kitüntetve pontosan egy irányítás létezik, amelyik a (q, ε) egyeneshez a Δ_+ félsíkot rendeli.

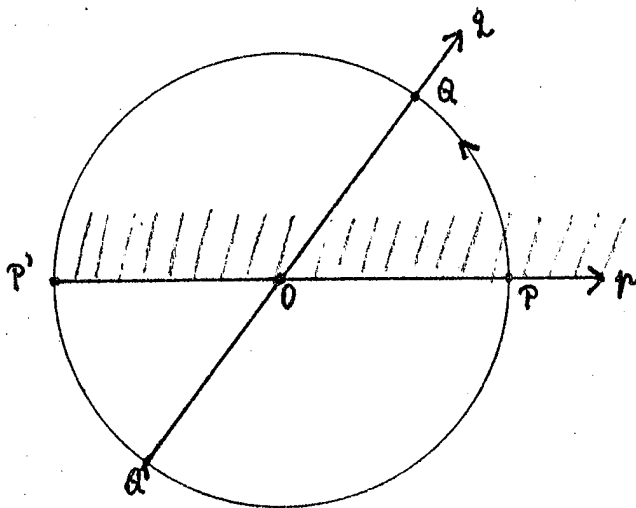
Bizonyítás: Ha (h, ε) tetszőleges másik rendezett egyenes, akkor a



síkmozgásoknál látottak alapján minden olyan φ mozgás, amelyik a (q, ε) rendezett egyenest a (h, ε) rendezett egyenesbe viszi, a Δ_+ félsíkot mindig ugyanabba

a $\Sigma_+ := \varphi(\Delta_+)$ félsíkba transzformálja. Defináljuk a $(h, \leq)$ jobbpártját a Σ_+ félsíkkal. Megmutatjuk, hogy az így definiált jobb part-rendszer mozgásinvariáns. Tekintsük ehhez a rendezett $(h, \leq)$ és $(\ell, \leq)$ egyeneseket, amelyek a $(g, \leq)$ rendezett egyenesből a φ ill. φ_* mozgások transzformáltjaként állnak elő. Előbbi megállapodásunk alapján a $(h, \leq)$ jobbpártja a $\Sigma_+ := \varphi(\Delta_+)$ félsík, az $(\ell, \leq)$ jobbpártja pedig az $\Omega_+ := \varphi_*(\Delta_+)$ félsík. Nyilvánvaló, hogy a $\lambda = \varphi_* \circ \varphi^{-1}$ mozgás a $(h, \leq)$ rendezett egyenest az $(\ell, \leq)$ rendezett egyenesbe viszi, mégpedig úgy, hogy a Σ_+ félsík az Ω_+ félsíkba transzformálódik. Ezért a (2.3.5) tétel alapján minden olyan ρ mozgás, amelyik a $(h, \leq)$ egyenest az $(\ell, \leq)$ egyenesbe viszi egyben a Σ_+ félsíkot az Ω_+ félsíkba transzformálja. Ezzel a mozgásinvarianciát bebizonyítottuk. A konstrukcióból az irányításra vonatkozó egzisztencia és unicitás nyilvánvalóan következik. $\square$

Megmutatjuk, hogy az irányított síkban minden körnek egy u.n. pozitív körüljárása definiálható.



Tekintsünk az irányított síkban egy O középpontu kört. Ennek minden P pontjához a $p = OP$ egyenesen válasszuk ki azt a $\leq$ rendezést, amelyre $0 \leq P$ teljesül.

A kör másik Q pontjáról definíció szerint akkor mondjuk, hogy a P pontot megelőzi, ha a Q a $(p, \leq)$ egyenes balpárt-

jába esik. Ha pedig a Q a $(p, \leq)$ jobboldalába esik, akkor azt mondjuk, hogy a Q a P mögött van. Az átmérők végpontjait szemköztes pontoknak nevezzük.

Ha a Q a P pontot megelőzi, vagy szemköztes pontok, akkor a $\overleftrightarrow{PQ}$ iv pontjait definíció szerint a P előtti és a Q mögötti pontok alkotják. Ha pedig a Q a P mögött van, vagy $P = Q$, akkor a $\overleftrightarrow{PQ}$ pontjait azok a pontok alkotják, amelyek a P előtt, vagy a Q mögött helyezkednek el. Vegyük észre, hogy a $\overleftrightarrow{PQ}$ iv pontjai közé a P, Q végpontokat nem soroljuk be.

Minden $\overleftrightarrow{PQ}$ iven rendezés is definiálható. Az iv két X, Y pontjára az $X \leq Y$ reláció definíció szerint akkor érvényes, ha az $\overleftrightarrow{XY}$ iv a $\overleftrightarrow{PQ}$ iv egyik végpontját sem tartalmazza. Könnyen megmutatható, hogy ez a reláció az iv pontjai között teljes rendezést definiál.

A $\overleftrightarrow{PQ}$ ivet az előbbi definiált rendezéssel együtt pozitív körüljárású ivnek nevezzük.

A definícióból az is nyilvánvalóan következik, hogy a síkmozgások pozitív körüljárású ivet pozitív körüljárású ivbe transzformálnak.

A következőkben az irányított síkot (Δ, Θ) jellel jelöljük.

A tér irányítása hasonlóan definiálható, mint a síké.

Tekintsünk a térben egy (Δ, Θ) irányított síkot és egy φ térmozgást. A Δ síkban vegyünk fel egy $(h, \leq)$ egyenest, amelynek jobboldalját a Δ_+ jelöli. A $\varphi(\Delta)$ síkban azt az irányítást tekintjük, amelynél a $(\varphi(h), \leq)$ rendezett egyenes jobboldala a $\varphi(\Delta_+)$ félsík. Könnyen megmutatható a $\varphi(\Delta)$ ilyen módon definiált irányítása nem függ a $(h, \leq)$ rendezett egyenes választásá-

tól, és a $(\varphi(\Delta), \Theta)$ irányított síkot a (Δ, Θ) irányított síknak a φ térmozgásra vonatkozó képének nevezzük.

A tér minden (Δ, Θ) irányított síkjához rendeljük hozzá a sík egyik nyílt félterét. A hozzárendelést mozgásinvariánsnak mondjuk, ha minden φ térmozgás minden (Δ, Θ) irányított síkhoz rendelt félteret a $(\varphi(\Delta), \Theta)$ képsíkhöz rendelt féltérbe transzformálja.

A teret irányítottnak nevezzük, ha minden irányított síkjához mozgásinvariáns módon az egyik nyílt félteret rendeljük. A (Δ, Θ) irányított síkhoz rendelt félteret a sík jobbpartjának nevezzük.

3.1.3. A térnek pontosan két irányítása létezik.

A tétel itt is a következő állítás következménye.

3.1.4. Tetszőleges (Δ, Θ) irányított síknak tetszőleges F_+ jobbpartját kitüntetve pontosan egy irányítás létezik, amelyik a (Δ, Θ) síkhoz az F_+ félteret rendeli.

A tétel a síkra vonatkozó analóg tételhez hasonlóan igazolható, ezért a részletek átgondolását az olvasóra bizzuk.

2. § Szögek definíciója, szögek összege

A szög fogalmát először a síkban definiáljuk.

Jelöljön az a_+ ill. b_+ azonos kezdőpontú félegyeneseket. Az (a_+, b_+) alakú rendezett elempárokat elemi irányított szögeknek nevezzük.

Az (a_+, b_+) és (c_+, d_+) elemi irányított szögeket ekvivalensnek mondjuk, ha létezik φ síkmozgás, amelyre $\varphi(a_+) = c_+$ és

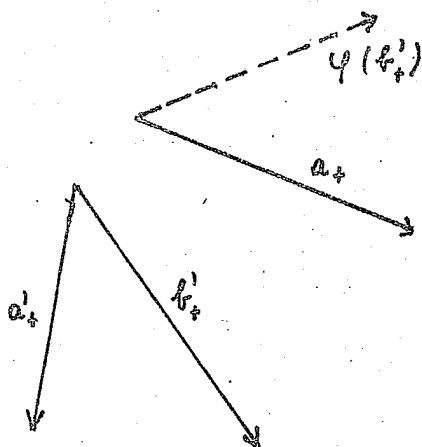
$\varphi(b_+) = d_+$ teljesül. Nyilvánvaló, hogy az elemi irányított szögek között ez a reláció ekvivalencia reláció. Az ekvivalencia osztályokat

irányított szögeknek nevezzük, és valamely (a_+, b_+) elemi szög által reprezentált irányított szöget az $\angle (a_+ b_+)$ jellel jelöljük.

3.2.1. Minden α irányított szöghöz és a_+ félegyeneshez egy és csak egy

$$\alpha = \angle (a_+ b_+)$$

reprezentáns létezik.



Bizonyítás. Legyen az $(a'_+ b'_+)$ az

α tetszőleges reprezentánsa, és φ az a mozgás, amelyre $\varphi(a'_+) = a_+$ teljesül. Ekkor nyilvánvaló, hogy az $(a_+ \varphi(b'_+))$ elemi irányított szög az α szögnek az az egyetlen reprezentánsa, amelynek első komponense az a_+ félegyenes. $\square$

Az α és β irányított szögekhez válasszunk

$$\alpha = \angle (a_+ b_+) , \quad \beta = \angle (b_+ c_+)$$

alaku reprezentánsokat. Az α és β szögek összege definíció szerint az

$$(3.2.1.) \quad \alpha + \beta = \angle (a_+ b_+) + \angle (b_+ c_+) := \angle (a_+ c_+)$$

irányított szög.

3.2.2. Az irányított szögek összege független a reprezentánsok választásától. Az irányított szögek az összeadásra nézve Abel csoportot alkotnak.

Bizonyítás. Ha az összeadásnál az $\alpha = \angle (a'_+, b'_+)$; $\beta = \angle (b'_+, c'_+)$ reprezentánsokból indulunk ki, akkor legyen φ az a mozgás, amelyre $\varphi(a'_+) = a_+$ teljesül. Az előző tétel miatt $\varphi(b'_+) = b_+$ és

$\varphi(c_+) = c'_+$ is teljesül, ezért

$$\begin{aligned} \angle(a'_+ b'_+) + \angle(b'_+ c'_+) &= \angle(a'_+ b'_+) = \angle(\varphi(a_+), \varphi(b_+)) = \\ &= \angle(a_+ b_+), \end{aligned}$$

ami az első állítást bizonyítja.

Az összeadás asszociatív, mert az

$$\alpha = \angle(a_+ b_+), \beta = \angle(b_+ c_+), \gamma = \angle(c_+ d_+)$$

szögekre tetszőleges zárójelzés esetén mindig

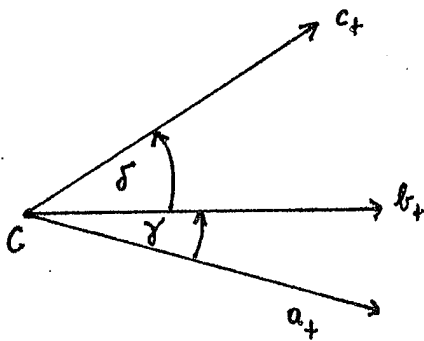
$$\alpha + \beta + \gamma = \angle(a_+ d_+)$$

adódik.

Az egységelem szerepét az $\angle(a_+ a_+)$ un.n. nulla szög játssza, továbbá valamely $\angle(a_+ b_+)$ szög inverze a $\angle(b_+ a_+)$ szög.

Ezzel beláttuk, hogy az irányított szögek az összeadásra nézve csoportot alkotnak.

Még megmutatjuk, hogy az összeadás kommutatív.



A $\gamma = \angle(a_+, b_+)$ és a $\delta = \angle(b_+, c_+)$ szögekre definíció szerint

$$\gamma + \delta = \angle(a_+, c_+).$$

Ha a félegyenesek kezdőpontját C jelöli, akkor legyen α

ill. β az a C körüli forgás, amelyre $\alpha(a_+) = c_+$ ill. $\beta(b_+) = a_+$ teljesül. Mivel $\alpha\beta = \beta\alpha$, ezért

$$\begin{aligned} \delta + \gamma &= \angle(b_+, c_+) + \angle(a_+, b_+) = \angle(b_+, c_+) + \angle(\alpha(a_+) \alpha(b_+)) = \\ &= \angle(b_+, c_+) + \angle(c_+ \alpha(b_+)) = \angle(b_+ \alpha(b_+)) = \angle(\beta(b_+), \\ &\beta \alpha(b_+)) = \angle(\beta(b_+), \alpha \beta(b_+)) = \angle(a_+ \alpha(a_+)) = \angle(a_+, c_+) = \\ &= \gamma + \delta, \end{aligned}$$

ami az állítást bizonyítja. □

Az irányított szögek között rendezés is definiálható.

A síkot irányítottnak tekintsük, és az α, β irányított szögekhez tekintsünk $\alpha = \angle (a_+, b_+)$, $\beta = \angle (a_+, c_+)$ alakú reprezentánsokat. Az a_+, b_+, c_+ félegyenesek O közös kezdőpontja körül vegyük fel az egység sugarú kört, amelyet a félegyenesek rendre az A, B, C pontokban metszenek.

A β szöget az α szögnél nagyobb egyenlőnek mondjuk (jelben $\beta \geq \alpha$), ha az $\widehat{AC}$ ív az $\widehat{AB}$ ívet tartalmazza.

A definícióból látható, hogy az irányított szögek között ilyen módon teljes rendezést definiáltunk.

Valamely a_+ félegyeneshez jelölje a_- a kiegészítő félegyeneset. Az $\angle (a_+, a_+)$ szöget nulla szögnek az $\angle (a_+, a_-)$ szöget pedig egyenes szögnek nevezzük. Az egyenes szögnél kisebb szögeket konvexnek, a nagyobbakat pedig konkávnak mondjuk.

Mivel a konkáv szögek közti rendezés megváltozik, ha a sík ellentétes irányítására térünk át, ezért a fent definiált rendezés a sík irányításától nem független.

A következőkben az irányított síkban a szögek sinusát definiáljuk. Az $\alpha = \angle (a_+, b_+)$ szöghöz az A ill. a B az a_+ ill. b_+ félegyeneseken a kezdőponttól egységnyi távolságra eső pontokat jelöli, a B' pedig a B pontnak az a_+ tartóegyenesén vett merőleges vetületét jelöli. Az α szög sinusa definíció szerint a

$$(3.2.2.) \quad \sin \alpha := \xi |BB'|$$

érték, ahol $\xi = 1$, ha az α konvex, $\xi = 0$, ha az α az egyenes szög, és $\xi = -1$, ha az α konkáv.

A definícióból nyilvánvalóan következik a

$$(3.2.3.) \quad \sin \angle (a_+, b_+) = - \sin \angle (b_+, a_+)$$

összefüggés.

Az alábbiakban a forgások szögét definiáljuk.

A C centrumu φ forgáshoz tekintünk C kezdőpontu a_+ jel-
egyenest.

3.2.2. Az $\angle (a_+, \varphi(a_+))$ un.n. forgásszög az a_+ félegyenes választá-
sától független.

Két azonos centrumu forgás szorzatának forgásszöge, az egyes
forgásszögek összegével egyenlő.

Bizonyítás. Ha a, b_+ másik C kezdőpontu félegyenes, és β az a C
centrumu forgás, amelyre $\beta(b_+) = a_+$ teljesül, akkor az $\alpha\beta = \beta\alpha$
felcserélhetőséget felhasználva a következőket írhatjuk:

$$\begin{aligned} \angle (b_+, \alpha(b_+)) &= \angle (\beta(b_+), \beta\alpha(b_+)) = \angle (a_+, \alpha\beta(b_+)) = \\ &= \angle (a_+, \alpha(b_+)). \end{aligned}$$

Ezzel az első állítást bebizonyítottuk.

A második állítás bizonyításához legyen α és β két C centrumu
forgás, és a_+ C kezdőpontu félegyenes. Ekkor

$$\angle (a_+, \alpha(a_+)) + \angle (\alpha(a_+), \beta\alpha(a_+)) = \angle (a_+, \beta\alpha(a_+)),$$

ami a második állítást bizonyítja. □

A következőkben az irányítatlan szög fogalmát vezetjük be, és
minden ilyen szöghöz a szög u.n. cosinusát is definiáljuk.

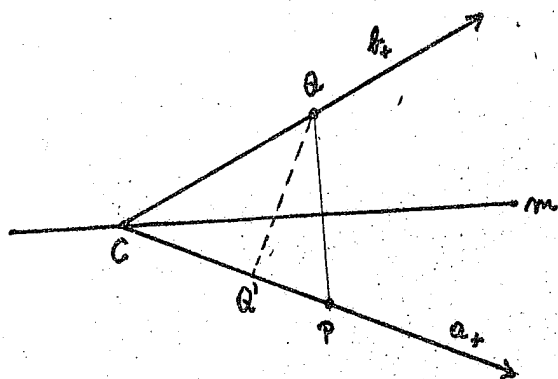
Az elemi irányított szögek között ismét egy ekvivalencia reláci-
ót vezetünk be. Most akkor mondjuk, hogy az (a_+, b_+) elemi szög re-
lációban áll a (c_+, d_+) elemi szöggel, ha létezik olyan φ izometria,
amelyre $\varphi(a_+) = c_+$ és $\varphi(b_+) = d_+$ teljesül. Ez a reláció nyilvánvalóan
ekvivalencia, és az ekvivalencia osztályait irányítatlan szögeknek ne-

vezzük. Valamely $(a_+ b_+)$ elemi szög által reprezentált irányítatlan szöget az $\angle (a_+ b_+)$ szimbólummal jelöljük.

Az irányítatlanság elnevezést a következő szimmetria indokolja.

$$(3.2.4.) \quad \angle (a_+ b_+) = \angle (b_+ a_+).$$

Bizonyítás. Az $(a_+ b_+)$ elemi szög a_+ ill. b_+ szárain vegyük fel



a C csucstól egységnyi távolságra lévő P ill. Q pontokat, valamint legyen m a PQ szakaszra merőleges és a C csúcsponton áthaladó egyenes.

Ekkor az S_m tükrözés az a_+ és b_+ félegyeneseket egymás-

sal felcseréli, ami az állítást igazolja. $\square$

Tekintsük most az α irányítatlan szög valamely $(a_+ b_+)$ reprezentációját, és az a_+ félegyenes "a" tartóegyenesen tekintsük azt a

$\leq$ rendezést, amelyben a félegyenes a növekvő pontok irányába mutat.

Legyen továbbá Q a b_+ félegyenesen a C csucstól egységnyi távolságra lévő pont, valamint Q' ennek merőleges vetülete az "a" egyenesen.

Az α szög cosinusán a C és Q pontok előjeles távolságát értjük, vagyis

$$(3.2.4.) \quad \cos \alpha = \cos \angle (a_+ b_+) = \varepsilon |C, Q|,$$

ahol $\varepsilon = +1$ ha $C \leq Q$ és $\varepsilon = -1$ ha $Q < C$.

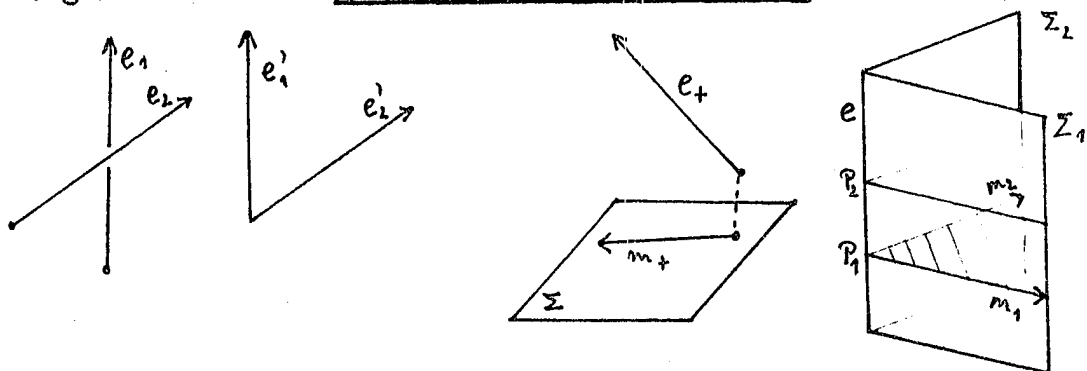
Világos, hogy az előbb definiált cosinus érték a szög reprezentációjának választásától független. Így pl. a

$$(3.2.5.) \quad \cos \angle (a_+ b_+) = \cos \angle (b_+ a_+)$$

szimmetria is érvényes.

Még röviden a szögfogalom térben történő definíciójára térünk ki. Megjegyezzük, hogy a térben az irányított szög fogalma nem vezethető be, mivel minden (a_+, b_+) elemi szöghöz olyan térmozgás is létezik, amelyik az a_+ és b_+ félegyeneseket egymással felcseréli. Így a térben csak az irányítatlan szögeket definiáljuk, és ezeket is a síkbeli esethez teljesen hasonló módon. Az ezekhez a szögekhez rendelt cosinus érték is az előbb leírt módon vezethető be.

Végül a különböző térellemek közti hajlásszögeket definiáljuk.

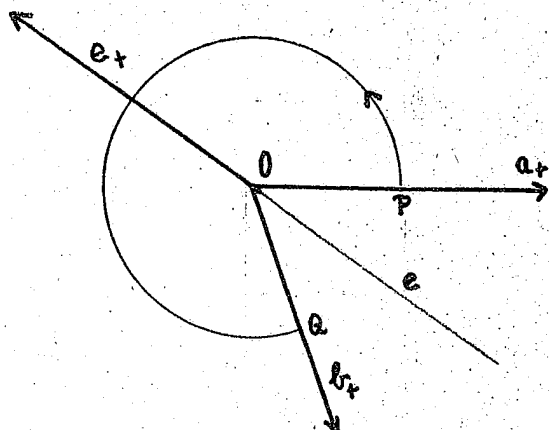


Két félegyenes hajlásszögét úgy értelmezzük, hogy a két félegyeneset párhuzamos eltolással közös kezdőpontú félegyenesekbe toljuk, és az így nyert elemi szög által reprezentált szög a két félegyenes szöge. Mivel ezek az elemi szögek csak párhuzamos eltolásban különböznek egymástól, ezért ez a szög egyértelműen meghatározott.

Tetszőleges e_+ félegyenes és Σ sík szögét a következőképpen definiáljuk. Az e_+ félegyenes Σ síkon vett merőleges vetületét az m_+ jellel jelöljük. Ha az m_+ egyetlen pont, akkor az e_+ és a Σ merőleges, ha pedig az m_+ pontthalmaz félegyenes, akkor az e_+ és a Σ szögek definíció az e_+ és az m_+ szöge.

A közös e határoló egyenessel rendelkező Σ_1 és Σ_2 fél-síkokból az e egyenesre merőleges síkok $(m_1; m_2)$ félegyeneseket metszenek ki. Ezek szöge egyértelműen meghatározott, amit a Σ_1 és Σ_2 szögének nevezünk.

3. § Szögmérés

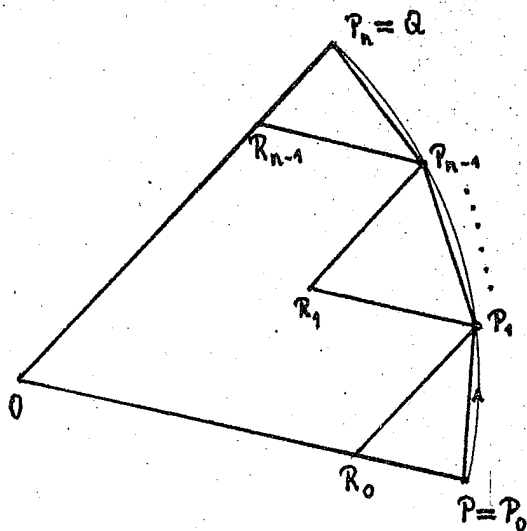


Az O csucsu (a_+, b_+) elemi szöghöz tekintsük azt az e egyenest, amelyre vonatkozó tükrözés az a_+ , b_+ félegyeneseket felcseréli egymással. Az e egyenest az elemi szög szögfelező egyenesének nevezzük. Ha az elemi szög síkja irányított, akkor rajzoljunk az O köré

egység sugaru kört, amelyik az a_+ ill. b_+ félegyeneseket a P ill. Q pontokban metszi.

Az e szögfelező azon O végpontu e_+ félegyenesét, amelyik a $\widehat{PQ}$ ívet metszi az (a_+, b_+) irányított elemi szög szögfelezőjének nevezzük.

Tekintsünk egy O középpontu $\widehat{PQ}$ ívet, és az ív rendezését figyelembevéve vegyünk fel ezen az íven egy



$$P = P_0 \leq P_1 \leq P_2 \leq \dots \leq P_n = Q$$

beosztást. A szomszédos osztáspontokat összekötve az ívbe írt u.n. közelítő poligon hossza $\sum |P_i P_{i+1}|$. A $\widehat{PQ}$ ív $\lambda(P, Q)$ jellel jelölt ívhossza definíció szerint az

$$\lambda(P, Q) := \sup \sum |P_i P_{i+1}|,$$

ahol Δ a beosztást jelöli, a szüremum pedig az összes beosztásra nézve értendő.

A definícióból közvetlenül látható, hogy az izometriák az ívek hosszát változtatlanul hagyják. Egy teljes kör kerületét az $\lambda(PP)$ számmal definiáljuk. Nyilvánvaló, hogy ez az érték független a P pont választásától.

3.3.1. Az ívhossz additív, vagyis egy ív minden $P \leq Q \leq R$ pontjára

$$\lambda(PQ) + \lambda(QR) = \lambda(PR)$$

teljesül.

Bizonyítás: Ha a $\widehat{PR}$ ívben olyan közelítő poligonokat tekintünk, amelyekhez a Q pont töréspontként tartozik hozzá, akkor az ilyen poligonok ívhosszainak szuprénuma nyilván nem más, mint a fenti egyenletben a baloldalon álló összeg. Ezért

$$\lambda(PQ) + \lambda(QR) \leq \lambda(PR).$$

De ha azt is figyelembe vesszük, hogy a $\widehat{PR}$ ív tetszőleges közelítő poligonjának a hosszát növeljük, vagy változtatlanul hagyjuk, ha a Q pontot közrefogó $\widehat{P_i P_{i+1}}$ ív esetén a $\overline{P_i P_{i+1}}$ húr kicseréljük a $\overline{P_i Q}$ és $\overline{QP_{i+1}}$ hurokra, akkor ebből már megkapjuk a bizonyítandó azonosságot, hiszen az utóbbi megjegyzésből $\lambda(PQ) + \lambda(QR) \geq \lambda(PR)$ következik. $\square$

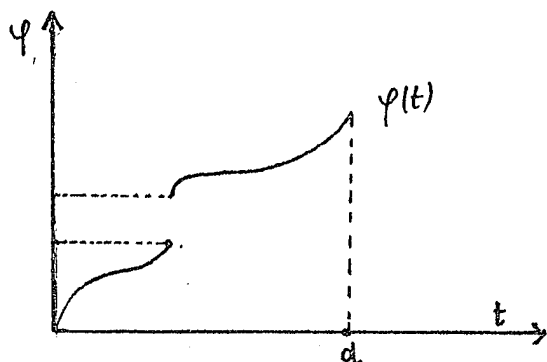
3.3.2. Minden $\widehat{PQ}$ ív hossza véges szám.

Bizonyítás: Az előbb igazolt additív tulajdonság miatt elegendő csak az olyan ívek hosszának korlátosságát igazolnunk, amelyekre az OP_+ és OQ_+ félegyenesek a konvex derékszögnél nem nagyobb szöget zárnak be.

Tekintsük a $\widehat{PQ}$ ív egy $P \leq P_1 \leq \dots \leq P_{n-1} \leq Q$ beosztását (ld. az ábrát) és egy $\overline{P_i P_{i+1}}$ húr P_i ill. P_{i+1} végpontjain át huzzunk párhuzamosokat az OP ill. az OQ egyenesekkel. Ezek az egyenesek egy R_1 pontban metszik egymást. A háromszög-egyenlőtlenség miatt

ból kiindulva paraméterezzük a P_* végponttól mért távolság szerint, tehát minden Q_* pontot azonosítsunk a $|P_* Q_*|$ távolsággal. Ez után a $\overline{P_* R_*}$ szakaszt úgy tekintjük, mint a valós számok $[0, d]$ intervallumát, ahol $d = |P_* R_*|$. Rendeljük most hozzá ennek az intervallumnak minden Q_* pontjához a $\widehat{PQ}$ ív ívhosszát. Mivel a $Q_* \rightarrow Q$ hozzárendelés a $\overline{P_* R_*}$ szakaszt a $\widehat{PR}$ ívre kölcsönösen egyértelműen képezi le, sőt rendezéstartó módon, ezért a $\varphi(Q_*) = \lambda(PQ)$ valós számokon értelmezett való függvény szigorúan monoton nő és $\varphi(P_*) = 0$, $\varphi(R_*) = \chi/4$. A tételünk bizonyításához annyit kell belátnunk, hogy a φ a $[0, \chi/4]$ intervallumban minden értéket felvesz.

Az ívhossz additív tulajdonsága miatt világos a $\varphi(M) = \chi/8$ azonosság is. A $\widehat{PM}$ és $\widehat{MR}$ íveket újra felezhetjük, mégpedig a felezőpontok azok a pontok lesznek, amik az ívből a $\overline{PM}$ ill. $\overline{MR}$ hurok felezőmerőlegese kimetsz. Ezekhez a pontokhoz a $\chi/16$ ill. $3\chi/16$ érték rendelődik. Ezeket a felezéseket vég nélkül ismételve látható,



hogy a φ függvény felvett értékei között minden $m\chi/2^k$ alaku szám előfordul, ahol $m < k$ nem-negatív egész számok. Ezek a számok $[0, \chi/4]$ intervallumban mindenütt sűrűn helyezkednek el,

ami annyit jelent, hogy az intervallumban minden pontnak minden környezetében létezik ilyen alaku szám. De a $\varphi(t)$ szigorúan monoton nő, így az előbb látott tulajdonság miatt minden értéket fel kell vennie. Ugyanis ha a $\varphi(t)$ függvénynek létezne ugráspontja, akkor ismeretes, hogy egy egész intervallumba eső értékeket átugrana. Ez pedig ellentmondás volna, mert minden intervallumba esik $m\chi/2^k$ alaku szám. Ezzel a tételt be-

bizonyítottuk. □

Tekintsünk egy $\chi > 0$ valós számot. Minden $y \in \mathbb{R}$ valós számra $y \bmod \chi$ azt az egyértelmű $z \in [0, \chi)$ valós számot jelöli, amelyre $y = k\chi + z$ valamely k egész számra.

Ennek a jelölésnek a segítségével a $[0, \chi)$ intervallumon (amelyik balról zárt, jobbról nyitott) a következő $*$ jellel jelölt műveletet definiáljuk. Ha $z, y \in [0, \chi)$, akkor definíció szerint $z * y := (z + y) \bmod \chi$. Ez a művelet asszociatív, mivel bármely $y, z, v \in [0, \chi)$ valós számokra

$$(y * z) * v = y * (z * v) = (y + z + v) \bmod \chi.$$

A művelet nyilván kommutatív, a 0 elem játsza az egységelem szerepét, valamint az $y \in (0, \chi)$ elem inverze a $\chi - y \in (0, \chi)$ elem, és $0^{-1} = 0$. Tehát a $[0, \chi)$ intervallum a $*$ művelettel együtt Abel csoportot alkot.

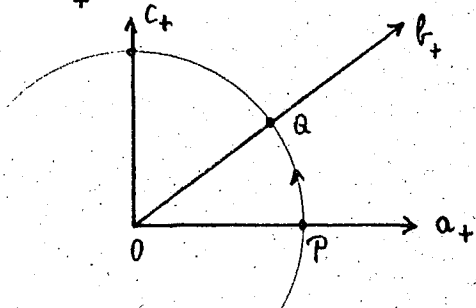
A szögek mérésére a következő tétel vonatkozik. Jelölje I az irányított szögek halmazát.

3.3.4. Pontosan egy $\varphi: I \rightarrow [0, \chi)$ ráképezés létezik, amely

1. Nagyobb szöghöz nagyobb értéket rendel,
2. additív, vagyis $\varphi(\alpha + \beta) = \varphi(\alpha) * \varphi(\beta)$,
3. Az egyenes szöghöz a $\chi/2$ szöget rendeli.

Bizonyítás. A bizonyítást egy tetszőlegesen rögzített $\chi_0 > 0$ értékre végezzük el. Válasszunk ki az irányított síkban egy a_+ félegyenest, és minden α irányított szöget az (a_+, b_+) alakban reprezentáljuk. Irjuk

az a_+ félegyenes 0 kezdőpontja köré a χ_0 kerületű kört, amelyet az



a_+ a P pontban a b_+ pedig a Q pontban metsz. Ha az α irányított szöghöz a $\widehat{PQ}$ ív hosszát rendeljük, akkor ez a függvény nyilvánvalóan

kielégítit a tételben megfogalmazott három tulajdonságot. Ezzel a függvény egzisztenciáját megmutattuk.

Az unicitás igazolásához paraméterezzük az irányított szögeket az előbb levezetett φ_0 leképezés segítségével, és tekintsünk egy másik, a tételnek megfelelő φ_* leképezést. A paraméterezés figyelembe vételével a φ_* ugy tekinthető, mint egy $[0 \chi_0)$ intervallumon értelmezett valós értékű szigorúan monoton növekedő $\varphi_*(t)$ függvény. Az unicitáshoz a $\varphi_*(t) = t$ azonosságot kell igazolnunk. Vegyük észre, hogy az 1. és 2. tulajdonságok miatt a konvex derékszöghöz mindig a $\chi_0 / 4$ érték, és ennek $\chi_0 / 8$ paraméterű félszögéhez a φ_* is a $\chi_0 / 8$ értéket rendeli. Az utóbbi szöget felezve, és az eljárást tovább folytatva kapjuk, hogy a k -ik lépésben a

$\chi_0 / 2^k 4$ paraméterű szöghöz a φ_* is ezt az értéket rendeli hozzá. Ismét a 2. additív tulajdonság felhasználásával kapjuk a $\varphi_*(m \chi_0 / 2^k 4) = m \chi_0 / 2^k 4$ (ahol m és k természetes számok) azonosságot a $[0 \chi_0)$ intervallum minden $m \chi_0 / 2^k 4$ alakú diadikus racionális értékére. Ezek a diadikus racionális számok a $[0 \chi_0)$ intervallumban mindenütt sűrűn helyezkednek el.

A $\varphi_*(t) = t$ azonosságot a $[0 \chi_0)$ intervallum diadikusan irracionális értékére kell már csak igazolnunk, tehát azokra, amelyek nem állnak elő $m \chi_0 / 2^k 4$ alakban. Ha t ilyen diadikusan irracionális szám, és t_1, t_2 olyan diadikusan racionális számok, amelyekre $t_1 < t < t_2$ érvényes, akkor a monoton növekedés miatt $\varphi_*(t_1) = t_1 < \varphi_*(t) < t_2 = \varphi_*(t_2)$ is érvényes. Mivel ilyen t_1 és t_2 egymáshoz tetszőleges közel választható, ezért $\varphi_*(t) = t$, és ezzel az állítást igazoltuk. $\square$

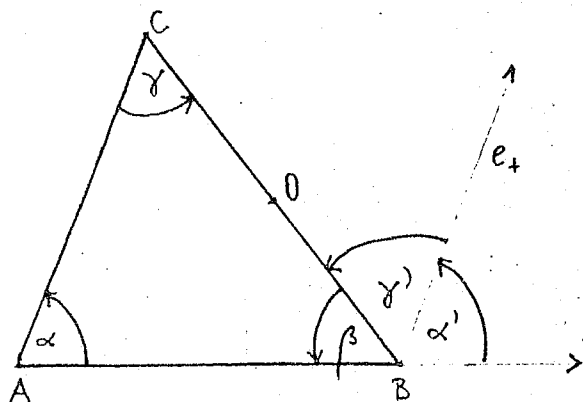
A szögmérést a φ leképezés segítségével definiáljuk. Ha $\chi = 2\pi$,

tehát amikor a szög nagyságát az egységgörből kimetszett ív hosszával mérjük, akkor az α irányított szöghöz rendelt $\varphi(\alpha)$ értéket a szögnek radiánban mért mértékének nevezzük. Ha pedig $\chi = 360$, akkor a $\varphi(\alpha)$ érték a szögnek fokban mért értéke.

4. § Elemi tételek szögekről

(3.4.1.) | A háromszögek belső szögeinek összege egyenes szög.

Bizonyítás: Legyen a háromszög ABC és legyen e_+ a B csúcson keresztül



az AC oldallal az a párhuzamos félegyenes, amelyik az AB egyenesnek a C pontot tartalmazó félsíkja esik. Ekkor az ábra szerinti α' és γ' szögek megegyeznek az α és γ szögekkel, mert az a párhuzamos eltolás, amelyik az A pontot a B pontba viszi egyben az α elemi szö-

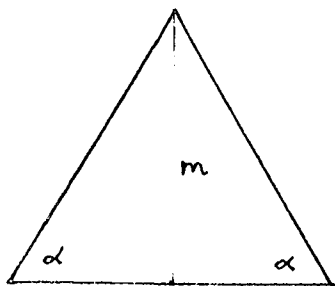
get az α' elemi szögbe viszi, továbbá ha O a $\overline{CB}$ szakasz felezőpontja, akkor az O pontra vett centrális tükrözés a γ elemi szöget a γ' elemi szögbe viszi. Így $\alpha + \beta + \gamma = \alpha' + \beta + \gamma'$, ami az állítást igazolja. □

Egy háromszögben valamely belső szög kiegészítő szögét külső szögnek nevezzük. Az előző tétel bizonyításából azonnal megkapjuk a következő tételt is.

(3.4.2.) | A háromszögben bármely külső szög megegyezik a két nem mellette lévő belső szög összegével.

(3.4.3.) | Az egyenlő szárú háromszögekben az alapon lévő, két (irányítatlan) szög megegyezik egymással.

Bizonyítás: A két szár közös csúcsa az alap m oldalfelező merőleges-

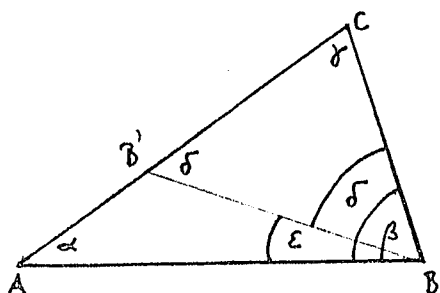


sére illeszkedik, így erre az m egyenesre vonatkozó tengelyes tükrözés az alapon lévő belső szögeket egymással felcseréli. Ez pedig az állításunkat igazolja. $\square$

(3.4.4.) | A háromszögekben nagyobb oldallal szemben nagyobb szög fekszik.

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy az ABC háromszögben $|AC| > |BC|$ teljesül.

Jelölje B' az $\overline{AC}$ szakasz belsőjében azt a pontot, amelyre $|CB'| = |CB|$

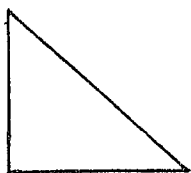


érvényes. Ekkor az ábrán lévő δ szögek egymással megegyeznek. Ugyancsak az ábráról leolvashatjuk az alábbi egyenlőtlenségeket.

$$\beta > \delta = \alpha + \epsilon > \alpha,$$

ami éppen az állításunkat igazolja. $\square$

A fenti tételből speciális esetként adódik, hogy egy derékszögű háromszögben a derékszöggel szemben lévő átfogó mindig hosszabb, mint a másik két befogó. Ugyanis ekkor a másik két szög



összege derékszög, így külön-külön mindegyik kisebb a derékszögnél.

A következő tételben a háromszögek egybevágóságának kérdésével foglalkozunk.

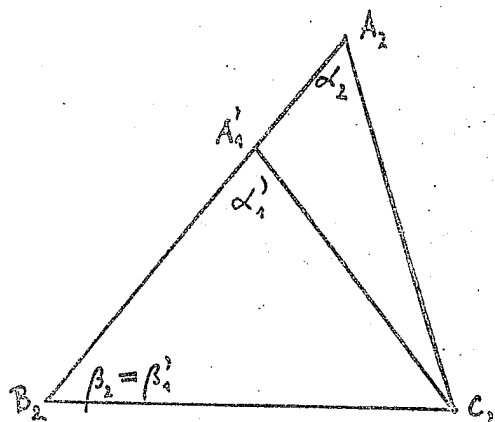
(3.4.5.) | Két háromszög egybevágó, ha

1. két oldalak s az általuk közrefogott szögük egyenlő,
2. egy oldalak s a rajta fekvő két szögük egyenlő,
3. egy oldaluk, a szemközti szögük az oldalon fekvő szögük megegyezik,
4. két oldaluk, s ezek közül a nagyobbikkal szemben fekvő szögük

egyenlő.

Bizonyítás: Az 1. és a 2. pontban szereplő két háromszög két egymásnak megfelelő egyenlő oldala legyen $\overline{AB}$ és $\overline{A'B'}$. Ekkor a két háromszöget triviális módon vagy az a mozgás transzformálja egybe, amelyik az $\overline{AB}$ szakaszt az $\overline{A'B'}$ szakaszba viszi, vagy pedig ezt a mozgást még szorozni kell az $A B$ egyenesre vonatkozó tengelyes tükrözéssel. Tehát ekkor a két háromszög valóban egybevágó.

A 3. pontban szereplő állításban legyen a két háromszög $A_1 B_1 C_1$ és $A_2 B_2 C_2$ a $|B_1 C_1| = |B_2 C_2|$, $\beta_1 = \beta_2$ és $\alpha_1 = \alpha_2$ azonosságokkal.



Vegyük azt az izometriát, amelyik a $\overline{B_1 C_1}$ szakaszt a $\overline{B_2 C_2}$ szakaszba és a β_1 elemiszöget a β_2 elemi szögbe transzformálja. Ilyen izometria egyértelműen létezik. Ekkor az A_1 pont A_1' képére $A_1' = A_2$ teljesül, mert ellenkező esetben

az $A_1' C_2 A_2$ háromszögben egy külső szög megegyezne egy nem mellette lévő belsőszöggel, ami lehetetlen, hiszen egy külső szög a két nem mellette lévő belsőszög összege.

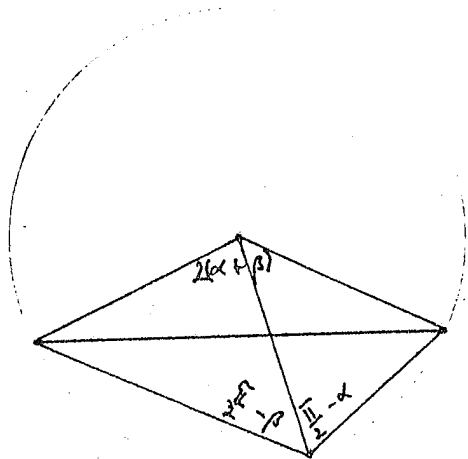
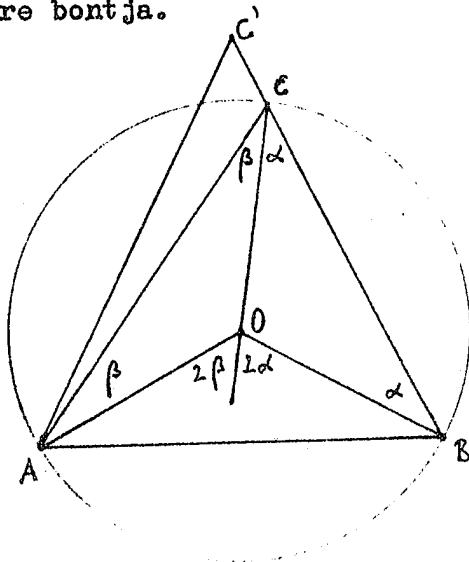
Ha a 4. pontban a két háromszöget ismét $A_1 B_1 C_1$ és $A_2 B_2 C_2$ jelöli a $|B_1 C_1| < |C_1 A_1|$, $|B_1 C_1| = |B_2 C_2|$, $\beta_1 = \beta_2$, $|C_1 A_1| = |C_2 A_2|$ tulajdonságokkal, akkor ismét vigyük az $A_1 B_1 C_1$ háromszöget izometrikusan úgy tovább, hogy a $\overline{B_1 C_1}$ szakasz a $\overline{B_2 C_2}$ szakaszba és a β_1 elemi szög a β_2 elemi szögbe kerüljön át. Ennél az izometriánál az A_1 pontnak az A_2 pontba kell kerülnie. Ugyanis indirekt feltevésként tegyük fel, hogy az A_1 pont A_1' képe a $\overline{B_2 A_2}$ szakasz belsőjében van. (Ha A_1'

a $\overline{B_2A_2}$ szakaszon kívül helyezkedne el, akkor hasonlóan bizonyítunk.).
Megmutatjuk, hogy a $C_2B_2A_2\angle = \beta_2$ szög kisebb lenne mint a $C_2A_1B\angle = \alpha_1'$ szög, ami ellentmond a "nagyobb oldallal szemben nagyobb szög fekszik" tételnek.

Valóban, az $A_2A_1C_2$ háromszög egyenlőszáru és ennek alapja az $\overline{A_2A_1}$ szakasz. Így az alapon lévő $C_2A_1A_2\angle$ szög kisebb a derékszögnél, és ezért ennek α_1' kiegészítő szöge nagyobb a derékszögnél. A háromszög szögeinek szögösszege miatt ekkor a $\beta_2 = \beta_1'$ szögnek kisebbnek kellene lennie a derékszögnél így valóban $\beta_2 < \alpha_1'$ teljesülne, ami a fenti megfontolások alapján ellentmondásra vezetne. Ezzel a tétel bizonyítását befejeztük. $\square$

Bebizonyítjuk a kerüli szögek tételét is.

Tekintsünk egy kört és abban egy hurt. A hur végpontja a kört két körívre bontja.



(3.4.6.) A körben a hur által meghatározott egyik ív és annak a hurra vett tükörképe pontosan azokat a pontokat tartalmazza, amely pontokból a hur két végpontja azonos szögben látszik.

Bizonyítás: Legyen a hur két végpontja A és B a kör középpontja O, valamint a kör egy tetszőleges pontja C. Ha az $\angle AOB$ szög $2(\alpha + \beta) = \gamma$ (ld. az ábrát), akkor az $\angle ACB$ szög az ábra alapján vagy $\alpha + \beta = \gamma/2$ vagy pedig $\pi - (\alpha + \beta) = \pi - \gamma/2$, attól függően, hogy a C pont melyik köríven helyezkedik el.

Világos, hogy a hurra tükrözött körív pontjaiból a hur két végpontja ismét ugyanolyan szög alatt látszik.

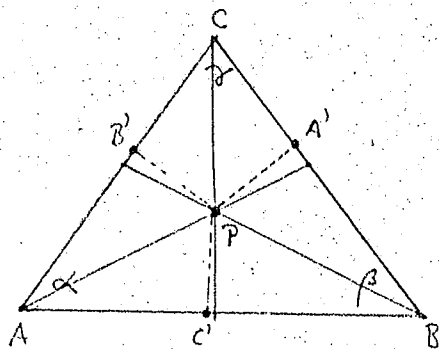
De más pontból a hur már más szög alatt látszik. Ugyanis, ha a tekintett ívre nem illeszkedő C' pontra a $\angle BC'A$ szög is $\gamma = 2(\alpha + \beta)$ lenne, akkor a $\triangle ACC'$ háromszög egyik külső szöge egyenlő lenne az egyik nem mellette lévő belsőszöggel, ami lehetetlen. Ezzel a bizonyítást befejeztük. $\square$

Az előző tétel speciális eseteként Thales tétele adódik, vagyis, hogy egy szakasz, mint átmérő fölé írt kör azokat a pontokat tartalmazza, amelyekből a szakasz két végpontja derékszög alatt látszik.

A szögfelező korábban adott definíciójából könnyen kimutatható, hogy a szögfelező pontosan azokat a pontokat tartalmazza, amelyekből a szög-szárakra bocsátott két merőleges szakasz hossza megegyezik.

Ennek segítségével igazolható a következő tétel.

(3.4.7.) | Egy háromszög szögfelezői közös pontra illeszkednek.



Bizonyítás: Ha P jelöli az ABC háromszög A és B csucsából kiinduló szögfelezőjét és ennek a pontnak a merőleges vetületei az oldalakon A', B', C' , akkor $|PB'| = |PC'| = |PA'|$.

Igy a P pont illeszkedik a C csucs-

ból kiinduló szögfelezőre is. Ez pedig éppen az állításunkat igazolja. $\square$

Ha a P pont körül, mint centrum körül, egy $r = |PA'| = |PB'| = |PC'|$ sugaru kört rajzolunk, akkor ennek a körnek mindegyik oldallal csak egyetelen közös pontja lesz, mégpedig az A', B', C' pontok, hiszen az oldalakon lévő többi pont az r értéknél nagyobb távolságra helyezkedik el. Ezt úgy fejezzük ki, hogy a kör érinti az oldalakat. Ezt az egyértelműen meghatározott kört a háromszögbe írt körnek nevezzük.

4. FEJEZET

VEKTOROK

1. § Vektorok definíciója, vektorműveletek

A (P, Q) alaku rendezett pontpárokat kötött vagy más szóval elemi vektornak nevezzük, de a "Q pontnak a P pontra vonatkozó helyvektora" elnevezést is használjuk. A P pontot kezdőpontnak a Q pontot pedig végpontnak hívjuk.

A (P, Q) és a (P', Q') elemi vektorokat ekvivalensnek nevezzük, ha létezik olyan φ párhuzamos eltolás, amelyre $\varphi(P) = P'$ és $\varphi(Q) = Q'$ teljesül.

Nyilvánvaló, hogy az elemi vektorok között ez a reláció ekvivalencia reláció. Az ekvivalencia osztályokat szabadvektoroknak vagy egyszerűen vektornak nevezzük, és jelölésükre aláhuzott latin kisbetűket használunk (a, b, c, ...). A (P, Q) elemi vektor által reprezentált vektort a PQ jellel jelöljük.

Egy korábban bizonyított tételből nyilvánvalóan következik, hogy egy ABCD paralelogrammában a szemköztes (A, B) , (D, C) elemi vektorok ugyanazt a vektort reprezentálják, mivel ekkor az A pontot a D pontba transzformáló eltolás a C pontot a B pontba viszi át.

4.1.1. Tetszőleges P pontra és $\underline{x}$ vektorra pontosan egy $\underline{x} = \underline{PQ}$ reprezentáns létezik.

Bizonyítás: Ha (P', Q') az $\underline{x}$ tetszőleges reprezentánsa, és φ az a párhuzamos eltolás, amelyre $\varphi(P') = P$ teljesül, akkor nyilvánvaló, hogy az $\underline{x}$ P kezdőpontu reprezentánsa (a φ egyértelműsége miatt) az egyértelműen meghatározott $(P, \varphi(Q'))$ elemi vektor.

Minden $\underline{x} = \underline{PQ}$ vektorra a $|\underline{PQ}|$ távolság egyértelműen meghatározott, amit az $\underline{x}$ vektor abszolút értékének nagy más szóval normájának nevezük. Az $\underline{x} = \underline{PP}$ vektor normája zérus. Ezt a vektort zérus vektornak nevezzük és $\underline{0}$ jellel jelöljük. Valamely $\underline{AB} \neq \underline{0}$ vektor irányán az $\underline{AB}$ egyenesek párhuzamossági osztályát értjük.

Két zérustól különböző $\underline{x}, \underline{y}$ vektor szögét a következő módon definiáljuk. Tekintsünk két azonos kezdőpontú $\underline{x} = \underline{PQ}$, $\underline{y} = \underline{PR}$ reprezentánsot, és vegyük a P kezdőpontú PQ ill. PR félegyeneseket. Az $\underline{x}$ és $\underline{y}$ szöge definíció szerint ezeknek a félegyeneseknek a szöge. Világos, hogy ez a szög független a reprezentánsok választásától. Jelölésére az $\sphericalangle(\underline{x}, \underline{y})$ szimbólumot használjuk.

Most a vektorok összeadását definiáljuk.

Az $\underline{x}$ és $\underline{y}$ vektorokhoz tekintsünk $\underline{x} = \underline{PQ}$, $\underline{y} = \underline{QR}$ alakú reprezentánsokat. Az $\underline{x}$ és $\underline{y}$ összege definíció szerint az

$$(4.11) \quad \underline{x} + \underline{y} = \underline{PQ} + \underline{QR} := \underline{PR}$$

vektor.

4.1.2. Két vektor összege független a reprezentánsok választásától. A vektorok az összeadásra nézve Abel csoportot alkotnak.

Bizonyítás. Ha az $\underline{x} = \underline{PQ}$, $\underline{y} = \underline{QR}$ két másik reprezentáns, és α az a párhuzamos eltolás, amelyre $\alpha(P) = P'$ teljesül, akkor az $\alpha(Q) = Q'$, $\alpha(R) = R'$ is érvényes. Ebből pedig a

$$\underline{P'Q'} + \underline{Q'R'} = \underline{P'R'} = \underline{\alpha(P) \alpha(R)} = \underline{PR} = \underline{PQ} + \underline{QR}$$

azonosság következik, ami az első állítást igazolja.

Az összeadás asszociatív, hiszen a $\underline{PQ} + \underline{QR} + \underline{RS}$ kifejezés bármely zárójellezésére

$$\underline{PQ} + \underline{QR} + \underline{RS} = \underline{PS}$$

adódik. A $\underline{0} = \underline{PP}$ vektor az egységelem, valamint a $\underline{PQ}$ vektor inverze a $\underline{QP}$ vektor. Ezzel beláttuk, hogy a vektorok az összeadásra nézve csoportot alkotnak.

Még megmutatjuk, hogy ez a csoport kommutatív is.

Az $\underline{x} = \underline{PQ}$ és $\underline{y} = \underline{QR}$ vektorokat tekintve legyen φ ill. φ^* az a párhuzamos eltolás, amelyre $\varphi(P) = R$ ill. $\varphi^*(Q) = R$ teljesül.

Ekkor

$$\begin{aligned} \underline{y} + \underline{x} &= \underline{QR} + \underline{PQ} = \underline{QR} + \underline{\varphi(P) \varphi(Q)} = \underline{QR} + \underline{R \varphi(Q)} = \\ &= \underline{Q \varphi(Q)} = \underline{\varphi^*(Q) \varphi^* \varphi(Q)} = \underline{\varphi^*(Q) \varphi \varphi^*(Q)} = \\ &= \underline{P \varphi(P)} = \underline{PR} = \underline{PQ} + \underline{QR} = \underline{x} + \underline{y}, \end{aligned}$$

ami az állításunkat igazolja. □

Átérünk a vektorok valós számmal való szorzásának definíciójára.

Ha $\underline{x} = \underline{0}$, akkor minden λ valós számra definíció szerint $\lambda \underline{x} = \underline{0}$.

Ha pedig az $\underline{x} = \underline{PQ}$ vektor nem a zérus vektor, akkor a következő képpen járunk el.

A PQ egyenesen tekintsük azt a $\leq$ rendezést, amelyre $P \leq Q$ teljesül. Minden $R \in PQ$ pontra jelölje $\xi |RP|$ az R pontnak a P ponttól mért előjeles távolságát, vagyis $\xi = 1$, ha $R \geq P$, $\xi = 0$, ha $R = P$ és $\xi = -1$, ha $R \leq P$. Ezek után minden $\lambda \in \mathbb{R}$ valós számra a $\lambda \underline{x}$ azt a $\underline{PR}$ vektort jelöli, amelyre $R \in PQ$ és $\lambda |PQ| = \xi |PR|$ teljesülnek.

A definícióból közvetlenül látható, hogy a $\lambda \underline{x}$ vektor nem függ a (PQ) reprezentáns választásától.

4.1.3. A vektorok valós számmal való szorzására nézve a következő azonosságok érvényesek.

$$|\lambda \underline{x}| = |\lambda| \cdot |\underline{x}|,$$

$$0 \cdot \underline{x} = \underline{0},$$

$$(4.12) \quad 1 \cdot \underline{x} = \underline{x},$$

$$(\alpha \beta) \underline{x} = \alpha (\beta \underline{x}), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

$$(\alpha + \beta) \underline{x} = \alpha \underline{x} + \beta \underline{x}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

$$\alpha (\underline{x} + \underline{y}) = \alpha \underline{x} + \alpha \underline{y}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Bizonyítás. Ha az $\underline{x} = \underline{PQ}$ vektorhoz a PQ egyenes minden R pontját az $\sum |PR|$ valós számmal azonosítjuk, akkor az utolsó azonosság kivételével a többi azonosságok a valós számok közti művelet tulajdonságaiból triviálisan adódnak. Az utolsó disztributív tulajdonságot a Hasonlóságok című paragrafusban igazoljuk. $\square$

Minden α párhuzamos eltolásra a $\underline{P \alpha(P)}$ vektor független a P pont választásától. Ugyanis, ha Q másik pont és β az a párhuzamos eltolás, amelyre $\beta(Q) = P$ teljesül, akkor

$$\underline{Q \alpha(Q)} = \underline{\beta(Q)} \cdot \underline{\beta \alpha(Q)} = \underline{\beta(Q)} \cdot \underline{\alpha \beta(Q)} = \underline{P \alpha(P)},$$

ami az állítást igazolja.

A $\underline{P \alpha(P)}$ vektort az α eltolás-vektorának nevezzük.

4.1.4. Két párhuzamos eltolás szorzatának eltolás-vektora az egyes eltolás-vektorok összegével egyenlő.

Bizonyítás. Ha α és β a két párhuzamos eltolás, akkor

$$\begin{aligned} \underline{P \cdot \alpha \beta(P)} &= \underline{P \beta(P)} + \underline{\beta(P) \alpha \beta(P)} = \underline{P \beta(P)} + \underline{\beta(P) \beta \alpha(P)} = \\ &= \underline{P \beta(P)} + \underline{P \alpha(P)}, \end{aligned}$$

ami az állítást igazolja. $\square$

2. β Párhuzamos szelők tétele

Mindenek előtt olyan lemmát bizonyítunk, amit később is több állítás igazolásához felhasználunk. Ezt a lemmát függvényegyenlet-lemmának nevezzük.

4.2.1. Ha valamely $K : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ valós függvény

1. monoton nő,

2. additív, vagyis

$$K(\lambda_1 + \lambda_2) = K(\lambda_1) + K(\lambda_2), \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R},$$

akkor a $K(\lambda)$ függvény $K(\lambda) = c\lambda$ alakú, ahol a $c = K(1) \geq 0$ konstans érték.

Bizonyítás A $K(\lambda) = c\lambda$ egyenlőséget először a racionális, majd az irracionális λ számokra igazoljuk.

A $\lambda = 0$ esetben

$$K(0) = K(0 + 0) = K(0) + K(0),$$

tehát $K(0) = 0$.

Ha m tetszőleges pozitív egész szám, akkor

$$K(m) = K(1 + \dots + 1) = K(1) + \dots + K(1) = m K(1),$$

vagyis $K(m) = cm$ érvényes.

Minden λ valós számra

$$0 = K(0) = K(\lambda + (-\lambda)) = K(\lambda) + K(-\lambda),$$

tehát $K(-\lambda) = -K(\lambda)$ teljesül.

Legyen $m > 0$ tetszőleges egész szám, ekkor

$$K(1) = K\left(\frac{m}{m}\right) = K\left(\frac{1}{m} + \dots + \frac{1}{m}\right) = m K\left(\frac{1}{m}\right),$$

és a $K(-\lambda) = -K(\lambda)$ azonosság miatt minden $m \neq 0$ egész számra

$K\left(\frac{1}{m}\right) = c \frac{1}{m}$ érvényes.

Végül ha $\lambda = \frac{m}{n}$ tetszőleges racionális szám, ahol $m > 0$, akkor

$$K\left(\frac{m}{n}\right) = K\left(\frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}\right) = m K\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{m}{n} K(1),$$

amivel a $K(\lambda) = c\lambda$ azonosságot minden $\lambda = \frac{m}{n}$ racionális értékre bebi-

monotonitással. A következőkben az irracionális esetre térünk át.

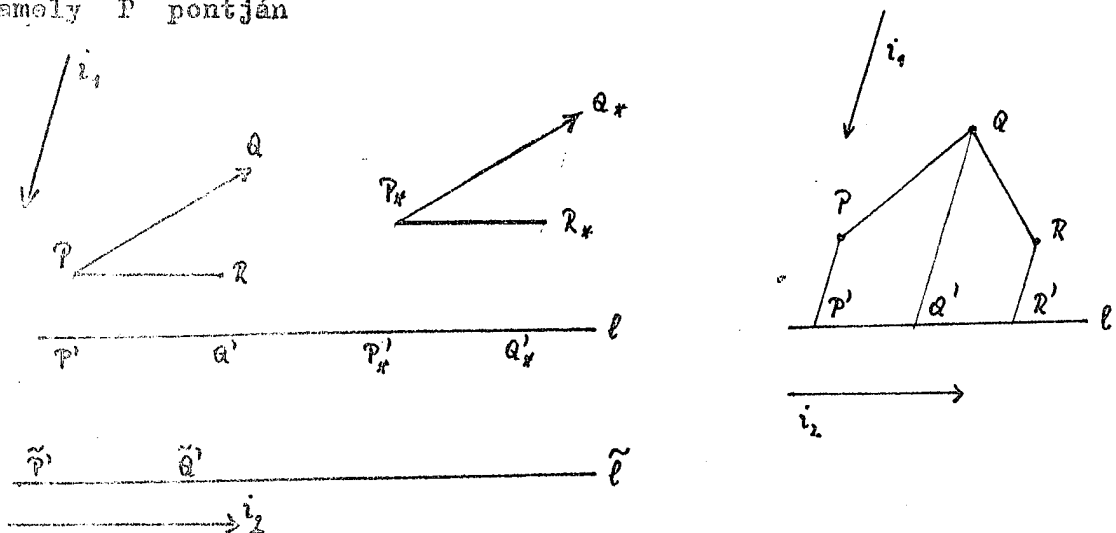
Ha $c = K(1) = 0$, akkor $K(\lambda) = 0$ mindenütt. Ezért tegyük fel, hogy $c \neq 0$.

Indirekt feltevésenként tegyük fel, hogy létezik olyan λ irracionális szám, amelyre $K(\lambda) \neq c\lambda$ teljesül, pl. $K(\lambda) < c\lambda$ érvényes. (A $K(\lambda) > c\lambda$ esetben hasonlóan kell eljárunk.) Ekkor a λ körül $(\lambda - \frac{K(\lambda)}{c})$ - sugarú környezetet tekintve, ebben a környezetben a λ előtt minden r racionális számra

$$r > \lambda - (\lambda - \frac{K(\lambda)}{c}) = \frac{K(\lambda)}{c},$$

vagyis $K(\lambda) < c r = K(r)$ teljesülne. Ez pedig ellentmond a monoton növekedés feltételének, amivel a lemma bizonyítását befejeztük. $\square$

A párhuzamos szelők tételét először síkban vizsgáljuk. A tétel előkészítéséhez tekintsünk két különböző i_1 és i_2 irányt (egyenesek párhuzamosság-osztályát) és legyen l az i_2 irányába mutató egyenes. A sík valamely P pontján



keresztül az i_1 irányu egyenest meghuzva ez a P' pontban metszi az l egyenest. Ezt a pontot P pontnak az l egyenesen vett i_1 irányu vetületének nevezzük.

Tekintsünk most egy $\underline{x}$ vektort és tekintsük ennek valamely (PQ) reprezentánsát. Jelölje P' és Q' a vektor két végpontjának az l egye-

nesen vett i_1 irányu vetületét, és tekintsük a $\underline{P'Q'}$ vektort. Megmutatjuk, hogy ez az u.n. vetületvektor sem az i_2 irányu l egyenes választásától, sem az $\underline{x}$ vektor reprezentánsa választásától nem függ.

Valóban ha $\tilde{l}$ másik i_2 irányu egyenes, és ezen a P és Q pontok i_1 irányu vetületét $\tilde{P'}$ és $\tilde{Q'}$ jelöli, akkor a $\tilde{P'}\tilde{Q'}Q'P'$ pontok paralelogrammát alkotván a $\underline{\tilde{P'}\tilde{Q'}} = \underline{P'Q'}$ egyenlőséget kapjuk.

Azonnal látható, hogy ez a vetületi vektor független az $\underline{x}$ vektor reprezentánsa választásától is. Legyen ugyanis $(P_\#Q_\#)$ az $\underline{x}$ másik reprezentánsa a $P'_\#$ és $Q'_\#$ vetületekkel. Jelölje továbbá R és $R_\#$ azokat a pontokat, amelyeket a P ill. $P_\#$ pontokra illeszkedő és az l egyenessel párhuzamos egyenesek a QQ' ill. $Q_\#Q'_\#$ egyenesekből metszenek ki (ld. a fenti első ábrát). Ekkor az a párhuzamos eltolás, amelyik a $\overline{PQ}$ szakaszt a $\overline{P_\#Q_\#}$ szakaszba viszi a $\overline{PR}$ szakaszt a $\overline{P_\#R_\#}$ szakaszba transzformálja, mert a PR egyenes a $P_\#Q_\#$ egyenesbe a QQ' pedig a $Q_\#Q'_\#$ egyenesbe kerül. Így felhasználva, hogy a $P'Q'RP$ és a $P'_\#Q'_\#R_\#P_\#$ négyszögek paralelogrammák, a következőket írhatjuk.

$$\underline{P'Q'} = \underline{PR} = \underline{P_\#R_\#} = \underline{P'_\#Q'_\#}.$$

Ezt pedig éppen e vetületvektor egyértelműségét igazolja.

Ezt az egyértelműen meghatározott vetületvektor függvény alakban a $\mu_{i_1 i_2}(\underline{x})$ formában írjuk, ami tehát az $\underline{x}$ vektornak az i_1 irányból az i_2 irányra vett vetületvektorát jelöli.

A következő tételt a párhuzamos szelők tételének nevezzük.

4.2.2. A $\mu_{i_1 i_2}(\underline{x})$ függvény additív és homogén, vagyis a

1. $\mu_{i_1 i_2}(\underline{x} + \underline{y}) = \mu_{i_1 i_2}(\underline{x}) + \mu_{i_1 i_2}(\underline{y})$
2. $\mu_{i_1 i_2}(\lambda \underline{x}) = \lambda \mu_{i_1 i_2}(\underline{x}), \lambda \in \mathbb{R}.$

kapjuk, hogy a Q pont Q' vetülete az $\overline{R_1' R_2'}$ szakaszra esik. Ezért valóban $K(\lambda_1) \leq K(\lambda_2)$ érvényes. Hasonlóan bizonyítunk, ha a Q az $\overline{R_1 R_2}$ szakaszon kívül esik, és ezzel a monoton növekedést beláttuk.

A $K(1) = 1$ egyenlőség a $\mu_{i_1 i_2}(\underline{x}) = \mu_{i_1 i_2}(1 \underline{x}) = K(1) \mu_{i_1 i_2}(\underline{x})$ azonosságból adódik.

Végül megmutatjuk, hogy a $K(\lambda)$ függvény additív is. A $\mu_{i_1 i_2}(\underline{x})$ additív tulajdonsága miatt az alábbiakat írhatjuk.

$$\begin{aligned} K(\lambda_1 + \lambda_2) \mu_{i_1 i_2}(\underline{x}) &= \mu_{i_1 i_2}((\lambda_1 + \lambda_2) \underline{x}) = \mu_{i_1 i_2}(\lambda_1 \underline{x} + \lambda_2 \underline{x}) = \\ &= \mu_{i_1 i_2}(\lambda_1 \underline{x}) + \mu_{i_1 i_2}(\lambda_2 \underline{x}) = K(\lambda_1) \mu_{i_1 i_2}(\underline{x}) + K(\lambda_2) \mu_{i_1 i_2}(\underline{x}) = \\ &= (K(\lambda_1) + K(\lambda_2)) \mu_{i_1 i_2}(\underline{x}). \end{aligned}$$

Ebből együtttható összehasonlítással a $K(\lambda_1 + \lambda_2) = K(\lambda_1) + K(\lambda_2)$ additív tulajdonságot kapjuk.

A függvényegyenlet-lemmából a $K(\lambda)$ függvényre $K(\lambda) = \lambda$ azonosság adódik, ami állításunkat igazolja. $\square$

A párhuzamos szelők tétele a térben hasonlóan tárgyalható, mint a síkban. Ebben az esetben a pontok vetítéséhez nem egyeneseket, hanem síkokat alkalmazunk. Ha most i_1 a síkoknak az i_2 pedig az egyeneseknek különböző irányu párhuzamossági osztályát jelöli (vagyis az i_1 osztály síkjai nem párhuzamosak az i_2 osztály egyeseivel) akkor a $\mu_{i_1 i_2}(\underline{x})$ vetítést ugyan úgy definiáljuk mint a síkban láttuk. Ekkor a párhuzamos szelők tétele ennek a $\mu_{i_1 i_2}(\underline{x})$ függvénynek az additív és homogén tulajdonságát állítja. Mivel ennek bizonyítása teljesen megegyezik a síkbeli eset bizonyításával, ezért a részletek átgondolását az olvasóra bizzuk.

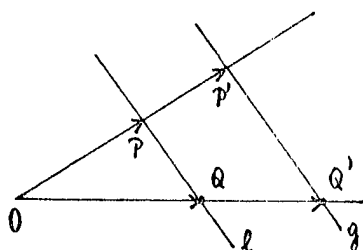
A párhuzamos szelők tétele a következő formában is interpretálható.

Legyen az l és az l' két egyenes, az $A, B, C \in l$ olyan pontok, hogy $B \in \overline{AC}$ teljesüljön, valamint i az l és l' irányától (a térben az i sík-

-irány!) különböző irány. Ha A', B', C' az A, B, C pontok l' egyenesen vett i irányu vetületei, akkor a B' pont az $\overline{A'C'}$ szakaszt ugyanolyan arányban osztja, mint amilyen arányban a B az AC szakaszt osztja.

3. § Hasonlóságok

Először az u.n. centrális hasonlóságokat definiáljuk.



Tekintsünk a síkban vagy a térben egy O pontot, és vegyünk fel egy $\lambda \neq 0$ számot. Minden P ponthoz rendeljük hozzá azt a P' pontot, amelyre

$$\underline{OP'} = \lambda \underline{OP}$$

teljesül. A párhuzamos szelők tételéből közvetlenül adódik, hogy a leképezésnél minden l egyenes olyan l' egyenesbe transzformálódik, amelyekre $l \parallel l'$ teljesül.

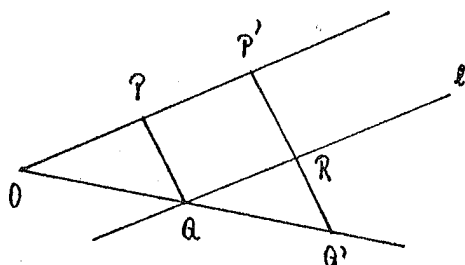
A most definiált leképezést O_λ jellel jelöljük, és O centruma, λ paraméterü centrális hasonlóságnak nevezzük.

4.3.1. Az O_λ leképezésnél minden $\overline{PQ}$ szakasz képe olyan $\overline{P'Q'}$ szakasz, amelyekre

$$(4.3.1) \quad \frac{|P'Q'|}{|PQ|} = |\lambda|$$

teljesül.

Bizonyítás. Ha a PQ egyenes az O pontra illeszkedik, akkor a (4.3.1) azonosság triviálisan érvényes. Tegyük fel ezért, hogy a PQ egyenes nem illeszkedik az O pontra. Legyen l a Q pontra illeszkedő, az OP



egyenessel párhuzamos egyenes, amelyik a $P'Q'$ egyenest az R pontban metszi. Ekkor a párhuzamos szelők tételének kétszeres alkalmazásával a következőket írhatjuk.

$$\frac{|P'Q'|}{|PQ|} = \frac{|P'Q'|}{|P'R|} = \frac{|OQ'|}{|OQ|} = |\lambda| ,$$

ami az állítást igazolja. □

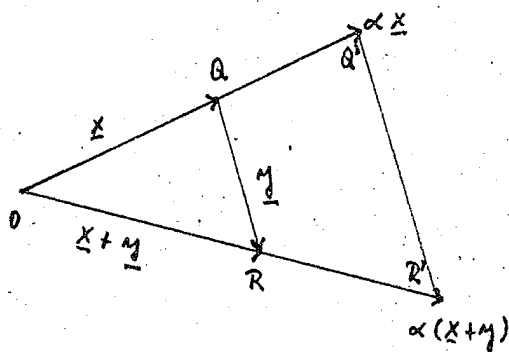
A fenti tételből könnyen igazolható a (4.1.3) tételben szereplő utolsó disztributív tulajdonság.

4.3.2. Minden $\underline{x}, \underline{y}$ vektorra és α valós számra az

$$\alpha(\underline{x} + \underline{y}) = \alpha \underline{x} + \alpha \underline{y}$$

disztributív tulajdonság érvényes.

Bizonyítás. Az $\underline{x}$ ill. $\underline{y}$ vektort az $\underline{x} = \underline{PQ}$ ill. $\underline{y} = \underline{QR}$ alakban reprezentálva $\underline{x} + \underline{y} = \underline{PR}$ adódik. Ha az $\underline{x}, \underline{y}$ vektorok valamelyike a zérus



vektor, vagy $\alpha = 0$, akkor a disztributív tulajdonság triviálisan teljesül. Tegyük fel ezért, hogy $\underline{x}, \underline{y} \neq 0$ és $\alpha \neq 0$. Tekintsük az O_α centrális hasonlóságot. Ez a Q pontot a

Q' pontba az R pontot pedig az R' pontba transzformálja. Az előző tételből nyilvánvalóan adódnak az

$$\underline{OR'} = \alpha(\underline{x} + \underline{y}) \quad ; \quad \underline{OQ'} = \alpha \underline{x} \quad , \quad \underline{Q'R'} = \alpha \underline{y}$$

azonosságok, amiből $\alpha \underline{x} + \alpha \underline{y} = \alpha(\underline{x} + \underline{y})$ következik. □

A sík vagy tér olyan $\psi: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$ ponttranszformációját, amelyre a

$$\frac{|\psi(P)\psi(Q)|}{|PQ|} = \lambda$$

hányados a $P \neq Q$ pontpárok választásától független konstans érték,

hasonlóságnak nevezzük. A λ értéket hasonlósági paraméternek hívjuk, és a hasonlóságot a ψ_λ jellel is jelöljük.

Minden centrális hasonlóság és minden izometria hasonlóság.

Tetszőleges φ_λ hasonlóságot tekintve az

$$O_\lambda \varphi_\lambda = \alpha$$

leképezés izometria, amiből $\varphi = O_\lambda \alpha$ adódik. Ezzel beláttuk a következő állítást.

4.3.3. Minden hasonlóság egy izometriának és egy centrális hasonlóságnak a szorzataként állitható elő.

Ebből az állításból triviálisan adódik a következő tétel.

4.3.4. Minden hasonlóság egyenes-és szögtartó bijekció.

Az is könnyen belátható, hogy a hasonlóságok transzformáció csoportot alkotnak, hiszen két hasonlóság szorzata is és egy hasonlóság inverze is hasonlóság.

A H_1 és a H_2 ponthalmazokat hasonlóknak nevezzük, ha létezik olyan φ_λ hasonlóság, amelyre $\varphi_\lambda(H_1) = H_2$ teljesül.

Mivel a hasonlóságok transzformáció csoportot alkotnak, ezért a hasonlóság, mint reláció, ekvivalencia reláció.

4.3.5. Két háromszög hasonló, ha

1. megfelelő oldalaik aránya egyenlő,
2. két-két oldaluk aránya s az ezek által közrefogott szögük egyenlő,
3. két-két oldaluk aránya és e két oldal közül a nagyobbikkal szemközt eső szögük egyenlő,
4. két-két szögük egyenlő.

Bizonyítás. Jelölje λ az első három esetben a megfelelő oldalak arányát, ill. a negyedik esetben annak a két oldalnak az arányát, amelyiken a két egyenlő szög fekszik. Ekkor tetszőleges C centrumra a C_λ centrális

hasonlóság a (2.5.1) és (3.4.5) tételek alapján az első háromszögeket a másodikkal egybevágó háromszögekbe transzformálja. Ezzel a hasonlóságokat bebizonyítottuk. $\square$

A hasonlóságok között irányítást tartó és irányítást fordító hasonlóságokat különböztethetünk meg. A síkban (a térben) irányítást tartó hasonlóságoknak definíció szerint azokat a hasonlóságokat nevezzük, amelyekhez a sík (a tér) bármely irányítását kiválasztva, minden rendezett egyenes (minden irányított sík) jobbpartja a transzformáció során a képegyenes (a képsík) jobbpartjába transzformálódik. A síkban minden $\lambda \neq 0$ értékre az O_λ centrális hasonlóságok irányítás tartók. Ellenben a térben csak a $\lambda > 0$ pozitív paraméterrel rendelkező centrális hasonlóságok tartják meg az irányítást, míg a $\lambda < 0$ paraméterűek megfordítják. Ebből nyilvánvalóan adódik, hogy a sík irányítást tartó transzformációi centrális hasonlóságoknak mozgásokkal vett szorzataként állnak elő, míg az irányítást fordító hasonlóságokat a centrális hasonlóságoknak irányítást fordító izometriákkal vett szorzataként adódnak. A térben pedig az irányítás tartó hasonlóságok $O_\lambda \varphi$ alakban kapjuk, ahol $\lambda > 0$, a φ pedig mozgás vagy $\lambda < 0$ a φ pedig irányítást fordító izometria. Az irányítást fordító hasonlóságok pedig $O_\lambda \varphi$ alakúak, ahol $\lambda > 0$ és a φ irányítást fordító izometria vagy pedig $\lambda < 0$ a φ pedig térmozgás.

A következőkben a hasonlóságok jelölésére használt φ_λ jelben a λ paramétert mindig előjelenszen értjük, mégpedig $\lambda > 0$, ha a φ_λ irányítást tartó és $\lambda < 0$ ha a φ_λ irányítást fordító.

Az alábbi tétel a síkban és a térben egyaránt érvényes.

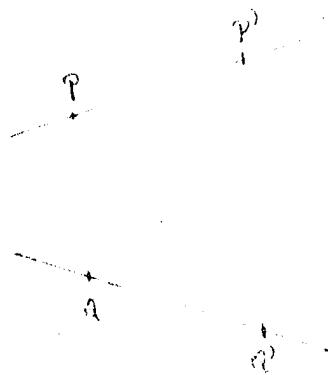
4.3.6. Minden nem izometrikus hasonlóságnak egy és csak egy fixpontja létezik.

Bizonyítás. A tételt először a síkban igazoljuk.

Mivel a hasonlóság a pontok távolságát megváltoztatja, ezért legfeljebb egy fixpont létezhet. Ezért már csak a fixpont létezését kell kimutatnunk.

Először olyan φ_λ hasonlóságot vizsgálunk, amelynél minden q egyenes $\varphi(q)$ képe párhuzamos a q egyenessel.

Legyen P és Q két különböző pont, amelyek képeit a P' és a Q' jelöli. Feltehető, hogy $P \neq P'$ és $Q \neq Q'$, hiszen ellenkező esetben létezik fixpont. Az is feltehető, hogy a PP' és a QQ' egyenesek is különbözőek. Ugyanis, ha minden P, Q pontokra a PP' egyenes a QQ' egyenessel egyezne meg, akkor a sík minden pontja a QQ' egyenesre képződne le, ami lehetetlen. Először megmutatjuk, hogy a PP' és QQ' egyenesek met-

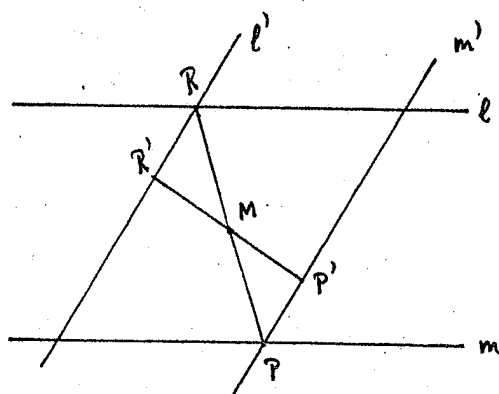


szik egymást. Valóban, a $\overline{PQ}$ szakasz párhuzamos a $\overline{P'Q'}$ szakasszal, ezért ha a PP' és QQ' egyenesek párhuzamosak volnának, akkor a $PQQ'P'$ négyszög paralelogramma volna, és $|PQ| = |P'Q'|$ teljesülne. Ez pedig lehetetlen, mivel a φ_λ

nem izometria. Tehát a PP' és a QQ' egyenesek metszik egymást valamely M pontban. Vegyük még észre, hogy a PP' egyenes invariáns a φ_λ leképezésnél, mivel ennek képe áthalad a P' ponton és párhuzamos a PP' egyenessel. Hasonlóan adódik, hogy a QQ' egyenes is invariáns. De ebből következik, hogy az M metszéspont képe csak önmaga lehet mivel az M' képpont a PP' és a QQ' egyeneseken is rajta marad. Így a tekintett esetben a bizonyítást befejeztük.

Most azt az esetet tekintjük, amikor a φ_λ hasonlósághoz létezik olyan m egyenes, amely vele nem párhuzamos m' egyenesbe transzformáló-

dik és ezért az m és m' metszik egymást a P pontban. Legyen $P' \in m'$



a P képe. Tekintsünk most az m egyenessel párhuzamos l egyenest. Mivel a hasonlóságnál párhuzamos egyenesek párhuzamos egyenesekbe transzformálódnak (különben a leképezés nem lenne kölcsönösen egyértelmű), ezért $m' \parallel l'$, és az l' metszi

az l egyenest az R pontban. Legyen R' az R képe. Ekkor a PR és $P'R'$ egyenesek nem lehetnek párhuzamosak. Ugyanis ha ezek párhuzamosak lennének, akkor a $P'PRR'$ pontok olyan paralelogrammát határoznának meg, amelyben a szemköztes $\overline{PR}$ és $\overline{P'R'}$ oldalak hosszai megegyeznének. Ez pedig lehetetlen, mert a φ_λ nem izometria.

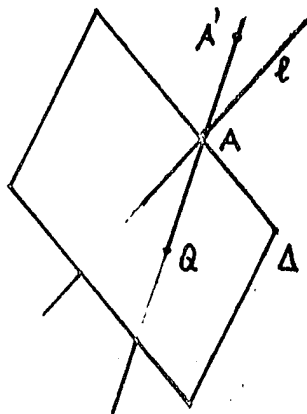
Tehát a PR és a $P'R'$ egyenesek az M pontban metszik egymást. Megmutatjuk, hogy az M pont fixpont.

A párhuzamos szelők tétele miatt az M pont a $\overline{PR}$ szakaszt ugyanolyan arányban osztja, mint a $\overline{P'R'}$ szakaszt, hiszen $l' \parallel m'$. Mivel a hasonlóságok a szakaszhosszak arányát nem változtatják meg, ezért az M pont M' képe is ugyanolyan arányban osztja a $\overline{PR}$ szakaszt, mint amilyen arányban az M a $\overline{PR}$ szakaszt osztja. Tehát az M' csak az M pont lehet, és a tételt a sík esetére bebizonyítottuk.

A térbeli esetet az előbbi síkbeli esetre vezetjük vissza.

Tekintsünk egy A pontot. Ha $A' = A$, akkor létezik fixpont, ezért az $A' \neq A$ esetet vizsgáljuk tovább. Az AA' egyenes Q pontját a λ hasonlósági paraméter függvényében a következő módon jelöljük ki. Ha $\lambda > 0$, akkor a Q az $\overline{AA'}$ szakaszra illeszkedik, ha pedig $\lambda < 0$, akkor az $\overline{AA'}$

szakaszon kívül essék, mégpedig úgy, hogy $|QA'|/|QA| = |\lambda|$ teljesüljön. Mint könnyen látható, a $Q_{1/2}$ centrális hasonlóság az A' pontot az A pontba transzformálja. Az is látható, hogy a $Q_{1/2}$ aszerint irányítás tartó ill. irányítás fordító, hogy a φ_2 irányítás tartó ill. irányítás fordító. Ezért az



$$\alpha = Q_{1/2} \varphi_2$$

szorzat mozgás. Az A pont ennek a mozgásnak fixpontja, ezért a mozgás olyan l tengely körüli forgás, amelynek l tengelye az A pontra illeszkedik. Legyen Δ a Q pontra

illeszkedő és az l egyenesre merőleges sík. A Δ síkot mind az α izometria mind a $Q_{1/2}$ invariánsan hagyja, ezért a φ_2 hasonlóságra nézve is invariáns. A fent bizonyított síkbeli eset miatt a φ_2 leképezésnek a Δ síkban fixpontja létezik, ami a tételt igazolja. $\square$

4. § Vektorok skalár - vagy belsőszorzata

Belsőszorzattal két $\underline{x}, \underline{y}$ vektorhoz egy $(\underline{x}, \underline{y})$ jellel jelölt valós számot rendelünk, mégpedig a következő módon.

Ha a két vektor valamelyike zérus, akkor $(\underline{x}, \underline{y}) := 0$. Ha pedig mindkét vektor különbözik a zérustól, akkor definíció szerint

$$(4.4.1) \quad (\underline{x}, \underline{y}) := |\underline{x}| |\underline{y}| \cos \angle (\underline{x}, \underline{y})$$

A definícióból világos, hogy minden vektornak önmagával vett belsőszorzata nem más, mint a vektor hosszának négyzete. Az is látható, hogy két nullától különböző vektor belsőszorzata pontosan akkor 0, ha merőlegesek egymásra.

További tulajdonságok egyszerű bizonyítása érdekében először egy formulát vezetünk be.

Legyen $\underline{y} \neq \underline{0}$ tetszőleges vektor, és i olyan irány, amelyik nem egyezik meg az $\underline{y}$ vektor irányával. Jelölje i_* az $\underline{y}$ irányát, valamint $\underline{e}_y := (1/|\underline{y}|)\underline{y}$ az $\underline{y}$ irányába mutató egységvektort. A 2. pragrafusban definiált $\mu_{ii_*}(\underline{x})$ vektorértékű függvényt az

$$(4.4.2) \quad \mu_{ii_*}(\underline{x}) := \gamma_{iy}(\underline{x}) \underline{e}_y$$

alakban írhatjuk, ahol az $\gamma_{iy}(\underline{x})$ valós értékű függvény, az $\mu_{ii_*}(\underline{x})$ függvény hasonló tulajdonságai miatt, nyilvánvalóan homogén és additív.

Ha az i irány az $\underline{y}$ vektor irányára merőleges, akkor az $\gamma_{iy}(\underline{x})$ mennyiséget az $\underline{x}$ vektornak az $\underline{y}$ tengelyen vett algebrai mértékének nevezzük, és $\gamma_{\perp y}(\underline{x})$ jellel jelöljük.

Jelölje $\underline{e}_x$ az $\underline{x}(\neq \underline{0})$ irányu egységvektort. Ekkor a cosinus függvény definíciójából az

$$(4.4.3) \quad \gamma_{\perp y}(\underline{x}) = \gamma_{\perp y}(|\underline{x}|\underline{e}_x) = |\underline{x}| \gamma_{\perp y}(\underline{e}_x) = |\underline{x}| \cos \angle(\underline{x}, \underline{y})$$

összefüggés adódik, amiből az $\underline{x} \neq \underline{0}$, $\underline{y} \neq \underline{0}$ esetre az

$$(4.4.4) \quad (\underline{x}, \underline{y}) = |\underline{y}| \gamma_{\perp y}(\underline{x}) = |\underline{x}| \gamma_{\perp x}(\underline{y}) .$$

formulák adódnak.

4.4.1. A belsőszorzat szimmetrikus és mindkét komponensében homogén és additív, vagyis az

$$(\underline{x}, \underline{y}) = (\underline{y}, \underline{x})$$

$$(4.4.4) \quad \lambda (\underline{x}, \underline{y}) = (\lambda \underline{x}, \underline{y}) = (\underline{x}, \lambda \underline{y}) \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad ,$$

$$(\underline{x} + \underline{y}, \underline{z}) = (\underline{x}, \underline{z}) + (\underline{y}, \underline{z}) \quad , \quad (\underline{x}, \underline{y} + \underline{z}) = (\underline{x}, \underline{y}) + (\underline{x}, \underline{z})$$

tulajdonságok érvényesek.

Bizonyítás. A szimmetria közvetlenül a definícióból adódik a

$$\cos \angle(\underline{x}, \underline{y}) = \cos \angle(\underline{y}, \underline{x}) \quad \text{szimmetria miatt} .$$

A szimmetria miatt a homogenitást és additivitást elegendő csak az első komponensre igazolnunk.

A (4.4.4) formula alapján a következőket írhatjuk.

$$(\lambda \underline{x}, \underline{y}) = |\underline{y}| \gamma_{\perp \underline{y}}(\lambda \underline{x}) = \lambda |\underline{y}| \gamma_{\perp \underline{y}}(\underline{x}) = \lambda (\underline{x}, \underline{y}),$$

$$(\underline{x} + \underline{y}, \underline{z}) = |\underline{z}| \gamma_{\perp \underline{z}}(\underline{x} + \underline{y}) = |\underline{z}| \gamma_{\perp \underline{z}}(\underline{x}) + |\underline{z}| \gamma_{\perp \underline{z}}(\underline{y}) = (\underline{z}, \underline{x}) + (\underline{z}, \underline{y}),$$

□

amivel a tételt bebizonyítottuk.

A belsőszorzás egyik alkalmazásaként a háromszögek cosinus tételét bizonyítjuk be.

4.4.2. Ha az XYZ háromszög Z csúcsnál lévő szögét γ jelöli, akkor

$$|XY|^2 = |XZ|^2 + |ZY|^2 - 2|XZ||YZ| \cos \gamma.$$

Bizonyítás. Vezessük be az $\underline{x} = \underline{ZX}$, $\underline{y} = \underline{ZY}$, $\underline{z} = \underline{XY}$ jelöléseket. Ekkor $\underline{z} := \underline{XY} = \underline{y} - \underline{x}$, és ezért

$$\begin{aligned} |XY|^2 &= |\underline{z}|^2 = (\underline{z}, \underline{z}) = (\underline{y} - \underline{x}, \underline{y} - \underline{x}) = (\underline{y}, \underline{y}) + (\underline{x}, \underline{x}) - 2(\underline{x}, \underline{y}) = \\ &= |ZY|^2 + |ZX|^2 - 2|XZ||YZ| \cos \gamma, \end{aligned}$$

□

ami a tételt bizonyítja.

Ha a γ derékszög, akkor a cosinus tételből a

$$|ZX|^2 + |ZY|^2 = |XY|^2$$

Pythagoras tételt kapjuk.

A következő tételt az egyenesek és körök ill. a síkok és gömbök kölcsönös helyzetére vonatkozó tételnek nevezzük.

4.4.3. A síkban egy egyenesnek és egy gömbnek vagy nincs közös pontja vagy egy közös pontjuk van vagy pedig két pontban metszik egymást.
A térben egy gömbnek és egy síknak vagy nincs közös pontja vagy egy közös pontjuk van, vagy pedig egy körben metszik egymást.

Bizonyítás. Jelölje O a körnek (gömbnek) a középpontját és legyen O' az O pontnak az l egyenesre (Δ síkra) vett merőleges vetülete. Ha a sugarat r az $|OO'|$ távolságot pedig d jelöli, akkor a $d \geq r$ esetén legfeljebb az O' pont illeszkedik a körre (gömbre), mivel Pythagoras tétele szerint az egyenes (a sík) többi pontja d -nél nagyobb távolságra van az O ponttól. Ha pedig $d < r$, ismét Pythagoras tétele alapján az egyenes és kör (a sík és gömb) metszetét az l egyenesen (a Δ síkban) az O' ponttól $r^2 - d^2$ távolságra elhelyezkedő pontok adják. $\square$

Ha a síkban egy egyenesnek és egy körnek egyetlen közös pontja létezik, akkor az egyenest a kör érintőjének nevezzük. A fenti tételből könnyen belátható, hogy a kör minden pontjához egy és csak egy érintő létezik, amelyik merőleges az érintő ponthoz húzott sugárra.

Hasonlóan, ha egy gömbnek és egy síknak egyetlen közös pontja létezik, akkor a síkot a gömb érintő síkjának nevezzük. Itt is egyszerűen igazolható, hogy a gömb minden pontjához egyetlen érintő sík létezik, amelyik merőleges az érintési ponthoz húzott sugárra.

5. § Koordináták

A $\lambda_1 \underline{x}_1 + \lambda_2 \underline{x}_2 + \dots + \lambda_k \underline{x}_k$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$, alakú kifejezéseket lineáris kombinációnak nevezzük. A kombinációt nem-triviálisnak mondjuk, ha az együtthatók nem mindegyike zérus. Az $\underline{x}$ vektor az $\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_k$ vektoroktól lineárisan függ, ha az $\underline{x}$ az $\underline{x}_i$ vektorokból lineáris kombinációval állítható elő, és lineárisan független, ha ilyen lineáris kombináció nem létezik. Valamely $\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_k$ vektorrendszert lineárisan függőnek ill. lineárisan függetlennek nevezünk, ha valamely eleme a többitől lineáris függ, ill. bármely eleme a többitől lineárisan független.

A $\underline{O}$ vektor minden vektortól lineárisan függ. Az is könnyen belátható, hogy két $\underline{x}, \underline{y}$ vektor akkor és csak akkor lineárisan függő, ha tetszőleges $\underline{x} = \underline{PQ}$, $\underline{y} = \underline{PR}$ reprezentánokat választva a P, Q, R pontok közös egyenesre illeszkednek. Három $\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}$ vektor akkor és csak akkor lineárisan függő, ha az $\underline{x} = \underline{PQ}$, $\underline{y} = \underline{PR}$, $\underline{z} = \underline{RS}$ reprezentánokat választva P, Q, R, S pontok közös síkra illeszkednek.

Az $\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_k$ vektorrendszert bázisnak nevezzük, ha a rendszer lineárisan független, és minden vektor a rendszer elemeinek lineáris kombinációjaként állítható elő.

4.5.1. A sík vektorai között pontosan kettő, a tér vektorai között pedig pontosan három lineárisan független vektor alkot bázist.

Bizonyítás. Ha az $\underline{x} = \underline{OP}$ és az $\underline{y} = \underline{OQ}$ a síkban két lineárisan független vektor, akkor tetszőleges $\underline{z} = \underline{OR}$ vektorra jelölje R' ill. Q' az R pontnak az OP ill. az OQ egyenesen vett $\underline{x}$ ill. $\underline{y}$ irányú vetületeit. Látható, hogy $\underline{OR}' = \lambda \underline{x}$, $\underline{OQ}' = \mu \underline{y}$ és $\underline{z} = \lambda \underline{x} + \mu \underline{y}$ teljesül, tehát a síkban három vagy több vektor lineárisan függő, vagyis a síkban a báziselemek száma pontosan kettő.

Hasonlóan igazolható, hogy a térben a báziselemek száma három. $\square$

Ha az $\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_k$ vektorok bázist alkotnak, akkor minden $\underline{x}$ vektor

$$(4.5.1) \quad \underline{x} = \sum_{i=1}^k x^i \underline{x}_i$$

alakban írható, ahol az $(x^1, \dots, x^k)$ együtthatókat a vektor adott bázisra vonatkozó koordinátáinak nevezzük. Megjegyezzük, hogy a jelölésben használt k szám vagy 2 vagy pedig 3, attól függően, hogy a sík vagy pedig a tér vektorait tekintjük.

4.5.2. A (4.5.1) kifejtésben az $(x^1, \dots, x^k)$ koordináták egyértelműen meghatározottak.

Bizonyítás. Ha valamely $\underline{x}$ vektorra két különböző

$$\underline{x} = \sum_{i=1}^k x^i \underline{x}_i = \sum_{k=1}^k y^i \underline{x}_i$$

kifejtés létezne, akkor a

$$\sum_{i=1}^k (x^i - y^i) \underline{x}_i = \underline{0}$$

lineáris kombinációnak létezne zérustól különböző együtthatója. Tegyük fel, hogy $x^1 - y^1 \neq 0$. Ekkor

$$\underline{x}_1 = \sum_{i=2}^k \frac{x^i - y^i}{x^1 - y^1} \underline{x}_i,$$

vagyis az $\underline{x}_1$ a többi báziselemtől lineárisan függő lenne, ami lehetetlen, és ezzel az indirekt bizonyítást befejeztük. $\square$

Az $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_k$ bázist ortonormálnak nevezzük, ha az $\underline{e}_i$ vektorok páronként merőleges egységvektorok, vagyis

$$(4.5.2) \quad (\underline{e}_i, \underline{e}_j) = \delta_{ij}$$

teljesül, ahol δ_{ij} a Kronecker féle δ -függvény ($\delta_{ij} = 1$, ha $i = j$, és $\delta_{ij} = 0$, ha $i \neq j$).

Tekintsük az $\underline{x}$ vektor

$$\underline{x} = \sum_{i=1}^k x^i \underline{e}_i$$

kifejtését valamely $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_k$ ortonormált bázisban. Nyilvánvalóan érvényes az

$$(4.5.3) \quad x^i = (\underline{x}, \underline{e}_i)$$

egyenlet. Két $\underline{x}, \underline{y}$ vektor belsőszorzatát pedig a koordináták segítségével

az

$$(4.5.4) \quad (\underline{x}, \underline{y}) = \left(\sum_{i=1}^k x^i \underline{e}_i, \sum_{j=1}^k y^j \underline{e}_j \right) = \sum_{i,j=1}^k x^i y^j \delta_{ij} = \sum_{i=1}^k x^i y^i$$

alakban írhatjuk.

Jelöljük ki egy O pontot és egy $\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_k$ bázist. Minden X pontra az $\underline{OX}$ vektor

$$(4.5.5) \quad \underline{OX} = \sum_{i=1}^k x^i \underline{x}_i$$

alakban írható. Minden X ponthoz az $(x^1, \dots, x^k)$ koordinátákat hozzárendelve az u.n. $(O, \underline{x}_1, \dots, \underline{x}_k)$ rendszerre vonatkozó ferdeszögű koordináta rendszerhez jutunk. Ha az $\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_k$ bázis ortonormált, akkor az $(x^1, \dots, x^k)$ koordináta rendszert Descartes féle koordináta rendszernek nevezzük.

A koordináta rendszerekben a különböző geometria alakzatok egyenletek segítségével írhatók fel. Példaként az egyenesek, síkok, körök és gömbök egyenleteit vezetjük le.

Először a síkban vizsgálódunk, és tekintsünk ebben egy (x^1, x^2) Descartes féle koordináta rendszert.

Ha P egy pont $\underline{v} \neq \underline{0}$ pedig egy vektor, akkor a P pontra illeszkedő, $\underline{v}$ -irányú egyenes pontjait mindazok az X pontok, amelyek $\underline{x} = \underline{OX}$ u.n. helyzetvektora

$$(4.5.6) \quad \underline{x} = \underline{p} + t \underline{v}, \quad -\infty < t < +\infty,$$

alakban állítható elő, ahol $\underline{p} = \underline{OP}$. A (4.5.6) formulát az egyenes paraméteres alakjának nevezik.

Legyen az $\underline{p} \neq \underline{0}$ a $\underline{v}$ vektorra merőleges vektor. A paraméteres alakból látható, hogy az egyenes pontjait mindazok az $\underline{x} = \underline{OX}$ helyzet-

vektoru pontok alkotják, amelyekre

$$(4.5.6) \quad (\underline{n}, \underline{x} - \underline{p}) = 0$$

teljesül. Ezt a formulát pedig az egyenes Hesse féle normálalakjának nevezzük, amiben az $\underline{n}$ az u.n. normálvektor.

Ha n^1, n^2 az $\underline{n}$ az $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$ bázisra vonatkozó koordinátáit jelöli, valamint x^1, x^2 ill. p^1, p^2 az X ill. P pont Descartes féle koordinátái, akkor a Hesse féle normálalak szerint, az egyenest mindazok az (x^1, x^2) koordinátájú pontok alkotják, amelyek az

$$(4.5.7) \quad n^1 x^1 + n^2 x^2 - (n^1 p^1 + n^2 p^2) = 0$$

egyenletet elégítik ki. Fordítva minden

$$n^1 x^1 + n^2 x^2 + p = 0, \quad (n^1, n^2) \neq (0, 0), \quad p \in \mathbb{R},$$

alaku egyenlet egyenest határoz meg. Mégpedig ez az egyenes az

$$\left(1, \frac{-(n^1 + p)}{n^2}\right) \text{ pontra illeszkedik, ha } n^2 \neq 0, \text{ ill. a } \frac{-(n^2 + p)}{n^1}, 1$$

pontra illeszkedik, ha $n^1 \neq 0$, és normálvektora az (n^1, n^2) koordinátájú vektor.

A síkban az r sugaru és a P középpontu kör pontjait azok az X pontok alkotják, amelyek $\underline{x} = \underline{OX}$ helyvektoraira az

$$(\underline{x} - \underline{p}, \underline{x} - \underline{p}) = r^2$$

egyenlet érvényes. Ebből triviálisan következik, hogy Descartes féle koordináta rendszerekben a kör egyenlete

$$(4.5.8) \quad (x^1 - p^1)^2 + (x^2 - p^2)^2 = r^2.$$

Hasonlóan kapjuk a gömb $(x^1 - p^1)^2 + (x^2 - p^2)^2 + (x^3 - p^3)^2 = r^2$ egyenletét.

A kör- és gömb-egyenletekből analitikus eszközzel is könnyen igazolható a következő tétel.

4.5.1. A síkban minden kör külső pontjából a körhöz pontosan két érintő szakasz húzható, és ezek hossza megegyezik.

A gömb valamely külső pontjából a gömbhöz húzott érintőszakaszok hosszai egymással megegyeznek.

A részletek átgondolását az olvasóra bizzuk.

Végezetül a síkok és egyenesek térbeli egyenleteit vezetjük le.

A térben szintén egy (x^1, x^2, x^3) Descartes féle koordináta rendszert tekintünk.

Ha a P pont, a $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ pedig lineárisan független vektorok, akkor mindazok az X pontok, amelyek $\underline{x} = \underline{OX}$ helyzetvektorai az

$$(4.5.10) \quad \underline{x} = \underline{p} + t \underline{v}_1 + s \underline{v}_2, \quad t, s \in \mathbb{R},$$

alakban állíthatók elő, a P pontra illeszkedő síkot határoznak meg.

A (4.5.10) formulát a síkok paraméteres alakjának nevezik.

Legyen $\underline{n} \neq \underline{0}$ a $\underline{v}_1$ és $\underline{v}_2$ vektorokra merőleges vektor. A paraméteres alakból látható, hogy a P pontra illeszkedő $\underline{n}$ normálvektoru sík pontjait az

$$(4.5.11) \quad (\underline{x} - \underline{p}, \underline{n}) = 0$$

egyenletet kielégítő $\underline{x} = \underline{OX}$ helyzetvektori pontok alkotják. Ez az egyenlet a síkok Hesse féle normálegyenlete. Itt is közvetlenül belátható, hogy a síkokat az

$$(4.5.12) \quad n^1 x^1 + n^2 x^2 + n^3 x^3 + p = 0$$

alakú egyenletek írják le, ahol $(n^1, n^2, n^3) \neq \underline{0}$

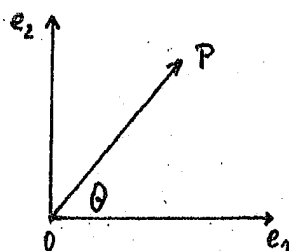
Az egyenesek a térben két metsző sík metszésvonalaként írhatók le.

Ezért a tér egyeneseseinek egyenletei

$$(4.5.13) \quad \begin{aligned} n_1^1 x^1 + n_1^2 x^2 + n_1^3 x^3 + p_1 &= 0 \\ n_2^1 x^1 + n_2^2 x^2 + n_2^3 x^3 + p_2 &= 0 \end{aligned}$$

alakúak, ahol az $\underline{n}_i = (n_i^1, n_i^2, n_i^3)$, $i = 1, 2$, sorvektorok lineárisan függetlenek.

A síkban jelöljük ki egy O pontot és vegyünk fel egy $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$



ortonormált bázist. A sík minden $P \neq O$

pontjához rendeljük hozzá az $r = |OP|$

számot és a $\theta = \angle(\underline{e}_1, \underline{OP})$ szöget. Az

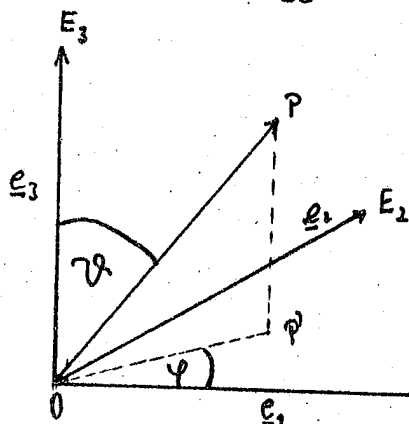
(r, θ) koordináta rendszert polárkoordináta

rendszernek nevezzük. Ezek a koordináták az

$(O, \underline{e}_1, \underline{e}_2)$ rendszerre vonatkozó (x^1, x^2) Descartes féle koordinátákkal az

$$x^1 = r \cos \theta, \quad x^2 = r \sin \theta$$

egyenletekkel függnek össze.



A térben hasonlóan járunk el. Jelöljük ki

szintén egy O pontot és egy

$$\underline{e}_1 = \underline{OE}_1, \quad \underline{e}_2 = \underline{OE}_2, \quad \underline{e}_3 = \underline{OE}_3$$

ortonormált bázis. Válasszunk $P \neq O$ pontra

jelölje P' a P pontnak az OE_1E_2 síkon

vett merőleges vetületét. A P ponthoz

rendeljük hozzá az $r = |OP|$ számot és a $\varphi := \angle(\underline{e}_1, \underline{OP}')$, $\vartheta := \angle(\underline{e}_3, \underline{OP})$

szögeket. Az (r, φ, ϑ) koordináta rendszert polárkoordináta rendszernek

nevezzük. Ezek az $(O, \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ rendszer Descartes féle koordináta rendszerével az

$$x^1 = r \sin \vartheta \cos \varphi$$

$$x^2 = r \sin \vartheta \sin \varphi$$

$$x^3 = r \cos \vartheta$$

egyenletekkel függnek össze.

6. § Kupszeletek

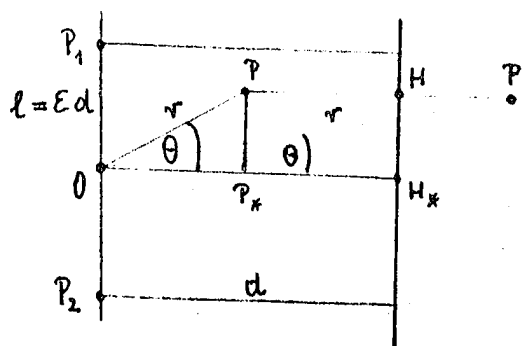
Jelöljünk ki a síkban egy O pontot, az O pontra nem illeszkedő e egyenest, és vegyünk fel egy $\Sigma > 0$ valós számot. Jelölje továbbá H valamely P pontnak az e egyenesen vett merőleges vetületét.

Mindazon P pontoknak a halmazát, amelyekre

$$(4.6.1) \quad |OP| = \Sigma |PH|$$

teljesül, kupszeletnek nevezzük.

Az e egyenest direktrixnek, az O pontot fókusznak, az Σ értéket pedig numerikus excentricitásnak hívjuk. A kupszeletet ellipszisnek nevezzük, ha $\Sigma < 1$, parabolának, ha $\Sigma = 1$ és hiperbolának, ha $\Sigma > 1$ teljesül.



Még néhány jelölést vezetünk be. Legyen H_x az O pontnak az e egyenesen vett merőleges vetülete, továbbá jelölje d az O, H_x pontok távolságát: $d = |OH_x|$. Nyilvánvaló, hogy az O pontra illeszkedő e egyenessel párhuzamos e' egyenes

a kupszeletet két P_1, P_2 pontban metszi, mégpedig ezek a pontok az O ponttól az $l = \Sigma d$ távolságra helyezkednek el. A kupszelet tetszőleges P pontjára jelölje r az $|OP|$ távolságot, θ az OH_x és OP félegyeneselek szögét, valamint P_x a P pontnak az OH_x egyenesen vett merőleges vetületét.

Vegyük észre, hogy az e direktrix O ponttal ellentétes nyílt félsíkjának minden P pontjára $|OP| / |PH| > 1$ teljesül. Ezért az ellipszis és a parabola minden pontja a direktrixnek az O pontot tartalmazó félsík-

jába esik, míg a hiperbolának mindkét félsíkba esik egy-egy ága.

Először a kupszelet olyan P pontjait vizsgáljuk, amelyek a direkt-
rixnek az O fókuszot tartalmazó félsíkjába esnek. Az ábra alapján az

$|OP| = \varepsilon |PH|$ egyenletet a

$$(4.6.2) \quad r = \varepsilon |PH| = \varepsilon |P_x H_x| = \varepsilon (d - r \cos \theta) = \ell - \varepsilon r \cos \theta$$

alakba írhatjuk, amiből az r változót kifejezve az

$$(4.6.3) \quad r = \frac{\ell}{\varepsilon \cos \theta + 1}$$

egyenlethez jutunk.

A hiperbola esetében pedig az O ponttal szemközt eső P
pontra az $OP = \varepsilon |PH|$ egyenlet az

$$(4.6.4) \quad r = \varepsilon |PH| = \varepsilon |P_x H_x| = \varepsilon (r \cos \theta - d) = \varepsilon r \cos \theta - \ell$$

alakot ölti, amiből

$$(4.6.5) \quad r = \frac{\ell}{\varepsilon \cos \theta - 1}$$

adódik.

A (4.6.3) és (4.6.5) egyenletek a kupszeletet egyértelműen leírják.
Ugyanis az $r(\theta)$ a θ függvényében azt írja le, hogy a fókuszról kiindí-
tott, az OH_x egyenessel θ szöget bezáró félegyenesen a kupszelet P
pontja a fókuszról mekkora távolságra helyezkedik el.

Ezeket az egyenleteket a kupszelet polár koordinátás egyenleteinek
nevezzük.

A polárkoordinátás egyenletben az $r(\theta)$ érték nem lehet negatív. Ezért
ezekből az egyenletekből látható, hogy az ellipszis esetében minden θ
értékre az $r(\theta)$ véges nem-negatív érték. Sőt az is látható, hogy az
ellipszis korlátos ponthalmaz. Ezzel szemben a parabola esetében az $r(\theta)$
a $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ szögekre nem értelmezett, és ha a θ ezekhez az értékekhez

tart, akkor az $r(\theta)$ végtelenbe konvergál. A hiperbolánál pedig a θ érték a (4.6.3) egyenletre vonatkozóan a $-\theta_1 < \theta < \theta_1$ intervallumban a (4.6.5) egyenletre vonatkozóan pedig a $\theta_1 - \pi < \theta < \pi - \theta_1$ intervallumban változhat, ahol $\theta_1 = \arccos(-1/\xi)$. A θ_1 és $-\theta_1$ szögekhez tartozó irányokat aszimptotikus irányoknak nevezzük. Ezekben az irányokban az $r(\theta)$ határértéke végtelen.

A definícióból látható, hogy a kupszeletek sosem lehetnek körök. Azonban a kör-fogalom a kupszelet-fogalomba formálisan beilleszthető, mégpedig a következő módon. A direktix a végtelen távoli egyenes, az ξ pedig a zérus érték legyen, valamint válasszunk egy $r > 0$ számot. Az O középpontu r sugaru kört a

$$(4.6.6) \quad |OP| = \xi \cdot |PH| = 0 \cdot \infty := r$$

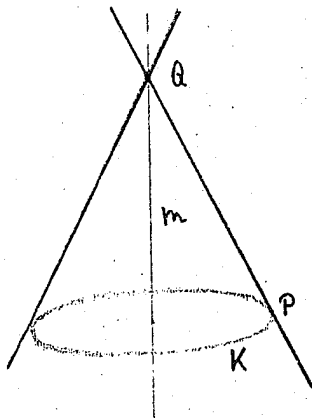
egyenlettel definiáljuk. A formális definíció mögött a következő geometria tartalom rejlik. Válasszunk olyan $\xi_n > 0$ és $d_n > 0$ sorozatokat, amelyekre

$$\xi_n \rightarrow 0, \quad d_n \rightarrow \infty \quad \text{és} \quad \xi_n d_n \rightarrow r$$

teljesülnek, és minden n természetes számra tekintsünk olyan kupszeletet, amelynek fókusza az O és az ξ_n, d_n megfelelő paraméterekkel rendelkezik. Ekkor $n \rightarrow \infty$ esetén ezeknek a kupszeleteknek a határhelyzete az O középpontu és r sugaru kör.

Nyilvánvaló, hogy a (4.6.3) egyenletekkel minden kört előállíthatunk, hiszen ha $\xi = 0$, akkor $r(\theta) = r = \text{konstans}$.

Mindezek alapján a köröket olyan kupszeletnek tekintjük, amelyek direktrixe a végtelen távoli egyenes, és numerikus excentricitásuk az $\xi = 0$ érték.



A térben vegyünk fel egy K kört és legyen m a K síkjára merőleges, a kör O középpontjára illeszkedő egyenes. Ezt az egyenest tengelynek nevezzük. Jelöljünk ki még egy $Q \in m$, $Q \neq O$ pontot is. A QP ($P \in K$) egyenesek pontjai által alkotott ponthalmazt egyenes-kupnak vagy egyszerűen kupnak nevezzük. A Q pontot csúcspontnak, a QP ($P \in K$) egyeneseket alkotóknak, a K kör síkját pedig alap-síknak nevezzük.

A kup pontjait úgy is megkaphatjuk, hogy valamely QP alkotóját a tengely körül körbeforgatjuk. Ebből látható, hogy az alkotók a tengellyel is és az alap-síkkal is azonos szöget zárnak be.

A kupszeletek az elnevezésüket amiatt a tény miatt kapták, amely szerint a kupszeletek a kupoknak síkokkal való metszeteként állíthatók elő. A továbbiakban ezt az állítást igazoljuk.

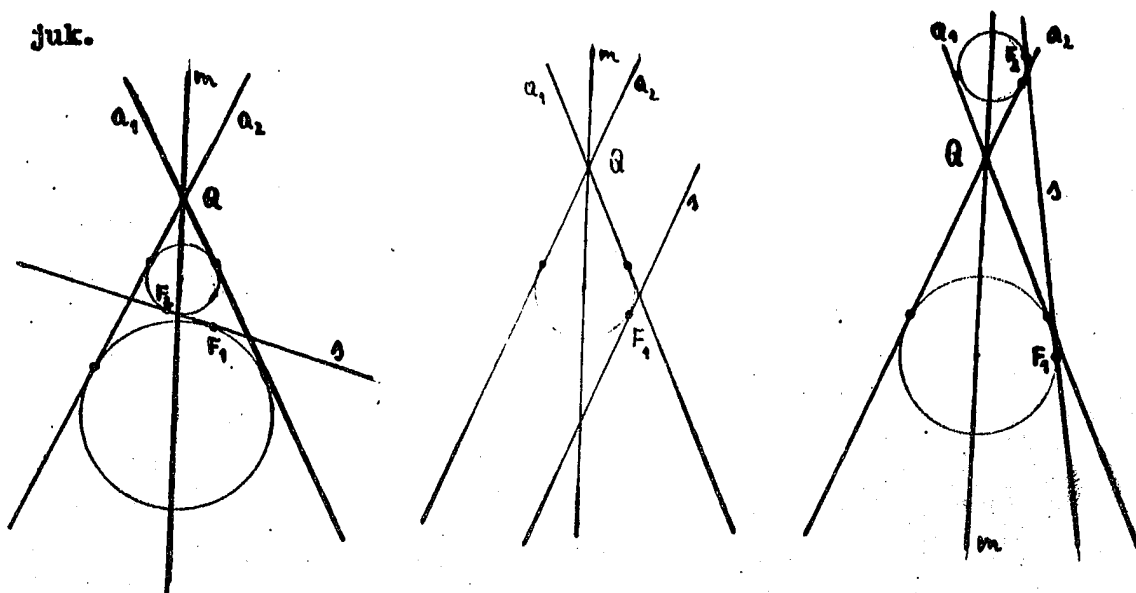
Tekintsünk egy kupot és egy olyan Σ síkot, amelyik nem illeszkedik a kup csúcsára. Ha Σ' a csúcspontra illeszkedő Σ síkkal párhuzamos síkot jelöli, akkor a Σ' a kupból vagy csak a csúcspontot, vagy egyetlen alkotót vagy pedig két egymást metsző alkotót metsz ki. Ennek megfelelően a Σ egyetlen alkotóval sem párhuzamos és csak az egyik félkupot metszi, vagy egyetlen alkotóval párhuzamos és ugyancsak az egyik félkupot metszi, vagy pedig két alkotóval párhuzamos és mindkét félkupba belemetsz.

A következő lépésben a kup belsőjében vegyük fel azokat a gömböket, amelyek a kupot is és a Σ síkot is érintik. Ezeket a gömböket Dandelin gömböknek nevezzük. A Dandelin gömbök létezése legegyszerűbben a következő gondolatmenettel mutatható meg.

Messük el a kupot az m tengelyre illeszkedő Δ síkkal. A Δ a kupból az a_1, a_2 alkotókat a Σ síkból pedig az s egyenest metszi ki.

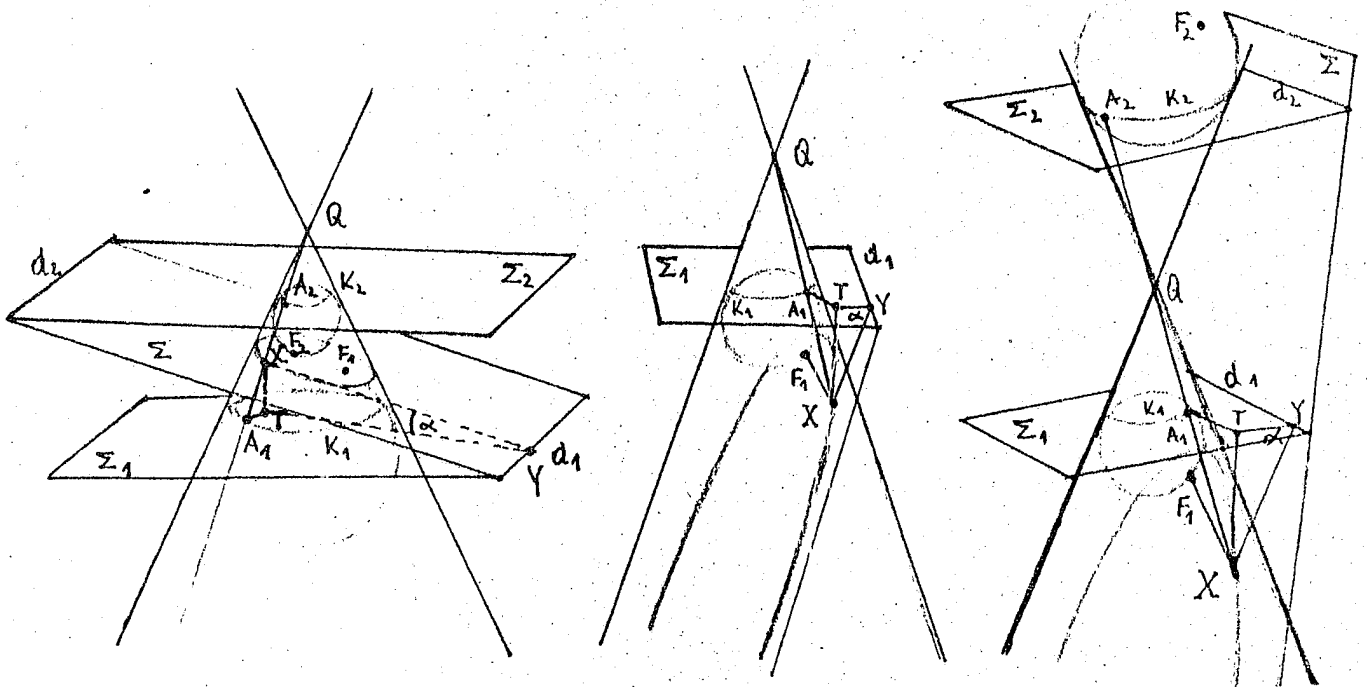
Vegyük fel azokat a köröket amelyek az s egyenest és az a_1, a_2 alkotókat belülről érintik. Ha az s mindkét alkotót metszi, akkor pontosan két ilyen kör, ha pedig az s az egyik alkotóval párhuzamos, akkor csak egy ilyen érintő kör létezik (ld. az a) ábrákat).

Ezeket a köröket az m tengely körül megforgatva a Dandelin gömböket kapjuk.



a) ábrák

Még néhány jelölést vezetünk be. Ha két Dandelin gömb létezik, akkor ezek a kupot a K_1, K_2 körökben érintik. Ezeknek a köröknek a síkját Σ_1 és Σ_2 jelöli. A Σ_1 síkok merőlegesek a tengelyre, és ha a Σ sík nem merőleges az m tengelyre, akkor a Σ_1 ill. a Σ_2 a Σ síkot a d_1 ill. a d_2 egyenesbe metszi. A Dandelin gömbök a Σ síkot az F_1 ill. az F_2 pontokban érintik. Később megmutatjuk, hogy a d_1, d_2 egyenesek a Σ által kimetszett kúpszeletek direktrixei, ill. az F_1, F_2 pontok a fókuszai, ezért a d_1, d_2 egyeneseket direktrixnek, az F_1, F_2 pontokat pedig fókuszoknak nevezzük.



b) ábrák

Ha egyetlen Dandelin gömb létezik, akkor ez a K_1 körben érinti a kupot, és ennek síkját Σ_1 jelöli. A d_1 direktrixet a $d_1 = \Sigma_1 \cap \Sigma$ metszetként definiáljuk, a fókuszunk pedig a Dandelin gömbnek a Σ síkkal alkotott F érintési pontját nevezzük.

Még egy további, a kimetszett alakzatra jellemző mennyiséget vezetünk le.

Legyen X a Σ és a kup metszetének egy pontja. Az X pontnak a Σ_1 síkon vett merőleges vetületét jelölje T , valamint a d_1 direktrixen vett merőleges vetületét jelölje Y . A QX alkotó a K_1 kört az A_1 pontban metszi. Mivel az $\overline{XF_1}$ és az $\overline{XA_1}$ szakaszok ugyanazon Dandelin gömbhöz húzott érintő szakaszok, ezért az $|XF_1| / |XY|$ hányadosra a következő érték adódik (ld. a b) ábrákat):

$$(4.6.7) \quad \frac{|XF_1|}{|XY|} = \frac{|XA_1|}{|XY|} = \frac{|XA_1| / |XT|}{|XY| / |XT|} = \frac{1/\sin \beta}{1/\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta},$$

ahol α a Σ és a Σ_1 síkok szögét, valamint β a QA_1 alkotónak a Σ_1 alap-síkokkal bezárt szögét jelöli. Mivel ezek a szögek konstansok, akár-

milyen X pontból is indulunk ki, ezért az

$$(4.6.8) \quad \frac{|XF_1|}{|XY|} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \xi$$

érték a metszet pontjaira nézve egyértelműen meghatározott. Ezt az értéket a Σ által kimetszett alakzat numerikus excentricitásának nevezzük.

4.6.1 Minden kupból a csucsra nem illeszkedő síkok kupszeletet metszenek ki. Mégpedig a metszet ellipszis, ha a Σ metsző sík a kup egyetlen alkotójával sem párhuzamos, parabola, ha a Σ egyetlen alkotóval párhuzamos, és hiperbola, ha két alkotóval párhuzamos.

Minden kupszelet kup - sík metszetként állítható elő.

Bizonyítás. A (4.6.8) formula alapján a metszet pontjai arra a kupszeletre esnek, amelynek fókusza az F_1 , direktrixe a d_1 , és numerikus excentricitása a (4.6.8) képletben definiált érték. Az is látható, hogy $\xi < 1$, ha a Σ egyetlen alkotóval sem párhuzamos, $\xi = 1$, ha a Σ egyetlen alkotóval párhuzamos, és $\xi > 1$, ha a Σ két alkotóval párhuzamos.

Még meg kell mutatnunk, hogy metszetként mindig teljes kupszeletet kapunk.

Ennek igazolásához a Σ síkban tekintsünk egy az F_1 fókuszra illeszkedő l egyenest. Az l egyenesre és a Q csucspontra illeszkedő sík a kupból az a_1, a_2 alkotókat metszi ki. Mivel az $\xi < 1$ esetben az l egyik alkotóval sem párhuzamos, ezért az l az a_1, a_2 alkotókat metszi. Tehát az ellipszis esetében minden fókuszon áthaladó egyenes a metszet-alakzat két pontját tartalmazza. Így a (4.6.3) polárkoordinátás egyenlet miatt a kimetszett alakzat nem lehet más, mint egy teljes ellipszis.

Az $\xi \geq 1$ esetet is megvizsgáljuk. Ekkor az l egyenes csak akkor nem metszi az a_1, a_2 alkotók valamelyikét, ha ez az alkotó párhuzamos az l egyenessel és ebből következően a Σ síkkal is. De az F_1 fókuszra ke-

resztül az $\mathcal{E} = 1$ esetben csak egy olyan $\mathcal{L}$ egyenes létezik, amelyik párhuzamos a kup valamely alkotójával, ill. az $\mathcal{E} > 1$ esetben pontosan két ilyen $\mathcal{L}$ egyenes létezik. Ugyanis az $\mathcal{L}$ csak azokkal az alkotókkal lehet párhuzamos, amelyek a Σ síkkal is párhuzamosak. Összefoglalva megállapíthatjuk, hogy az $\mathcal{E} = 1$ esetben az $\mathcal{L}$ egyetlen helyzetben $\mathcal{L}$ pontban a többi helyzetben pedig két pontban metszi a Σ által kimetszett alakzatot. Ismét a (4.6.3) és (4.6.4) formulából következik, hogy a kimetszett alakzat $\mathcal{E} = 1$ esetben teljes parabola az $\mathcal{E} > 1$ esetben pedig teljes hiperbola.

Végezetül bebizonyítjuk, hogy minden kupszelet kup-sík metszetként állítható elő.

A polárkoordinátás egyenletek alapján minden kupszelet az $\mathcal{E}$ és ℓ paraméterei által (izometria erejéig!) egyértelműen meghatározott. A (4.6.8) képlet alapján tetszőleges $\mathcal{E} \geq 0$ értéket előírva, mindig létezik olyan kup és Σ sík, hogy a rájuk vonatkozó kupszelet numerikus excentricitása az előírt $\mathcal{E} (= \sin \alpha / \sin \beta)$ érték. Tegyük fel, hogy egy ilyen kupszeletnek a másik paramétere ℓ^* . Ekkor a párhuzamos szelők tételéből triviálisan következik, hogy a kup csucsára mint centrumra vonatkozó $\lambda = \ell / \ell^*$ paraméterű centrális hasonlóság a Σ síkot olyan Σ' síkra transzformálja, amelyik a kupból $\mathcal{E}, \ell$ paraméterű kupszeletet metsz ki. Ezzel a tétel bizonyítását befejeztük. $\square$

A fenti tételből látható, hogy az ellipszisekhez és a hiperbolákhoz két fókusz és két direktrix tartozik, és ezek az F_1, d_1 ill. F_2, d_2 fókusz-direktrix párok egyenragnak, nincs olyan kanonikus tulajdonság, ami az egyik párt kitüntetné.

4.6.2 | Az ellipszis azoknak a pontoknak a halmaza, amelyekre a fókuszoktól mért távolságösszeg állandó.

A parabola azoknak a pontoknak a halmaza, amelyekre a fókuszoktól mért távolság a direktrixtől mért távolsággal egyezik meg.

A hiperbola azoknak a pontoknak a halmaza, amelyekre a fókuszoktól mért távolságkülönbség abszolút értéke állandó.

Bizonyítás. Térjünk vissza a b) ábrák jelöléséhez. A kupszelet valamely X pontjához jelölje A_1 ill. A_2 a QX alkotónak a K ill. K körrel vett metszéspontját. Mivel az $\overline{XF_1}, \overline{XA_1}$ ill. az $\overline{XF_2}, \overline{XA_2}$ ugyanazon Dandelin gömbhöz huzott érintő szakaszok, ezért

$$(4.6.9) \quad |XF_1| = |XA_1| \quad \text{és} \quad |XF_2| = |XA_2|$$

teljesül. Mivel az A_1A_2 egyenes mindig alkotó, ezért nyilvánvaló, hogy az $|A_1A_2| := 2a$ távolság a kupszeletre nézve konstans mennyiség.

Az első b) ábráról az

$$(4.6.10) \quad |XF_1| + |XF_2| = |XA_1| + |XA_2| = |A_1A_2| = 2a$$

azonosság adódik, vagyis az ellipszis pontjainak a fókuszoktól mért távolságösszege állandó.

A második ábrán $\sphericalangle = \beta$ teljesül, ezért $|XA_1| = |XY|$. Tehát a parabola pontjai a fókuszról ugyanolyan távolságra esnek, mint a direktrixtől.

A harmadik ábráról pedig

$$(4.6.11) \quad \left| |XF_1| - |XF_2| \right| = \left| |XA_2| - |XA_1| \right| = |A_1A_2| = 2a$$

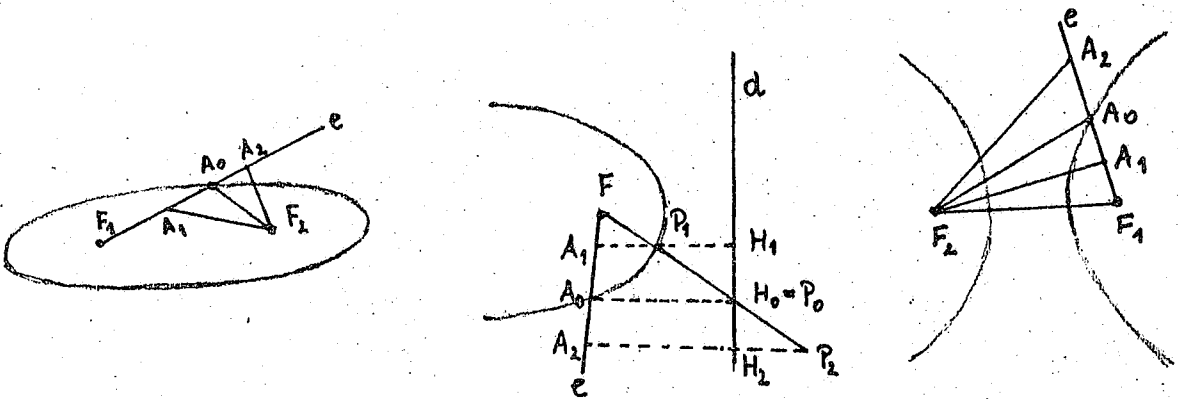
adódik. Tehát a hiperbola pontjainak a fókuszoktól mért távolságkülönbség abszolút értéke szintén konstans.

Még be kell látnunk, hogy csak a megfelelő kupszelet pontjaira érvényes a (4.6.10) ill. az $|XA_1| = |XY|$ ill. a (4.6.11) azonosság.

Indítsunk ki az F_1 fókuszról a kupszelet síkjára illeszkedő e félegyenest. Ha az e a parabola ill. a hiperbola esetében nem aszimptoti-

kus irányu, ekkor az ellipszis és a parabola esetében az e az egész kúpszeletet, ill. a hiperbola esetében az F_1 fókuszhoz közelebbi ágat egyetlen A_0 pontban metszi. Tekintsünk még az e félegyenesen olyan $A_1; A_2 \in e$ pontokat, amelyekre az A_1 pont az $\overline{F_1 A_0}$ szakasz belsőjében az A_2 pont pedig a szakaszon kívül esik. A parabola esetében legyen a P_0 az A_0 pontnak a direktrixen vett merőleges vetülete, valamint $P_i \in FP_0$ az a pont, amit az A_i ponton keresztül az $A_0 P_0$ egyenessel párhuzamos egyenes az FP_0 egyenesből kimetsz, továbbá legyen $H_i := A_i P_i \cap d$.

A következő ábrákról az A_1 és A_2 pontokra vonatkozóan a háromszög-egyenlőtlenség alapján rendre a következő egyenlőtlenségek adódnak.



c) ábrák

$$1. \quad |F_1 A_1| + |F_2 A_1| < |F_1 A_1| + |A_1 A_0| + |A_0 F_2| = |F_1 A_0| + |F_2 A_0| = 2a,$$

$$|F_1 A_2| + |F_2 A_2| = |F_1 A_0| + |A_0 A_2| + |F_2 A_2| > |F_1 A_0| + |F_2 A_0| = 2a,$$

$$2. \quad |FA_1| - |A_1 H_1| = |FA_1| - |A_1 P_1| - |P_1 H_1| = -|P_1 H_1| < 0,$$

$$|FA_2| - |A_2 H_2| = |FA_2| - |A_2 P_2| + |H_2 P_2| = |H_2 P_2| > 0,$$

$$3. \quad |F_2 A_1| - |F_1 A_1| > |F_2 A_0| - |A_0 A_1| - |F_1 A_1| = |F_2 A_0| - |F_1 A_0|,$$

$$|F_2A_2| - |F_1A_2| < |F_2A_0| + |A_0A_2| - |F_1A_2| = |F_2A_0| - |F_1A_0|.$$

Ezek az egyenlőtlenségek azt igazolják, hogy a megfelelő azonosságokat csak a kúpszelet pontjai elégítik ki. $\square$

Az ellipszisekre ill. a hiperbolákra a tételben szereplő

$$|F_1A| + |F_2A| = 2a \quad \text{ill.}$$

(4.6.12)

$$||F_1A| - |F_2A|| = 2a$$

konstans mennyiségeket nagytengety-hossznak nevezzük. A fókuszokból a kúpszelet pontjaiba mutató elemi vektorokat pedig rádiuszvektoroknak hívjuk.

Az ellipszis külsejét definíció szerint azok az A pontok alkotják, amelyekre

$$(4.6.13) \quad |F_1A| + |F_2A| > 2a,$$

ill. belsejét azok a pontok alkotják, amelyekre

$$(4.6.14) \quad |F_1A| + |F_2A| < 2a$$

teljesül.

A hiperbola külső pontjait az

$$(4.6.15) \quad ||F_2A| - |F_1A|| < 2a$$

egyenlőtlenséggel, ill. belső pontjait az

$$(4.6.16) \quad ||F_2A| - |F_1A|| > 2a$$

egyenlőtlenséggel definiáljuk.

Végül parabolát tekintve az A pont belső pont, ha

$$(4.6.17) \quad |FA| < |FH|,$$

ill. külső pont, ha

$$(4.6.18) \quad |FA| > |FH|$$

teljesül, ahol H az A pont direktrixen vett merőleges vetületét jelöli.

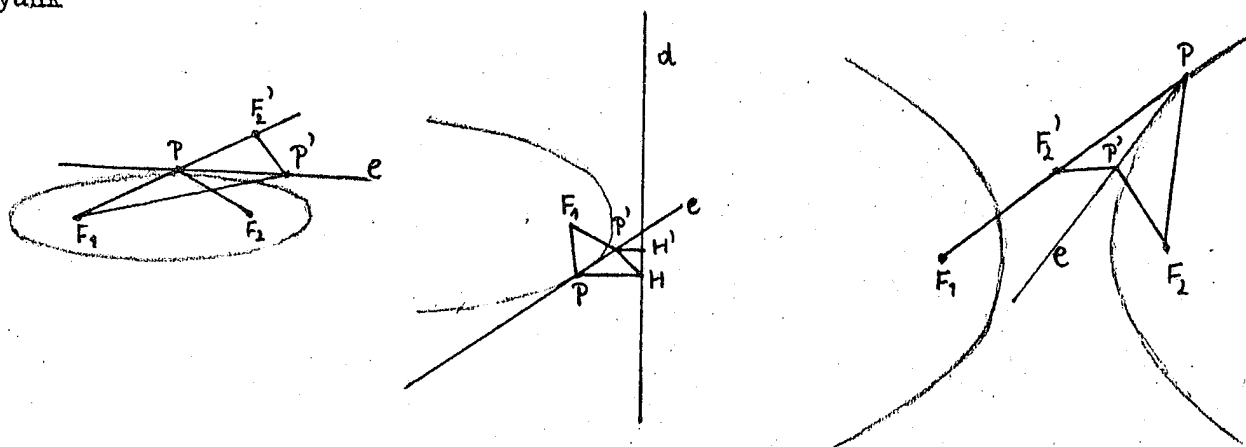
Ha valamely kupszelettel egy egyenesnek egyetlen közös pontja létezik, a többi pontja pedig külső pont, akkor az egyenest a kupszelet érintőjének nevezzük.

4.6.3. Tetszőleges kupszelet minden pontjához pontosan egy érintő húzható.

Mégpedig ez az érintő az ellipszisnél a rádiuszvektorok külső szögét, hiperbolánál a belső szögét, parabolánál pedig a rádiuszvektor és a pontból a direktrixre merőleges egyenes belső szögét felezi.

Bizonyítás. Először megmutatjuk, hogy a tételben szereplő szögfelezők valóban érintők. A kupszelet valamely P pontjához jelölje e a megfelelő szögfelezőt, F_2' az F_2 fókuszhoz az e egyenesre vonatkozó tükörképét, ill. a parabola esetén a H a P pontnak a direktrixen vett merőleges vetületét jelöli. Nyilvánvaló, hogy az F_2 a PF_1 egyenesre illeszkedik.

Vegyünk



d) ábrák

fel még egy $P' (\neq P) \in e$ pontot is. A fenti ábráról rendre a következő egyenlőségek olvashatók le.

1. $|F_1P'| + |P'F_2| = |F_1P'| + |P'F_2| > |F_1F_2| = |F_1P| + |PF_2| = |F_1P| + |PF_2| = 2a$,
2. $|F_1P'| - |P'H'| = |P'H| - |P'H'| > 0$, mert a $P'H'H$ háromszög derékszögű,
3. $|F_1P'| - |P'F_2| = |F_1P'| - |P'F_2| < |F_1F_2| = |F_1P| - |PF_2| = |F_1P| - |PF_2| = 2a$.

Az egyenlőtlenségek alapján a P pont mindig külső pont, és ezért az e szögfelező érintő.

Megmutatjuk, hogy a kupszelet minden pontjához egyetlen érintő húzható. A bizonyításhoz a kupszeletet kup-sík metszetként állítsuk elő, és térjünk vissza a b) ábrák jelöléséhez!

Ha e a kupszelet valamely X pontjához húzott érintője, akkor a Q csúcra és az e egyenesre illeszkedő Δ sík a kupnak csak az XQ alkotóját tartalmazza, a többi pontja pedig a kup külső pontja. Ezért az $e' := \sum_1 \Delta$ egyenes a K_1 kört az A_1 pontban érinti. Mivel ez utóbbi érintő egyértelműen meghatározott, ezért a Δ sík és az $e = \sum \Delta$ érintő is egyértelmű. Ezzel a tétel bizonyítását befejeztük. $\square$

7. § Területmérés

Valamely ponthalmazt konvexnek nevezünk, ha bármely két pontjával együtt a pontokat összekötő szakasz pontjait is tartalmazza.

A definícióból világos, hogy konvex ponthalmazok metszete is konvex halmaz.

A síkban véges sok zárt félsík metszetét konvex poligonnak nevezzük. A poligont 2-dimenziósnak mondjuk, ha nem létezik olyan egyenes, amelyik a poligon minden pontját tartalmazza. A 2-dimenziós korlátos konvex poligonokat konvex sokszögeknek nevezzük.

Ebben a paragrafusban csak konvex sokszögeket vizsgálunk.

Ha a konvex sokszög az $F_1, \dots, F_k$ zárt félsíkok metszeteként áll elő,

akkor az F_i félsíkokat definiáló félsíkoknak nevezzük. Az F_i definiáló félsíkot lényegesnek mondjuk, ha határoló egyenese a sokszög két különböző pontját tartalmazza. Az $F_1, \dots, F_k$ definiáló rendszert minimálisnak mondjuk, ha belőle bármelyik F_i elemet elhagyva a visszamaradt félsíkok metszete az összes féltér metszetét valódi részhalmazként tartalmazza.

Könnyen megmutatható, hogy minimális definiáló rendszer létezik és egyértelműen meghatározott, mert pontosan a lényeges definiáló félsíkokat tartalmazza. A részletek átgondolását az olvasóra bizzuk.

A lényeges definiáló félsíkok határoló egyenesei a konvex sokszögből egy egész szakaszt tartalmaznak. Ezeket a szakaszokat a konvex sokszög éleinek, az élek végpontjait pedig a konvex sokszög csucsainak nevezzük. Az élek egyesített pontthalmazát a konvex sokszög határának, a sokszög határpontoktól különböző pontjai pedig a sokszög belsőpontjainak mondjuk.

Legyen P a sokszög belsőpontja, és vegyünk fel egy P kezdőpontu e félegyenest. A sokszög korlátos lévén az e félegyenes biztosan tartalmaz (egyetlen!) határpontot. Mégpedig az e vagy egy él belsejébe vagy pedig egy csucsba metsz bele. Forgassuk körbe az e félegyenest a P pont körül. Ezzel a körbeforgatással a csucsok egy $P_1, P_2, \dots, P_k$ sorrendje definiálható, és az éleket rendre a

$$\overline{P_1 P_2}, \overline{P_2 P_3}, \dots, \overline{P_{k-1} P_k}, \overline{P_k P_1}$$

szakaszok adják. Világos az is, hogy minden $\overline{P_i P_{i+1}}$ él-egyeneshez a többi csucs, az egyenes által meghatározott egyik nyílt félsíkba esik.

Ezt a félsíkot a határoló egyenesével lezárva lényeges definiáló félsíkhöz jutunk. Látható az is, hogy minden lényeges definiáló félsík ilyen módon adható meg. Ezért a lényeges definiáló félsíkok egyértelműen meghatározottak, és minden konvex sokszög a csucsai által egyértelműen meghatározott.

A k -csucsu konvex sokszögeket k -szögeknek nevezzük.

A háromszögek és a paralelogrammák definíciójából látható, hogy csúcspontjaik konvex sokszögeket definiálnak.

A területmérésnél minden konvex sokszöghöz nem-negatív számot rendelünk.

4.7.1. Pontosan egy olyan $T(K)$ hozzárendelés létezik, amelyik minden K konvex sokszöghöz $T(K) \geq 0$ értéket rendel a következő tulajdonságokkal

1. Ha a K két olyan K_1, K_2 konvex sokszög egyesített halmaza, amelyekre a $K_1 \cap K_2$ metszet közös él, akkor

$$T(K) = T(K_1) + T(K_2) .$$

2. A $T(K)$ függvény az izometriákra nézve invariáns, vagyis minden φ izometriára

$$T(\varphi(K)) = T(K)$$

teljesül.

3. Az egységnyi oldalú négyzethez a T az 1 értéket rendeli.

Bizonyítás. Először a hozzárendelés egzisztenciáját igazoljuk. A bizonyítás több lépésre tagozódik, és az egyes lépéseket sorszámmal választjuk el egymástól.

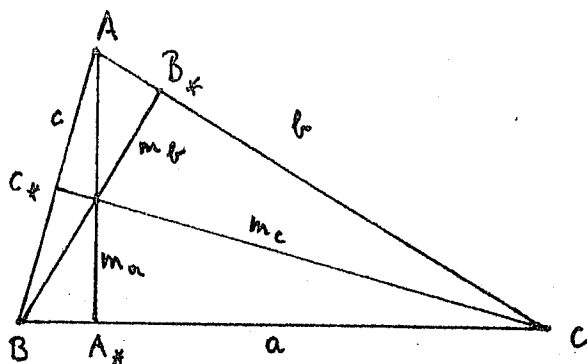
1. Tetszőleges ABC háromszögben jelölje " a " az egyik oldal hosszát, és

m_a az oldalhoz tartozó magasság hosszát.

Megmutatjuk, hogy az $a \cdot m_a$ érték független az oldal választásától.

Ha c, m_c másik oldal-

-magasság pár, és A_*, B_*, C_* a megfelelő magasságvonalak talppontjait jelö-



11, akkor $\angle BAA^* = \angle BCC^*$, mert mindkét szög az $\overline{AC}$ oldal fölé írt Thales körben a $\overline{C^*A^*}$ húrlátószöge. Ezért a BA^*A és a BC^*C derékszögű háromszögekben a megfelelő szögek megegyeznek, és ezért a két háromszög hasonló. Az

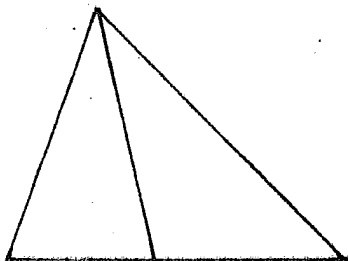
$$\frac{m_a}{c} = \frac{m_c}{a}$$

azonosságból a bizonyítandó $m_a \cdot a = m_c \cdot c$ adódik.

2. A $T(K)$ függvény definíció szerint minden háromszögen az egyértelműen meghatározott

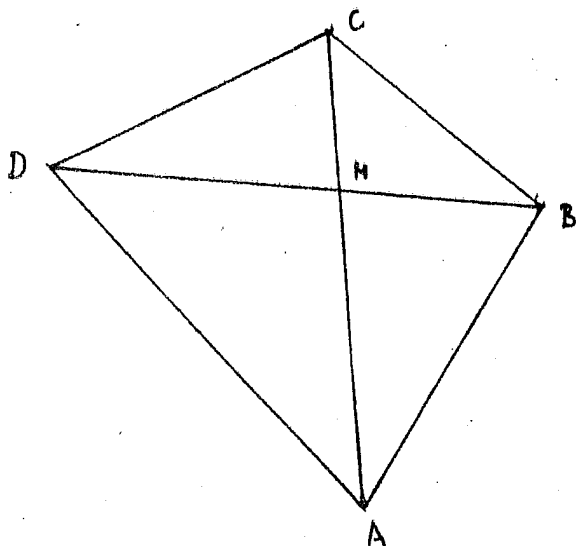
$$T(K) = \frac{a \cdot m_a}{2}$$

értéket vegye fel.



Ebből a formulából nyilvánvalóan adódik, hogy ha egy háromszöget csucsból kiinduló szakasszal kettévágunk, akkor a háromszöghöz rendelt T érték a két háromszöghöz rendelt értékek összegével egyezik meg.

3. Tekintsünk egy konvex négyszöget. Ebben bármelyik átlót behuzva a négyszög



két háromszögre bomlik. A négyszöghöz a T függvény definíció szerint a két háromszöghöz rendelt értékek összegét rendeli. Meg kell mutatnunk, hogy a másik átlóból kiindulva a négyszöghöz ugyanaz a T érték rendelődik. Az ábra jelölései mellett a következőket írhatjuk

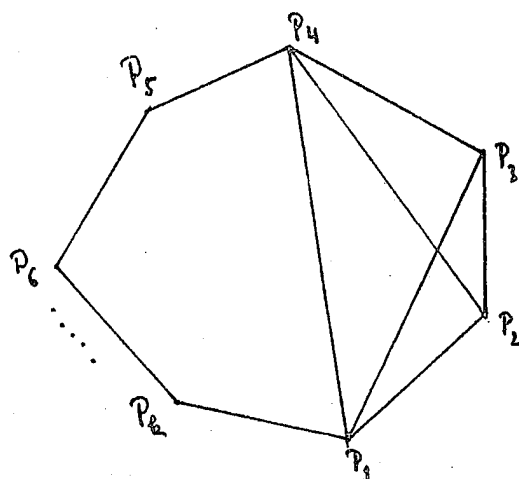
$$\begin{aligned} T(ABC) + T(ACD) &= T(ABM) + T(BCM) + T(AMD) + T(DMC) = \\ &= T(ABM) + T(AMD) + T(BCM) + T(CDM) = T(ABD) + T(BC) , \end{aligned}$$

ami a bizonyítandó azonosságot igazolja.

4. Egy konvex k -szög T -értékét úgy definiáljuk, hogy egy csucsból minden átlót behuzunk, és a sokszöghöz az így keletkezett $(k - 2)$ háromszög T -értékeinek az összegét rendeljük.

Megmutatjuk, hogy az így definiált érték független a csucs választásától. Ezt az állítást teljes indukcióval igazoljuk. A $k = 4$ esetre vonatkozó bizonyítást a 3. pont tartalmazza. Tegyük fel, hogy ez az állítás minden $(k - 1)$ -szögre igaz.

Tekintsünk ezek után egy $(P_1, P_2, \dots, P_k)$ k -szöget, ahol a csucsokat egy körüljárásnak megfelelően soroltuk fel. Az állítást elegendő két szomszédos, pl. a P_1, P_2 pontokra vonatkozóan igazolnunk. Irjuk fel a T értéket a P_2 csucsból kiindulva. Az indukciós feltétel miatt:



szédos, pl. a P_1, P_2 pontokra vonatkozóan igazolnunk. Irjuk fel a T értéket a P_2 csucsból kiindulva. Az indukciós feltétel miatt:

$$\begin{aligned} T(P_2, P_3, \dots, P_k, P_1) &= T(P_2 P_3 P_4) + \\ &+ T(P_2 P_4, \dots, P_k, P_1) = T(P_2 P_3 P_4) + \\ &+ T(P_2 P_4 P_1) + T(P_1 P_4 P_5, \dots, P_k) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= T(P_1 P_2 P_3 P_4) + T(P_1 P_4 P_5, \dots, P_k) = T(P_1 P_2 P_3) + T(P_1 P_3 P_4) + T(P_1 P_4, \dots, P_k) = \\ &= T(P_1 P_2, \dots, P_k) , \end{aligned}$$

ami annyit jelent, hogy a P_2 pontból kiindulva a sokszöghöz ugyanazt az értéket rendeljük, mint a P_1 pontból kiindulva.

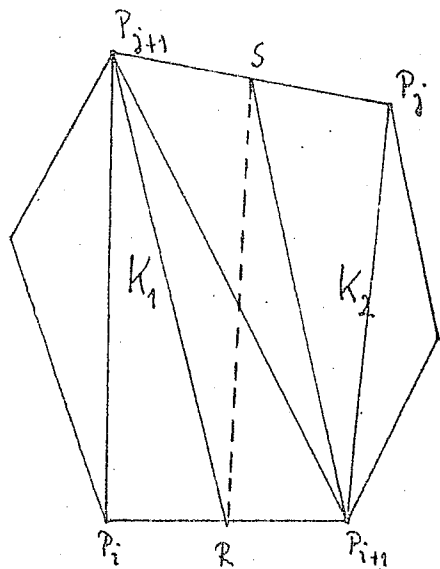
5. Eddig minden K sokszöghöz egy egyértelműen meghatározott $T(K) \geq 0$ értéket rendeltünk. Bebizonyítjuk, hogy a $T(K)$ függvény a tétel 1., 2.

és 3. tulajdonságaival valóban rendelkezik.

Minden egységnyi oldalhosszúságú négyzethez 1 értéket rendelünk, mivel ezt a négyszöget az egyik átló két olyan háromszögre bontja, amelyek alapja és magassága is egységnyi. Ezzel a 3. tulajdonságot igazoltuk.

A 2. tulajdonság is triviálisan teljesül. Ugyanis az izometriák magasságvonalakat magasságvonalakba transzformálják, ezért a képháromszögekhez rendelt T -érték megegyezik az ősképek T -értékeivel. De ebből az is következik, hogy minden konvex sokszögre vonatkozóan a T függvény az izometriákra nézve invariáns, mivel minden konvex sokszög háromszögekre bontható.

Még az 1. additív tulajdonságot kell igazolnunk.



Tegyük fel, hogy a $(P_1, P_2, \dots, P_k)$

csúcspontok által meghatározott K konvex sokszöget olyan $\overline{RS}$ szakasszal vágjuk két részre, amelynek R végpontja a sokszög $P_i P_{i+1}$ oldalán, az S pontja pedig a $P_j P_{j+1}$ oldalak helyezkedik el. Az R és az S pontok a csucsok valamelyikével is egybeeshet.

A $K_2 = (R, P_{i+1}, \dots, P_j, S)$ sokszög $T(K_2)$

értékére $T(K_2) = T(R, P_{i+1}, \dots, P_j, S) = T(R, P_{i+1}, S) + T(P_{i+1}, P_j, S) +$

$+ T(P_{i+1}, P_{i+2}, \dots, P_j)$ adódik, a $K_1 = (R, P_{j+1}, \dots, P_i)$ sokszögre pedig

$$T(K_1) = T(R, P_{j+1}, \dots, P_i) = T(R, P_{j+1}, P_i) + T(P_{j+1}, P_i, P_{j+2}, \dots, P_i)$$

Igy a $T(K_1) + T(K_2)$ összegre a következőket kapjuk.

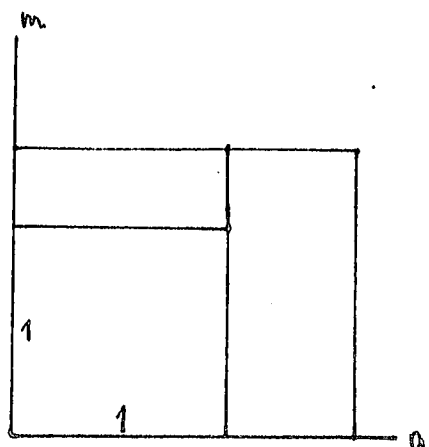
$$T(K_1) + T(K_2) = T(P_i, P_{j+1}, \dots, P_{i-1}) + T(P_{j+1}, P_i, R) + T(R, P_{i+1}, S, P_{j+1}) + T(P_{i+2}, P_j, S) +$$

$$+ T(P_{i+1}, \dots, P_j) = T(P_i, P_{j+1}, \dots, P_{i-1}) + T(P_{j+1}, P_i, R) + T(P_{j+1}, R, P_{i+1}) +$$

$$+ T(P_{i+1} S P_{j+1}) + T(P_{i+1} P_j S) + T(P_{i+1} P_{i+2}, \dots, P_j) = T(P_{i+1} P_{j+1} P_{j+2}, \dots, P_1) + \\ + T(P_{i+1} P_{i+2}, \dots, P_j P_{j+1}) = T(K) .$$

Tehát a $T(K)$ függvény valóban rendelkezik az 1. pontban foglalt additív tulajdonsággal is, és az egzisztencia bizonyítását befejeztük.

6. Az unicitás bizonyítására térünk át.



Tekintsünk először egy egységnyi hosszúságú szakaszt és szerkesszünk föléje m magasságú téglalapot, amelyhez a tételben szereplő T függvény a $T(m)$ értéket rendeli.

Az 1. additív tulajdonság miatt a $T(m)$ függvény additív, monoton nő, és a tétel 3. tulajdonsága miatt $T(1) = 1$.

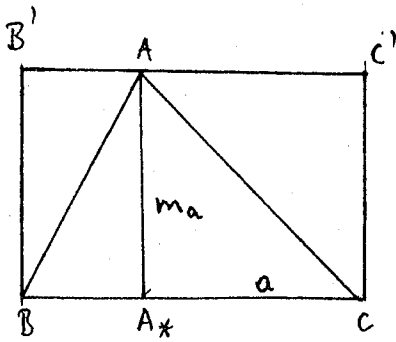
Igy a függvényegyenlet-lemmából a

$$T(m) = m$$

azonosságot kapjuk, ami annyit jelent, hogy minden a tételben szereplő T hozzárendelés az egységnyi alapu és m magasságú téglalaphoz az m értéket rendeli.

Most az m magasságot rögzítsük, és az alap hosszát változtassuk. Az a alaphosszuságnál kapott téglalaphoz a T függvény a $T(a)$ értéket rendeli. Ez a $T(a)$ függvény ismét additív, monoton nő, és $T(1) = m$ teljesül. Ismét a függvényegyenlet-lemma alapján $T(a) = m \cdot a$. Ezzel megkaptuk, hogy minden, a tétel feltételeinek eleget tevő T függvény az " a " alapu és m magasságú téglalaphoz az $a \cdot m$ értéket rendeli.

A háromszögekre vonatkozó



$$T = \frac{a \cdot m_a}{2}$$

terület-képletet is azonnal megkapjuk, ha az ábra alapján az alap fölé az m magasságu $BCC'B'$ téglalapot szerkesztjük. Ekkor a BAB' háromszög a BA_xA háromszöggel, ill. az A_xCA háromszög a $CC'A$ háromszöggel egybevágó. Így a T függvény additivitását és az izometriákra vonatkozó invarianciáját felhasználva kapjuk, hogy a $BCC'B'$ téglalaphoz rendelt $a \cdot m$ érték az ABC háromszöghöz rendelt érték kétszerese.

Mivel minden konvex sokszög háromszögekre bontható, ezért a háromszögekre vonatkozó terület-képletből és az additív tulajdonságból a $T(K)$ függvény unicitása következik. □

A K konvex sokszöghöz rendelt $T(K)$ értéket a K területének nevezzük. A fenti bizonyításból a háromszögekre vonatkozó $T = a \cdot m_a / 2$ és a paralelogrammákra vonatkozó $T = a \cdot m$ területképlet is adódik. Megjegyezzük, hogy terület-mérték nemcsak konvex sokszögekhez, hanem jóval bonyolultabb ponthalmazokhoz, így pl. minden konvex ponthalmazhoz is definiálható. Azonban ezeknél az eljárásoknál az eddig látottaknál bonyolultabb módszereket kellene alkalmaznunk, ezért ezek vizsgálatával nem foglalkozunk. Ilyen irányú részletes vizsgálatokkal analízisben találkozhatunk.

8. § Térfogatmérés

A térben a konvex poliédereket véges sok zárt féltér, az u.n. definiáló félterek metszeteként definiáljuk. A korlátos konvex poliédereket konvex politopoknak nevezzük.

A konvex ponthalmazokat az Affinitások című fejezetben részletesen megvizsgáljuk, ezért itt néhány tényt csak vázlatosan ismertetünk.

A konvex poliédert 3-dimenziósnak mondjuk, ha nem létezik olyan sík, amelyik a poliéder minden pontját tartalmazza. Az F_1 definiáló feltéret lényegesnek mondjuk, ha határoló síkja a poliéder három nem kollineáris pontját tartalmazza.

Bebizonyítható, hogy minden 3-dimenziós poliéderhez a lényeges definiáló feltérek egyér elműen meghatározottak, és a poliéder ezek metszeteiként állítható elő.

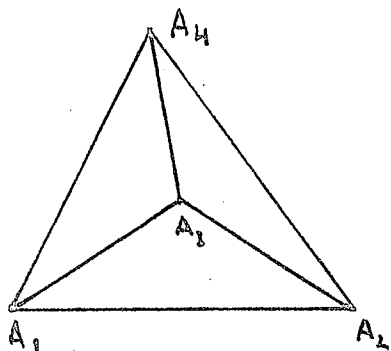
A lényeges definiáló feltérek határoló síkjai a 3-dimenziós konvex politopot konvex sokszögben metszik, amiket a politop oldallapjainak nevezünk. Az oldallapok éleit ill. csucsait a politop éleinek ill. csucsainak nevezzük.

Itt is belátható, hogy minden 3-dimenziós konvex politop egyértelműen meghatározott a csucsai által.

Ezeknek a tényeknek részletes bizonyítása az 5.4 paragrafusban található.

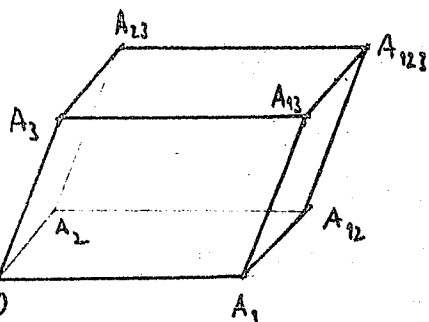
A konvex politopokra példaként a tetraédereket és a paralelepipedonokat említjük.

Tekintsünk a térben négy, nem egy síkra illeszkedő pontot, és jelöljük



ezeket az A_1, A_2, A_3, A_4 jelekkel. Három különböző A_i, A_j, A_k pontra jelölje F_{ijk} azt a zárt feltéretet, amelyik a három pontot a határán a negyediket pedig a belsőjében tartalmazza. Az így definiált négy zárt feltér metszetét tetraédernek nevezzük. Látható, hogy

a tetraéder csucspontjai az A_i pontok.



A paralelepipedon definíciójához ismét tekintsünk négy nem egy síkra eső pontot és jelöljük ezeket az $0, A_1, A_2, A_3$ jelekkel. Az A_{ij} ($i < j$) és az A_{123} jelekkel azokat a pontokat jelöljük, amelyekre

$$\underline{OA_{1j}} = \underline{OA_1} + \underline{OA_j},$$

$$\underline{OA_{123}} = \underline{OA_1} + \underline{OA_2} + \underline{OA_3}$$

teljesül. Az így kapott nyolc ponthoz pontosan hat olyan zárt féltér tartozik, amelyek négy pontot a határukon a többi négy pontot pedig a belsejükben tartalmaznak. Ennek a hat zárt féltérnek a metszetét paralelepipedonnak nevezzük. A paralelepipedon csucsai az O, A_1, A_{1j}, A_{123} pontok. Ha a paralelepipedon egy csucsba befutó élei páronként merőlegesek, akkor a paralelepipedont téglatestnek, az azonos élhosszal rendelkező téglatesteket pedig kockának nevezzük.

A konvex politopokhoz szintén egy egyértelműen meghatározott V térfogat-érték definiálható. A V térfogatfüggvény hasonlóan vezethető le, mint a 4.7.1 tételben a T terület függvény, azonban a pontos bizonyítás során lényeges nehézségbe ütközünk. Röviden ezeket a felmerülő nehézségeket taglaljuk.

A V térfogatfüggvény egzisztenciáját itt is úgy biztosíthatjuk, hogy a tetraéderekhez az egyértelműen (!) meghatározott

$$\frac{T \cdot m}{3}$$

számot rendeljük (T egy alap területe, m pedig a hozzá tartozó magasság hossza), majd egy tetszőleges konvex politopot valamilyen módon tetraéderekre bontunk, és a politophoz rendelt térfogat értéket a tetraéderekhez rendelt térfogat értékek összegeként definiáljuk. Ez a tetraéder felbontás lehet pl. olyan, hogy a politop egyik csucsát kijelöljük, és az ehhez a csucshoz nem csatlakozó lapokat, egy csucsukból kiinduló átlókkal háromszögekre bontunk. Ezek után a politop olyan egymásba nem nyúló tetraéderekre bontható, amelyek egyik csucsa a kijelölt csucs, valamint éleik a politop élei, ill. a behuzott lapátlók.

Azonban ha azt akarjuk bebizonyítani, hogy a tetraédertérfogatok összege a csucs választásától független, akkor a 4.7.1 tétel 4. pontjában látott indukciós lépés nem alkalmazható, és az állítás bizonyítása lényegesen körülményesebbé válik.

Az igazán lényeges elvi nehézségek az unicitás bizonyításában jelentkeznek.

A téglalapokhoz hasonlóan (a függvényegyenlet-lemma segítségével) minden nehézség nélkül bebizonyítható, hogy minden, a feltételeket kielégítő térfogatfüggvény a téglatestekhez a $V = T \cdot m$ számot rendeli. Azonban a tetraéderek $T \cdot m/3$ térfogatképlete igazolásához nem alkalmazható a háromszögeknél alkalmazott lépés, ahol is a háromszöget téglalapba "daraboltuk" át. A tetraédereknek téglatestekbe való "átdarabolhatatlanságát" Dehn német matematikus bizonyította 1901-ben. Megjegyezzük, hogy ez a probléma Hilbert híres problémáinak egyike volt, és ez a probléma az elsőként megoldott Hilbert probléma. Tehát a tetraéderek térfogatképlete elemi, átdarabolásos módszerrel nem vezethető le, hanem approximációs módszerek szükségesek a bizonyításhoz.

Ezekkel a kérdésekkel a hosszadalmas tárgyalásuk miatt nem foglalkozunk. A következő tételt is bizonyítás nélkül közöljük.

4.8.1 Pontosan egy olyan $V(K)$ hozzárendelés létezik, amelyik a tér minden korlátos konvex K ponthalmazához $V(K) \geq 0$ értéket rendel a következő tulajdonságokkal:

1. Ha a K két olyan konvex K_1, K_2 ponthalmaz egyesített halmaza, amelyekre $K_1 \cap K_2 = \emptyset$, akkor

$$V(K) = V(K_1) + V(K_2) .$$

2. Minden φ izometriára és K konvex ponthalmazra

$$V(\varphi(K)) = V(K) .$$

3. Az egységkocka V -értéke 1 .

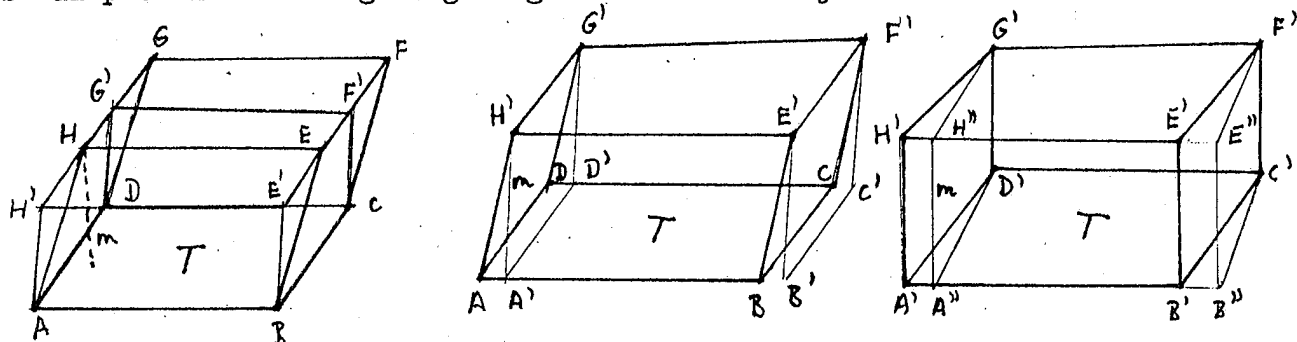
A $V(K)$ értéket a K pontthalmaz térfogatának nevezzük. A következő tételt "átdarabolásos" módszerrel igazoljuk.

4.8.2. A paralelepipedonok térfogata

$$(4.8.1) \quad V = T \cdot m,$$

ahol T az egyik oldallapjának területe, m pedig a hozzá tartozó magasság.

Bizonyítás. Korábban láttuk, hogy a téglatestek térfogatképlete a $V = T \cdot m$ képlet. Ezt felhasználva a tételt úgy bizonyítjuk, hogy a paralelepipedont azonos alapterületű és magasságú téglatestbe daraboljuk át. Ez az átdarabolás



3 lépésben történik. Az egyes lépések a fenti ábrákon is láthatók.

Induljunk ki az $(ABCDEFGH)$ paralelepipedonból. Első lépésként az $ABCD$ pontok síkjára állítsunk merőleges síkokat az AB ill. CD egyeneseken keresztül, amelyek az EF és HG egyenesekből az E', H' ill. az F', G' pontokat metszik ki. Ekkor az $(ABEHE'H')$ hasáb egybevágó a $(DCFGF'G')$ hasábbal, így az $(ABCDEFGH)$ paralelepipedon térfogata megegyezik az $(ABCDE'F'G'H')$ paralelepipedon térfogatával, és közben az $(ABCD)$ alap T területe is, és az m magasság is változatlan. A második lépésben az $E'F'$ ill. a $H'G'$ egyeneseken keresztül állítsunk merőleges síkokat az alapra, amelyek az AB és a DC egyenesek a B', C' ill. az A', D' pontokban metszik. Ekkor az $(AA'D'DH'G')$ hasáb egybevágó a $(BB'C'C'E'F')$ hasábbal, így az $(A'B'C'D'E'F'G'H')$ paralelepipedon térfogata megegyezik az előző paralelepipedon térfogatával. Végül a $G'D'$ ill. $F'C'$ egyeneseken keresztül állítsunk merőleges síkokat az $A'B'E'H'$ pontok síkjára, amelyek az $A'B'$ ill. $H'E'$ egyenesekből az A'', H''

ill. az E', B' pontokat metszik ki. Ekkor az $(A''B''C'D'E''F'G'G'')$ paralelepipedon már téglatest, aminek térfogata megegyezik az előző paralelepipedon térfogatával, ugyanis az $(A'A''D'H'H''G')$ hasáb egybevágó a $(B'B''C'E'E''F')$ hasábbal. A végeredményül kapott téglatest alapjának terület és magassága a kiindulásnál tekintett paralelepipedon alapterületével és magasságával egyezik meg, amivel a (4.8.1.) formulát bebizonyítottuk.

9. § Terület és térfogatforma

Az irányított síkban egy $\underline{x} = \underline{PQ}$, $\underline{y} = \underline{PR}$ bázist jobbsodrásúnak ill. balsodrásúnak nevezzük, ha a Q pont a $(PR, \leq)$, ahol $P \leq R$, rendezett egyenes jobbpártjába ill. balpártjába esik.

Az irányított térben hasonló módon járunk el. Ha az $\underline{x} = \underline{PQ}$, $\underline{y} = \underline{PR}$, $\underline{z} = \underline{PS}$ vektorok a térben bázist alkotnak, akkor a P, Q, R pontok síkját úgy irányítsuk, hogy az $\underline{x}, \underline{y}$ vektorok benne jobbsodrású bázist alkossanak.

Az $\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}$ bázist jobbsodrásúnak ill. balsodrásúnak nevezzük, ha az S pont ennek az irányított síknak a jobbpártjába ill. a balpártjába esik.

Könnyen megmutatható, hogy a bázisok sodrása a reprezentánsok választásától függetlenül egyértelműen meghatározott, és csak a sík ill. a tér irányításától függ.

A bázisok $\xi_{\underline{xy}}$ ill. $\xi_{\underline{xyz}}$ előjelét a +1 számmal definiáljuk, ha jobbsodrású, és a -1 értékkel, ha balsodrású.

A továbbiakban egyelőre irányított síkot tekintünk, és a sík minden $\underline{u}, \underline{v}$ vektorához $F(\underline{u}, \underline{v})$ jellel jelölt valós számot rendelünk.

Ha az $\underline{u}$ és $\underline{v}$ lineárisan függők, akkor definíció szerint $F(\underline{u}, \underline{v}) = 0$. Ha pedig lineárisan függetlenek, akkor tetszőleges $\underline{u} = \underline{PQ}$, $\underline{v} = \underline{PR}$ reprezentánsokat választva jelölje $T(\underline{u}, \underline{v})$ az $\underline{u}$ és $\underline{v}$ által kifeszített P, Q, S, R (ahol $\underline{u} + \underline{v} = \underline{PS}$) paralelogramma területét. Nyilvánvaló, hogy a $T(\underline{u}, \underline{v})$ érték a reprezentánsok választásától függetlenül egyértelműen meghatározott. Ezek után az $F(\underline{u}, \underline{v})$ értéket az

$$(4.9.1) \quad F(\underline{u}, \underline{v}) = \sum_{\underline{u}, \underline{v}} T(\underline{u}, \underline{v})$$

számmal definiáljuk.

Az $F(\underline{u}, \underline{v})$ függvényt területformának nevezzük.

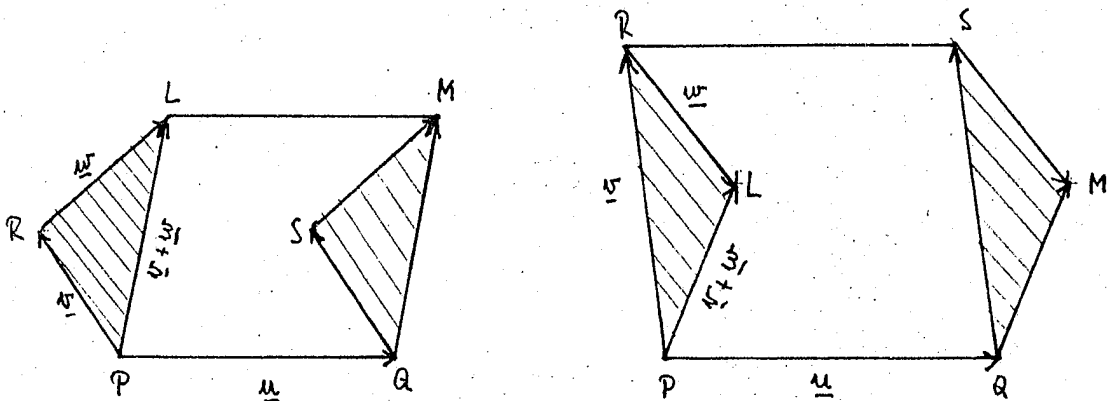
4.9.1 Az $F(\underline{u}, \underline{v})$ területforma antiszimmetrikus, homogén és additív, vagyis minden $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ vektorra és $\lambda \in \mathbb{R}$ valós számra az

1. $F(\underline{u}, \underline{v}) = -F(\underline{v}, \underline{u})$,
2. $F(\lambda \underline{u}, \underline{v}) = F(\underline{u}, \lambda \underline{v}) = \lambda F(\underline{u}, \underline{v})$,
3. $F(\underline{u} + \underline{v}, \underline{w}) = F(\underline{u}, \underline{w}) + F(\underline{v}, \underline{w})$, $F(\underline{u}, \underline{v} + \underline{w}) = F(\underline{u}, \underline{v}) + F(\underline{u}, \underline{w})$

azonosságok érvényesek.

Bizonyítás. Az $\sum_{\underline{u}, \underline{v}}$ előjelet vált, ha az $\underline{u}$ és $\underline{v}$ vektorokat felcseréljük, amiből az antiszimmetria triviálisan következik.

A homogenitás tulajdonsága pedig annak az egyszerű ténynek a következménye, hogy az előjeles terület λ -szorosára változik, ha valamelyik vektort a kifejezésben λ -szorosára nyújtjuk. Az additív tulajdonságot is egyszerű geometriai ténynek magyarázzák. Mindkét ábrán a bevonalkázott két háromszög egybevágó, így a PQSR és az RSIM paralelogrammák előjeles területeinek az



összege megegyezik a PQML paralelogramma előjeles területével. De ez éppen a területforma additív tulajdonságát jelenti. $\square$

Vegyünk fel a sík vektorai között egy $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$ ortonormált, jobbsodrású bázist. Az előző tétel miatt

$$F(\underline{e}_1 \underline{e}_1) = F(\underline{e}_2 \underline{e}_2) = 0, \quad F(\underline{e}_1 \underline{e}_2) = 1, \quad F(\underline{e}_2 \underline{e}_1) = -1$$

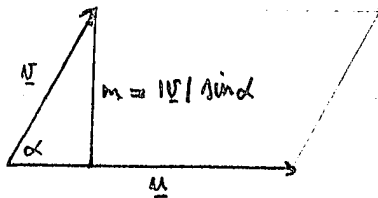
teljesül. Így ha az $\underline{u} = u^1 \underline{e}_1 + u^2 \underline{e}_2$ és a $\underline{v} = v^1 \underline{e}_1 + v^2 \underline{e}_2$ kifejtéseket a területformába helyettesítjük, akkor a homogén és az additív tulajdonságok miatt az

$$(4.9.2) \quad F(\underline{u}\underline{v}) = u^1 v^2 - u^2 v^1 = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}$$

képlethez jutunk.

A területforma definíciójából nyilvánvalóan következik az

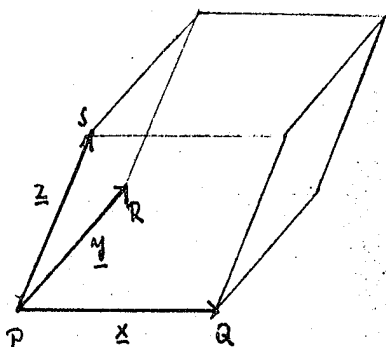
$$(4.9.3) \quad F(\underline{u}\underline{v}) = |\underline{u}| |\underline{v}| \sin \angle (\underline{u}, \underline{v}) \text{ képlet is.}$$



Ennek igazolásához csak annyit kell észrevennünk, hogy az $\underline{u}$ és $\underline{v}$ által kifeszített paralelogramma alapja $|\underline{u}|$ és

$$\text{magassága } m = |\underline{v}| |\sin \angle (\underline{u}, \underline{v})|.$$

A térfogatformat hasonló módszerrel vezetjük be, mint a területformát. A teret irányítottnak tekintjük, és minden $\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}$ vektorhármashoz egy $(\underline{x}, \underline{y}, \underline{z})$



jellel jelölt valós értéket rendelünk.

Ha a három vektor lineárisan függők, akkor definíció szerint $(\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}) = 0$.

Ha pedig a három vektor lineárisan független, akkor ezekhez az $\underline{x} = \underline{PQ}$,

$\underline{y} = \underline{PR}$, $\underline{z} = \underline{PS}$ reprezentánsokat választ-

va jelölje $V(\underline{x}, \underline{y}, \underline{z})$ a vektorok által kifeszített paralelepipedon térfogatát.

Ez a térfogat nem függ a P pont választásától. Mindezek után az $\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}$ vektorokhoz rendelt érték definíció szerint az

$$(4.9.4) \quad (\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}) = \sum_{xyz} V(\underline{x}, \underline{y}, \underline{z})$$

valós szám.

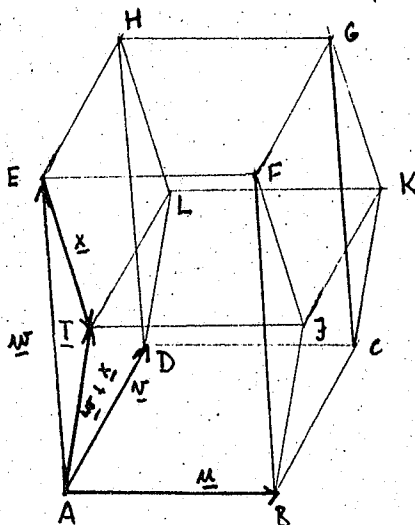
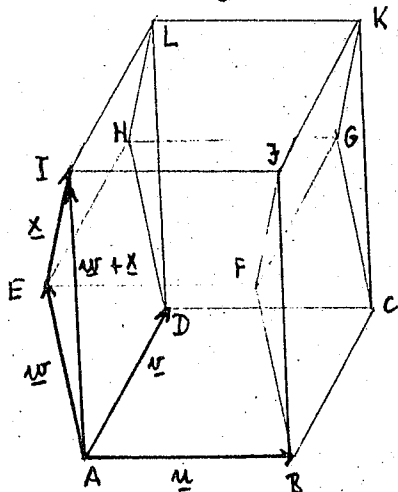
Az $(\underline{x}, \underline{y}, \underline{z})$ függvényt térfogatformának nevezzük.

4.9.2. Az $(\underline{x}, \underline{y}, \underline{z})$ térfogatforma bármely két komponensének cseréjére nézve előjelet vált (antiszimmetrikus), továbbá mindegyik komponensében homogén és additív.

Bizonyítás. Az $\sum_{xyz}$ előjelet vált, ha a vektorok közül kettőt felcserélünk, amiből az antiszimmetria triviálisan következik.

A homogenitás tulajdonsága itt is abból az egyszerű észrevételből következik, hogy egy paralelepipedon előjeles térfogata λ -szorosára változik, ha valamelyik definiáló vektort λ -szorosára nyújtunk meg.

Az additív tulajdóságot itt is



ábrákról olvashatjuk le. Ha $\underline{u} = \underline{AB}$, $\underline{v} = \underline{AD}$, $\underline{w} = \underline{AE}$ és $\underline{x} = \underline{EI}$, valamint a többi pontot az ábrák alapján jelöljük be, akkor az AIEDLH hasáb egybevágó a BJFCKG hasábbal, ill. az AIEBJF hasáb egybevágó a DLHCKG hasábbal, így térfogatuk megegyezik. Ezekből pedig azonnal következik az

$$(\underline{u}, \underline{v}, \underline{w} + \underline{x}) = (\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}) + (\underline{u}, \underline{v}, \underline{x})$$

additív tulajdonság. A többi komponens additív tulajdonsága már az antiszimmetriából is következik. □

Tekintsünk a térben egy $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ ortonormált bázist. A térfogatforma definíciójából a következő azonosságok adódnak:

$$(\underline{e}_i \underline{e}_j \underline{e}_k) = 0 \quad , \text{ ha két index megegyezik,}$$

$$(\underline{e}_i \underline{e}_j \underline{e}_k) = \sum \underline{e}_i \underline{e}_j \underline{e}_k \quad , \text{ ha az indexek különbözőek}$$

Ezért ha a térfogat formába az

$$\underline{u} = \sum u^i \underline{e}_i \quad , \quad \underline{v} = \sum v^j \underline{e}_j \quad , \quad \underline{w} = \sum w^k \underline{e}_k$$

kifejtett vektorokat helyettesítjük be, akkor a homogén és additív tulajdonságokat és az előbbi formulákat felhasználva az

$$(\underline{u} \underline{v} \underline{w}) = u^1 v^2 w^3 - u^1 v^3 w^2 - u^2 v^1 w^3 + u^2 v^3 w^1 + u^3 v^1 w^2 - u^3 v^2 w^1 =$$

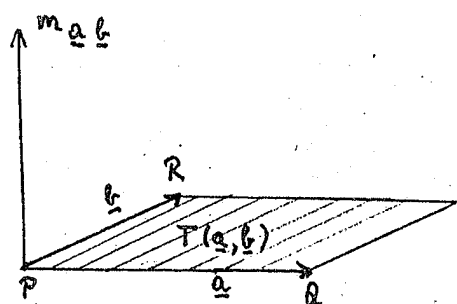
$$(4.9.5) \quad = \begin{vmatrix} u^1 & u^2 & u^3 \\ v^1 & v^2 & v^3 \\ w^1 & w^2 & w^3 \end{vmatrix}$$

képlethez jutunk. Ez a formula a determinánsok geometriai jelentésére mutat rá. Ugyanis az előző formulák szerint a determináns nem más, mint a sorvektorok (vagy oszlopvektorok) által kifeszített paralelepipedon előjeles térfogata.

10. § Vektorszorzat

A vektorszorzás műveletét csak a három-dimenziós térben definiáljuk, és feltesszük, hogy a tér irányított. A vektorszorzásnál két, $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorhoz az $\underline{a} \times \underline{b}$ jellel jelölt vektort rendeljük, mégpedig a következő módon.

Ha az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok lineárisan függőek, akkor az $\underline{a} \times \underline{b}$ vektor definíció szerint a $\underline{0}$ vektor. Ha pedig függetlenek, akkor vegyünk ezeknek közös P kezdőpontu (PQ) és (PR) reprezentánsát, és az ezek által kifeszített paralelogramma területét jelölje $T(\underline{a} \underline{b})$. Legyen továbbá



$m \underline{a} \underline{b}$ az az egyértelműen meghatározott egységvektor, amelyik merőleges az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorokra, és az $\underline{a}, \underline{b}, m \underline{a} \underline{b}$ rendszer jobbsodrású bázist alkot. Ebben az esetben az $\underline{a} \times \underline{b}$ vektor definíció szerint az

$$(4.10.1) \quad \underline{a} \times \underline{b} := T(\underline{a} \underline{b}) m \underline{a} \underline{b}$$

vektor. Ha a P, Q, R pontok síkját úgy irányítjuk, hogy benne az $(\underline{a}, \underline{b})$ rendszer jobbsodrású bázis legyen, akkor a vektorszorzatnak az

$$(4.10.2) \quad \underline{a} \times \underline{b} = F(\underline{a} \underline{b}) m \underline{a} \underline{b} = |\underline{a}| |\underline{b}| \sin \angle(\underline{a} \underline{b}) m \underline{a} \underline{b}$$

formulájához jutunk.

A vektorszorzat igen szoros kapcsolatban áll a térfogatformával.

Ugyanis minden $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ vektorra érvényes az

$$(4.10.3) \quad (\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}) = (\underline{a} \times \underline{b}, \underline{c})$$

azonosság. Ennek bizonyításához csak azt kell észrevennünk, hogy az $(m \underline{a} \underline{b}, \underline{c})$ belsőszorzat nem más, mint az $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ vektorok közös kezdőpontu reprezentánsai által kifeszített paralelepipedonnak az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok által meghatározott oldallapjára merőleges magassága. Mégpedig ez előjelesen értendő, vagyis ez a magasság pozitív előjelű, ha az $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ jobbsodrású és negatív előjelű, ha balsodrású.

Éppen ez utóbbi képlet miatt a térfogatformát vegyesszorzatnak is nevezik, mert a jobboldal szerint a forma a két szorzásműveletből (belső- és vektorszorzásból) épül fel.

4.10.1. | A vektorszorzat antiszimmetrikus, homogén és az összeadásra nézve disztributív művelet, vagyis minden $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ vektorra érvényesek a következő azonosságok.

$$\begin{aligned}
 \underline{a} \times \underline{b} &= -\underline{b} \times \underline{a}, \\
 (\lambda \underline{a}) \times \underline{b} &= \lambda (\underline{a} \times \underline{b}), \quad \lambda \in \mathbb{R}, \\
 (4.10.4) \quad \underline{a} \times (\lambda \underline{b}) &= \lambda (\underline{a} \times \underline{b}), \quad \lambda \in \mathbb{R}, \\
 (\underline{a} + \underline{b}) \times \underline{c} &= \underline{a} \times \underline{c} + \underline{b} \times \underline{c}, \\
 \underline{a} \times (\underline{b} + \underline{c}) &= \underline{a} \times \underline{b} + \underline{a} \times \underline{c}.
 \end{aligned}$$

Bizonyítás. Az első azonosság az $m_{\underline{ab}} = -m_{\underline{ba}}$ felcserélési szabályból adódik, a második és harmadik egyenlőség pedig az $F(\underline{a} \times \underline{b})$ területforma homogén tulajdonságának a következménye. Végül az utolsó két azonosság pedig a térfogatforma additív tulajdonságból adódik, hiszen minden $\underline{d}$ vektorra

$$\begin{aligned}
 ((\underline{a} + \underline{b}) \times \underline{c}, \underline{d}) &= (\underline{a} + \underline{b}, \underline{c} \times \underline{d}) = (\underline{a}, \underline{c} \times \underline{d}) + (\underline{b}, \underline{c} \times \underline{d}) = (\underline{a} \times \underline{c}, \underline{d}) + (\underline{b} \times \underline{c}, \underline{d}) = \\
 &= (\underline{a} \times \underline{c} + \underline{b} \times \underline{c}, \underline{d}).
 \end{aligned}$$

Mivel az első és utolsó tag közötti egyenlőség minden $\underline{d}$ vektorra érvényes, ezért az $(\underline{a} + \underline{b}) \times \underline{c} = \underline{a} \times \underline{c} + \underline{b} \times \underline{c}$ disztributív tulajdonságot is igazoltuk. Hasonlóan bizonyíthatjuk a tétel utolsó azonosságát is, de az előző disztributív tulajdonságból és az antiszimmetriából azonnal következik. $\square$

Tekintsünk a térben egy $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ jobbsodrású ortonormált bázist, és fejtsük ki az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorokat ebben a bázisban az

$$\underline{a} = \sum_{i=1}^3 a^i \underline{e}_i, \quad \underline{b} = \sum_{i=1}^3 b^i \underline{e}_i$$

alakban. A térfogatformánál bizonyított formulák alapján a következőket írhatjuk.

$$(\underline{a} \times \underline{b}, \underline{e}_1) = (\underline{a}, \underline{b}, \underline{e}_1) = \begin{vmatrix} a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2 & a^3 \\ b^2 & b^3 \end{vmatrix},$$

és hasonlóan a többire

$$(\underline{a} \times \underline{b}, \underline{e}_2) = - \begin{vmatrix} a^1 & a^3 \\ b^1 & b^3 \end{vmatrix}, \quad (\underline{a} \times \underline{b}, \underline{e}_3) = \begin{vmatrix} a^1 & a^2 \\ b^1 & b^2 \end{vmatrix}.$$

Ezért az $\underline{a} \times \underline{b}$ szakaszt a következő formális determináns segítségével írható fel:

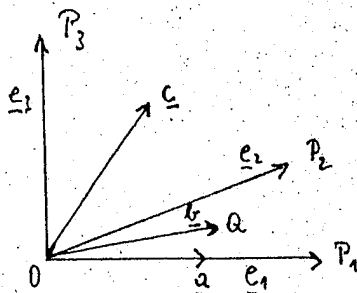
$$(4.10.5) \quad \underline{a} \times \underline{b} = \begin{vmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3 \\ a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \end{vmatrix}.$$

A következő tételt kifejtési tételnek nevezik.

4.10.2. Minden $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ vektorra:

$$(4.10.6) \quad (\underline{a} \times \underline{b}) \times \underline{c} = (\underline{a}, \underline{c}) \underline{b} - (\underline{b}, \underline{c}) \underline{a}.$$

Bizonyítás. Ha az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok lineárisan függőek, akkor a fenti azonosság triviálisan teljesül. Ezért tegyük fel, hogy az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok lineárisan függetlenek, és olyan jobbsodrású ortonormált $\underline{e}_1 = \underline{OP}_1$, $\underline{e}_2 = \underline{OP}_2$, $\underline{e}_3 = \underline{OP}_3$ bázist tekintsünk, amelyre az $\underline{e}_1$ az $\underline{a}$ irányába mutasson, valamint a $\underline{b} = \underline{OQ}$ vektorhoz a Q pont az O, P_1, P_2 pontok síkjára illeszkedjék. Az



$$\underline{a} = a^1 \underline{e}_1, \quad \underline{b} = b^1 \underline{e}_1 + b^2 \underline{e}_2, \quad \underline{c} = c^1 \underline{e}_1 + c^2 \underline{e}_2 + c^3 \underline{e}_3$$

kifejtésekből és a (4.10.5) formulából

$$\underline{a} \times \underline{b} = a^1 b^2 \underline{e}_3,$$

és így

$$(\underline{a} \times \underline{b}) \times \underline{c} = c^1 a^1 b^2 \underline{e}_1 - c^2 a^1 b^2 \underline{e}_1 = c^1 a^1 \underline{b} - (c^1 b^1 + c^2 b^2) \underline{a} =$$

$$= (\underline{c}, \underline{a}) \underline{b} - (\underline{b}, \underline{c}) \underline{a} \text{ adódik, ami a (4.10.6) összefüggést igazolja. } \square$$

A következő összefüggést Jacobi azonosságnak nevezik.

4.10.3 Minden $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ vektorra

$$(4.10.7) \quad (\underline{a} \times \underline{b}) \times \underline{c} + (\underline{b} \times \underline{c}) \times \underline{a} + (\underline{c} \times \underline{a}) \times \underline{b} = 0.$$

Bizonyítás. Ha baloldalon a kifejtési tételből nyert formulákat írjuk, akkor az egyes tagok páronként kiejtik egymást, ami az azonosságot igazolja. □

A Jacobi azonosság baloldalát ciklikus összegnek nevezik, és a $\overline{\sigma}(\underline{a} \times \underline{b}) \times \underline{c}$ jellel is jelölik.

A Jacobi azonosságból igazolható, hogy a vektorszorzás nem asszociatív művelet. Ugyanis a Jacobi azonosságból

$$(\underline{a} \times \underline{b}) \times \underline{c} - \underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c}) = (\underline{a} \times \underline{b}) \times \underline{c} + (\underline{b} \times \underline{c}) \times \underline{a} = -(\underline{c} \times \underline{a}) \times \underline{b}$$

adódik, és a jobboldalon szereplő vektor általában nem a $\underline{0}$ vektor.

11. § Kvaterniók

A belső és vektorszorzás egyik alkalmazásaként a kvaterniókat tárgyaljuk.

Tekintsük az $(\alpha, \underline{a})$ párok halmazát, ahol $\alpha \in \mathbb{R}$ valós szám, és az $\underline{a}$ pedig térvektor. Ezeket a párokat kvaternióknak nevezzük. A kvaterniók között az összeadás és a valós számmal való szorzást az

$$(4.11.1) \quad \begin{aligned} (\alpha, \underline{a}) + (\beta, \underline{b}) &= (\alpha + \beta, \underline{a} + \underline{b}) \\ \lambda(\alpha, \underline{a}) &= (\lambda\alpha, \lambda\underline{a}) \end{aligned}$$

képletekkel definiáljuk.

Minden $(\alpha, \underline{a})$ kvaternió az

$$(\alpha, \underline{a}) = (\alpha, \underline{0}) + (0, \underline{a})$$

alakban írható, ezért a következő egyszerűsítő jelölés vezethető be.

Az $(\alpha, \underline{0})$ alakú elemeket az α jellel az $(0, \underline{a})$ alakú elemeket pedig az $\underline{a}$ jellel jelöljük. Így minden kvaternió egyértelműen az $\alpha + \underline{a}$ alakban írható.

A következő képletben a kvaterniók szorzását definiáljuk.

$$(4.11.2) \quad (\alpha + \underline{a})(\beta + \underline{b}) := \alpha\beta - (\underline{a}, \underline{b}) + \beta \underline{a} + \alpha \underline{b} + \underline{a} \times \underline{b}.$$

Algebrai módszerekkel igazolható, hogy a kvaterniók között ez az egyetlen olyan művelet, amelyik az összeadásra nézve disztributív, asszociatív és a $0 + 0$ zérus kvaterniótól különböző kvaterniók a szorzásra nézve csoportot alkotnak.

Mi csak annyit mutatunk meg, hogy a műveletek ezekkel a tulajdonságokkal valóban rendelkeznek.

A tétel bizonyítása előtt néhány fogalmat vezetünk be.

Az $\alpha + \underline{a}$ kvaternió abszolút értékén vagy normáján az

$$(4.11.3) \quad |\alpha + \underline{a}| := \sqrt{\alpha^2 + |\underline{a}|^2}$$

mennyiséget értjük. Ugyanennek a kvaterniónak a konjugáltja pedig az

$$\overline{\alpha + \underline{a}} := \alpha - \underline{a}$$

kvaternió. A konjugáltakra nézve könnyen adódik az

$$(4.11.4) \quad \begin{aligned} (\alpha + \underline{a})(\overline{\alpha + \underline{a}}) &= (\alpha + \underline{a})(\alpha - \underline{a}) = \alpha^2 + |\underline{a}|^2 + \alpha \underline{a} - \alpha \underline{a} + \underline{a} \times (-\underline{a}) = \\ &= \alpha^2 + |\underline{a}|^2 = |\alpha + \underline{a}|^2 \end{aligned}$$

azonosság.

Hasonlóan kapjuk az

$$(4.11.5) \quad \begin{aligned} \overline{(\alpha + \underline{a})(\beta + \underline{b})} &= \overline{\alpha\beta - \underline{a}\underline{b} + \beta \underline{a} + \alpha \underline{b} + \underline{a} \times \underline{b}} = \\ &= \alpha\beta - (\underline{a}, \underline{b}) - \beta \underline{a} - \alpha \underline{b} - \underline{a} \times \underline{b} = (\beta - \underline{b})(\alpha - \underline{a}) = \\ &= (\overline{\beta + \underline{b}})(\overline{\alpha + \underline{a}}) \end{aligned}$$

azonosságot is. Ebből az azonosságból pedig az

$$(4.11.6) \quad |(\alpha + \underline{a})(\beta + \underline{b})| = |\alpha + \underline{a}| |\beta + \underline{b}|$$

azonosság következik, ugyanis

$$\begin{aligned} |(\alpha + \underline{a})(\beta + \underline{b})|^2 &= (\alpha + \underline{a})(\beta + \underline{b})\overline{(\alpha + \underline{a})(\beta + \underline{b})} = \\ &= (\alpha + \underline{a})(\beta + \underline{b})(\overline{\beta + \underline{b}})(\overline{\alpha + \underline{a}}) = (\alpha + \underline{a})|\beta + \underline{b}|^2 \overline{(\alpha + \underline{a})} = \\ &= |\beta + \underline{b}|^2 |\alpha + \underline{a}|^2. \end{aligned}$$

Most pedig bebizonyítjuk, hogy a kvaterniók valóban rendelkeznek a korábban leírt tulajdonságokkal.

4.11.1. A kvaterniók az összeadásra nézve Abel csoportot alkotnak.

A szorzás asszociatív és az összeadásra nézve disztributív.

A zérustól különböző kvaterniók a szorzásra nézve nem-kommutatív csoportot alkotnak.

Bizonyítás. Először vegyük észre, hogy az összeadás asszociatív, kommutatív és invertálható, ahol a zérus elem szerepét a $0 + 0$ kvaternió játssza. Problematisusabb részleteket csak a szorzás művelete okoz.

A szorzás az összeadásra nézve mindkét oldalról disztributív. Mi csak a baloldaltól vett disztributivitást igazoljuk, mivel a másik oldalra nézve a bizonyításnál teljesen azonos módon kell eljárunk.

$$\begin{aligned} (\alpha + \underline{a})(\beta + \underline{b} + \gamma + \underline{c}) &= (\alpha + \underline{a})(\beta + \gamma + \underline{b} + \underline{c}) = \alpha(\beta + \gamma) - \\ &- \underline{a}(\underline{b} + \underline{c}) + (\beta + \gamma)\underline{a} + \alpha(\underline{b} + \underline{c}) + \underline{a} \times (\underline{b} + \underline{c}) = \alpha\beta - (\underline{a}, \underline{b}) + \\ &+ \beta\alpha + \alpha\gamma - (\underline{a}, \underline{c}) + \gamma\alpha + \alpha\underline{c} + \underline{a} \times \underline{c} = (\alpha + \underline{a})(\beta + \underline{b}) \\ &+ (\alpha + \underline{a})(\gamma + \underline{c}), \end{aligned}$$

ami állításunkat igazolja.

A definícióból azonnal látható, hogy a szorzás nem kommutatív. Viszont asszociatív, amit az alábbiakban bizonyítunk be.

$$\begin{aligned} ((\alpha + \underline{a})(\beta + \underline{b}))(\gamma + \underline{c}) &= (\alpha\beta - (\underline{a}, \underline{b}) + \beta\underline{a} + \alpha\underline{b} + \underline{a} \times \underline{b})(\gamma + \underline{c}) = \\ &= \alpha\beta\gamma - \gamma(\underline{a}, \underline{b}) - \beta(\underline{a}, \underline{c}) - \alpha(\underline{b}, \underline{c}) - (\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}) + \beta\gamma\underline{a} + \alpha\gamma\underline{b} + \alpha\beta\underline{c} - \\ &- (\underline{a}, \underline{b})\underline{c} + \gamma\underline{a} \times \underline{b} + \beta\underline{a} \times \underline{c} + \alpha\underline{b} \times \underline{c} + (\underline{a} \times \underline{b}) \times \underline{c}. \end{aligned}$$

Ha az $(\alpha + \underline{a})(\beta + \underline{b})(\gamma + \underline{c})$ szorzatot íránk ki hasonló képpen, akkor csak annyi változás történne, hogy a fenti $(\underline{a} \times \underline{b}) \times \underline{c} - (\underline{a}, \underline{b})\underline{c}$ tag helyett az $\underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c}) - (\underline{b}, \underline{c})\underline{a}$ tag állna, a többi pedig változatlanul ugyanugy szerepelne. De a kifejtési tételből

$$(\underline{a} \times \underline{b}) \times \underline{c} - (\underline{a}, \underline{b})\underline{c} = (\underline{a}, \underline{c})\underline{b} - (\underline{b}, \underline{c})\underline{a} - (\underline{a}, \underline{b})\underline{c} = \underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c}) - (\underline{b}, \underline{c})\underline{a},$$

adódik, tehát a szorzás valóban asszociatív művelet.

A tétel teljes bizonyításához már csak az invertálhatóságot kell igazolnunk. A szorzásra vonatkozó egységelem az 1 kvaternió. A (4.11.4) azonosságból pedig nyilvánvaló, hogy a zérustól különböző $\alpha + \underline{a}$ kvaternió inverze az

$$(4.11.7) \quad (\alpha + \underline{a})^{-1} = \frac{1}{|\alpha + \underline{a}|^2} \overline{(\alpha + \underline{a})}$$

kvaternió. Ezzel tételünket bebizonyítottuk. □

Ha a tér vektorai között egy $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ ortonormált bázist tekintünk, akkor a szorzás definíciójából a kvaterniókra vonatkozó következő szorzótáblát kapjuk:

$$(4.11.8) \quad \underline{i}^2 = -1, \quad \underline{j}^2 = -1, \quad \underline{k}^2 = -1$$

$$\underline{i} \underline{j} = \underline{k}, \quad \underline{j} \underline{i} = -\underline{k} \quad \underline{j} \underline{k} = \underline{i}, \quad \underline{k} \underline{j} = -\underline{i}$$

$$\underline{k} \underline{i} = \underline{j} \quad \underline{i} \underline{k} = -\underline{j}.$$

Ebből speciálisan az is látható, hogy az $\alpha + \beta \underline{i}$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$) alakú kvaterniók közül egyik művelet sem vezet ki. Ezt a részhalmazt a benne definiált műveletekkel (összeadás, szorzás) együtt komplex számtestnek nevezzük.

A következő fejtegetésekben a tér izometrikus leképezéseit kvaterniószorzás segítségével fejezzük ki. Az ide vonatkozó tételek előkészítéséhez tekintsünk egy tetszőleges $\underline{a} = 0 + \underline{a}$ vektor-szerű kvaterniót, és legyen $y = \beta + \underline{b}$ tetszőleges másik kvaternió. Megmutatjuk, hogy az $y^{-1} \underline{a} y$ kvaternió is vektorszerű.

Ez az állítás azonnal kiolvasható az alábbi azonosságokból:

$$y^{-1} \underline{a} y = y^{-1} (-(\underline{a}, \underline{b}) + \beta \underline{a} + \underline{a} \times \underline{b}) = \frac{1}{\beta^2 + |\underline{b}|^2} ((\beta^2 - |\underline{b}|^2) \underline{a} +$$

$$+ 2(\underline{a}, \underline{b}) \underline{b} + 2 \beta \underline{a} \times \underline{b}).$$

Rögzítsünk le a térben egy O origót, és a tér pontjait azonosítsuk az origóra vonatkozó helyvektorokkal. Ezek után rögzített y kvaternió esetén a

$$(4.11.9) \quad \rho : \underline{a} \longrightarrow y^{-1} \underline{a} y$$

leképezést a térben ható leképezésnek tekintjük.

4.11.2. Minden $y \neq 0$ kvaternióra a

$$(4.11.9) \quad \rho : \underline{a} \longrightarrow y^{-1} \underline{a} y$$

leképezés irányítástartó izometria (mozgás), amelyik az origót fixen hagyja.

Bizonyítás. A ρ leképezésnél az origó nyilván helyben marad. A további részletek igazolásához először azt mutatjuk meg, hogy a ρ leképezés transzformáció.

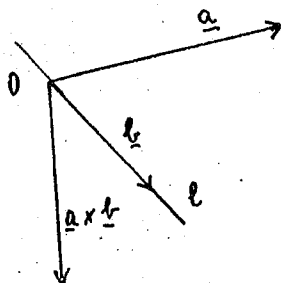
A ρ különböző pontokhoz különböző pontokat rendel, mert ha az $\underline{a}$ és $\underline{a}'$ pontokra

$$y^{-1} \underline{a} y = y^{-1} \underline{a}' y$$

azonosság áll, akkor ebből egyszerűsítéssel $\underline{a} = \underline{a}'$ is következik. A ρ ráképezés is, mert a $\underline{c}$ vektor ősképe az $y \underline{c} y^{-1}$ vektor.

Az $|y^{-1}| = 1/|y|$ felhasználásával adódik, hogy a ρ leképezés izometria. Ugyanis ha $\underline{x}_1$ és $\underline{x}_2$ két vektor, akkor

$$|y^{-1} \underline{x}_1 y - y^{-1} \underline{x}_2 y| = |y^{-1} (\underline{x}_1 - \underline{x}_2) y| = |y^{-1}| |\underline{x}_1 - \underline{x}_2| |y| = |\underline{x}_1 - \underline{x}_2|.$$



Már csak azt kell igazolnunk, hogy az izometria mozgás. Ennek bizonyításához először azt kell észrevennünk, hogy ha $y = \beta + \underline{b}$, és $\underline{b} = \underline{OP}$, akkor nemcsak az O pont, hanem az egész $OP = \underline{l}$ egyenes is fix a

izometriánál, hiszen

$$y^{-1} \underline{b} y = \frac{1}{\beta^2 + |\underline{b}|^2} ((\beta^2 - |\underline{b}|^2) \underline{b} + 2[\underline{b}]^2 \underline{b}) = \underline{b}.$$

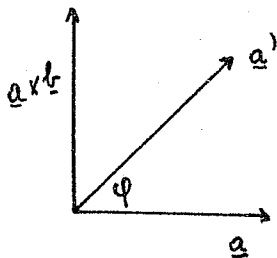
Ezért az izometria vagy az l tengely körüli forgás, vagy pedig olyan síkra vonatkozó tükrözés, amelyik az l tengelyt tartalmazza. Most az utóbbi esetet zárjuk ki.

Legyen $\underline{a}$ a $\underline{b}$ vektorra merőleges, egyébként tetszőleges egységvektor.

Ekkor az

$$\underline{a}' = \gamma^{-1} \underline{a} \gamma = \frac{1}{\beta^2 + |\underline{b}|^2} ((\beta^2 - |\underline{b}|^2) \underline{a} + 2 \beta \underline{a} \times \underline{b})$$

azonosságot kapjuk. Ebből azonnal látható, hogy az $\underline{a}$ és $\underline{a}'$ vektorok φ szögére



$$\cos \varphi = \frac{\beta^2 - |\underline{b}|^2}{\beta^2 + |\underline{b}|^2}, \quad \sin \varphi = \frac{2 \beta |\underline{b}|}{|\underline{b}|^2 + \beta^2}$$

adódik, és így

$$(4.11.10) \quad \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \frac{|\underline{b}|}{\beta} \text{ ha } \beta \neq 0 \text{ és}$$

$$\varphi = \pi, \text{ ha } \beta = 0.$$

Mivel a $\varphi = 2 \arctan |\underline{b}| / \beta$ szög konstans minden fenti $\underline{a}$ vektorra, ezért a ρ izometria csak az l tengely körüli φ szögű forgás lehet. $\square$

Megmutatjuk az előbbi tétel megfordítását is.

4.11.3 | A térben minden α izometriához létezik olyan egyértelműen meghatározott $\underline{c}$ vektor és konstans szorzó erejéig egyértelműen meghatározott γ kvaternió, hogy az α izometria vagy

$$\alpha(\underline{x}) = \gamma^{-1} \underline{x} \gamma + \underline{c},$$

vagy pedig

$$\alpha(\underline{x}) = -y^{-1} \underline{x} y + \underline{c}$$

alakban áll elő, annak megfelelően, hogy az α mozgás, vagy pedig irányítást fordító izometria

Bizonyítás Legyen az α tetszőleges mozgás, és tekintsük a $\underline{c} = 0 \alpha(0)$ vektort, valamint az $\alpha'(\underline{x}) = \alpha(\underline{x}) - \underline{c}$ mozgást. Az α' az 0 pontot fixen hagyja, ezért nem más, mint valamely t tengely körül, φ szögű forgás. Legyen $\underline{b}$ a t tengely irányába mutató egységvektor, valamint $\beta = 1 / \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$. Ekkor a (4.11.10) egyenletek alapján $\alpha'(\underline{x}) = y^{-1} \underline{x} y$, ahol $y = \beta + \underline{b}$, és így $\alpha(\underline{x}) = y^{-1} \underline{x} y + \underline{c}$ adódik, ami az első formulát igazolja.

A második formula igazolásához tekintsük az $\alpha'(\underline{x}) = -\alpha(\underline{x})$ izometriát. Mivel az α irányítást váltó, ezért az α' nyilván irányítást tartó, hiszen az α' az α -nak és egy centrális tükrözésnek /ami a térben irányítást fordít!/ szorzataként áll elő. Az előző állítás alapján $\alpha'(\underline{x}) = y^{-1} \underline{x} y + \underline{c}'$, és így $\alpha(\underline{x}) = -y^{-1} \underline{x} y + \underline{c}$, adódik, ahol $\underline{c} = -\underline{c}'$. Ez pedig a második formulát igazolja.

A tételben szereplő $\underline{c}$ vektor nyilván egyértelműen meghatározott. Még annyit mutatunk meg, hogy az y kvaternió csak konstans szorzó erejéig egyértelmű.

Azonnal látható, hogy az y és az $y' = \bar{\lambda} y$ kvaterniók ugyanazt a ρ izometriát indukálják.

Tegyük fel, hogy az y és y' kvaterniókra minden $\underline{x}$ vektor esetén $y^{-1} \underline{x} y = y'^{-1} \underline{x} y'$, vagyis átalakítva az

$$\underline{x} = (y' y^{-1})^{-1} \underline{x} (y' y^{-1})$$

azonosság teljesül. Csak annyit kell belátnunk, hogy ekkor
 $z = y' y^{-1}$ kvaternió valamely β skalárral egyenlő.

Ha $z = \beta + \underline{b}$, és $\underline{x}$ a $\underline{b}$ vektorra merőleges tet-
 szőleges vektor, akkor az

$$\underline{x} = z^{-1} \underline{x} \quad z = \frac{1}{\beta^2 + |\underline{b}|^2} ((\beta^2 - |\underline{b}|^2) \underline{x} + 2\beta \underline{x} \times \underline{b})$$

egyenletből együtthatóösszehasonlítással a $|\underline{b}|^2 = 0$

vagyis a $\underline{b} = \underline{0}$ azonosság adódik. Tehát $y y^{-1} = \beta$,

vagyis $y' = \beta y$. Ezzel a tétel bizonyítását befejeztük. $\square$

12. § Háromszögek és tetraéderek nevezetes pontjai

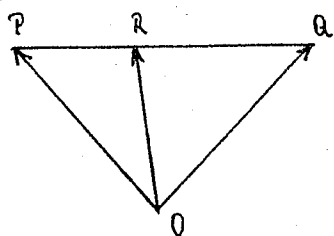
Korábban megmutattuk, hogy a háromszögekben a magasság-
 vonalak, a szögfelező és az oldalflező merőlegesek rendre
 közös pontra illeszkednek. Most a súlyvonalakra bizonyítunk
 egy hasonló állítást.

Mindenek előtt egy egyszerű állítást igazolunk.

4.12.1 Ha valamely R pont egy $\overline{PQ}$ szakaszt $\mu : \lambda$
 /ahol $\mu, \lambda > 0$ / arányban oszt, akkor tetszőleges
 O pontra vonatkozóan az R helyvektora az
 (4.12.1)
$$\underline{OR} = \frac{\lambda \underline{OP} + \mu \underline{OQ}}{\lambda + \mu}$$

 vektor.

Bizonyítás Az $\underline{OP} - \underline{OR} = \underline{RP}$ és az $\underline{OQ} - \underline{OR} = \underline{RQ}$ vektorok
 párhuzamosak, és az osztás aránya miatt



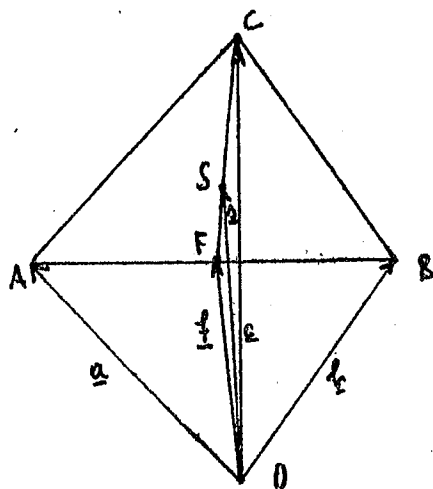
$$\lambda (\underline{OP} - \underline{OR}) = -\mu (\underline{OQ} - \underline{OR})$$

teljesül. Ebből az $\underline{OR}$ vektort kifejezve
 a (4.12.1) adódik. $\square$

A háromszögek súlyvonalait a csucsokat a szemköztes oldal felezőpontjával összekötő szakaszokként definiáljuk.

4.12.2 | A háromszögek súlyvonalai közös pontra illeszkednek. Ez a pont a súlyvonalakat harmadolja.

Bizonyítás Az ABC háromszög csucsainak valamely O pontra vonatkozó helyvektorait jelöljük az $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ jelekkel.



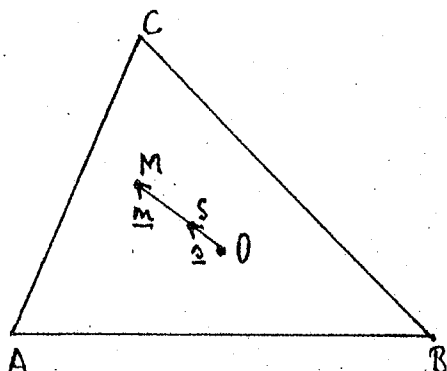
Az előbb bizonyított állítás alapján az $\overline{AB}$ szakasz F felezőpontjának $\underline{f}$ helyvektora az $\underline{f} = \frac{1}{2} (\underline{a} + \underline{b})$, vektor, valamint a $\overline{CF}$ szakasz F ponthoz közelebb eső S harmadolópontjának $\underline{s}$ helyvektora az

$$(4.12.2) \quad \underline{s} = \frac{2\underline{f} + \underline{c}}{1 + 2} = \frac{1}{3} (\underline{a} + \underline{b} + \underline{c}).$$

A másik két súlyvonalra is a harmadolópontokat kiszámítva az előbbi formulához jutunk. Tehát a súlyvonalak harmadolópontjai egybeesnek, ami az állítást bizonyítja. $\square$

4.12.3 | A háromszög M magasságpontja, S súlypontja és körülírt körének O középpontja közös egyenesre, az u.n. Euler egyenesre illeszkednek. Az S pont harmadolja az $\overline{OM}$ szakaszt, és az O ponthoz esik közelebb.

Bizonyítás



Az origót helyezzük az O pontba, és a háromszög csúcsainak helyvektorai legyenek az $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ vektorok. Ekkor a súlypont $\underline{s}$ helyvektora az

$$\underline{s} = \frac{1}{3} (\underline{a} + \underline{b} + \underline{c})$$

vektor, és azt kell megmutatnunk, hogy az $\underline{m} := 3 \underline{s} = (\underline{a} + \underline{b} + \underline{c})$ vektor az M magasságpontba mutat.

Ha $\underline{m} = \underline{OM'}$, akkor az $M = M'$ azonosságot, vagyis azt kell belátnunk, hogy az $\underline{AM'}$, $\underline{BM'}$, $\underline{CM'}$ vektorok rendre a $\underline{BC}$, $\underline{CA}$, $\underline{AB}$ vektorokra merőlegesek. Csak az $\underline{AB}$ és $\underline{CM'}$ merőlegességét igazoljuk, mivel a többi esetben hasonlóan kell eljárni.

Az ábra alapján

$$\underline{CM} = \underline{m} - \underline{c} = \underline{a} + \underline{b}, \quad \underline{AB} = \underline{b} - \underline{a},$$

amiből az $|\underline{a}| = |\underline{b}|$ miatt

$$(\underline{CM}, \underline{AB}) = (\underline{a} + \underline{b}, \underline{b} - \underline{a}) = -|\underline{a}|^2 + |\underline{b}|^2 = 0.$$

adódik. Ezzel a tételt bebizonyítottuk. □

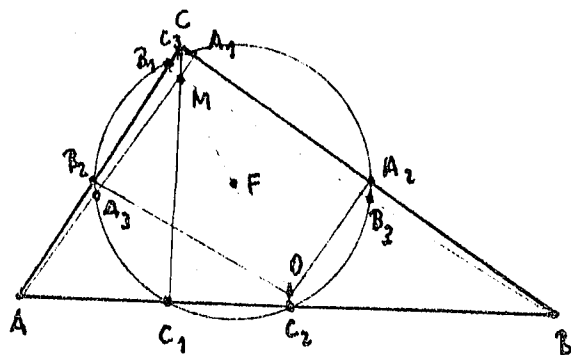
A háromszög nevezetes pontjaira vonatkozóan egy további érdekes összefüggést Feuerbach tétele állapít meg.

Az ABC háromszögben jelölje A_1, B_1, C_1 a megfelelő magasságvonalak talppontjait, A_2, B_2, C_2 a megfelelő oldalfelező pontokat, valamint A_3, B_3, C_3 a csúcokat

az M magasságponttal összekötő szakaszok felezőpontjait. Az O továbbra is a körülírt kör középpontját jelöli.

4.12.4 Az A_i, B_i, C_i , $i=1;2;3$, pontok közös körre, az u.n. Feuerbach féle körre illeszkednek. Ennek a körnek a középpontja az $\overline{OM}$ szakasz felezőpontja, sugara pedig a körülírt kör sugarának a fele.

Bizonyítás



Jelölje F az $\overline{OM}$ szakasz felezőpontját, és az origót helyezzük ismét az O pontra. Ha a csucok helyvektorai ismét az $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ vektorok, akkor az előző tétel bizonyításából az

$$\underline{OF} = \frac{1}{2} \underline{OM} = \frac{1}{2} (\underline{a} + \underline{b} + \underline{c}),$$

$$\begin{aligned} \underline{FC}_2 &= \underline{FO} + \underline{OC}_2 = -\frac{1}{2} (\underline{a} + \underline{b} + \underline{c}) + \frac{1}{2} (\underline{a} + \underline{b}) = \\ &= -\frac{1}{2} \underline{c}, \end{aligned}$$

$$\underline{FC}_3 = \frac{1}{2} \underline{c}$$

azonosságok adódnak, ahol az utolsó azonosságot abból kapjuk, hogy az $\overline{FC}_3$ szakasz az OMC háromszög középvonala.

Az utolsó két azonosságból azonnal következik, hogy az F pont felezi a $\overline{C_3C_2}$ szakaszt, és $|\underline{FC}_3| = |\underline{FC}_2| = r/2$,

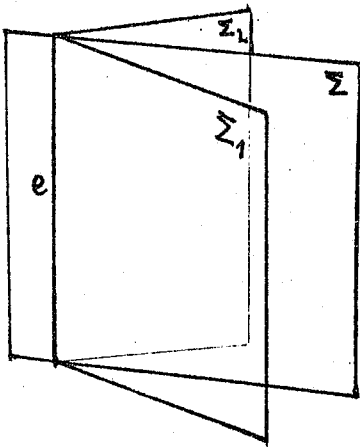
ahol r a körülírt kör sugara. De a $C_3C_1C_2$ szög derékszög, ezért Thales tétele szerint a C_1 pont a C_2, C_3 pontokkal együtt az F középpontu $r/2$ sugaru körre

illeszkedik.

Az A_i és B_i pontokra vonatkozóan az állítás hasonlóan igazolható, amivel a bizonyítást befejeztük. $\square$

A tetraéderek nevezetes pontjainak vizsgálatára térünk át.

Közös e határoló egyenessel rendelkező Σ_1, Σ_2 félsíkok szögfelező síkján azt az egyértelműen meghatározott Σ síkot értjük, amelyre vonatkozó tükrözés a két félsíkot egymással felcseréli.



Ez a sík az e egyenesre illeszkedik, és az is látható, hogy az egyik e -vel határolt félsíkja pontosan azoknak a pontoknak a halmaza, amelyekből a Σ_1, Σ_2 félsíkokra bocsájtott merőleges szakaszok talppontjai a Σ_1, Σ_2 félsíkokra esnek, és a két szakasz

hossza megegyezik. Ezt a félsíkot belső szögfelező síknak nevezzük.

4.12.5 | A tetraéder lapjainak belső szögfelező síkjai közös pontra illeszkednek.

Bizonyítás Két belső szögfelező sík félegyenesben metszi egymást, ami egy harmadik belső szögfelező síkot egyetlen pontban metsz. Könnyen belátható, hogy ez a pont minden lap-tól azonos távolságra helyezkedik el, ezért minden belső

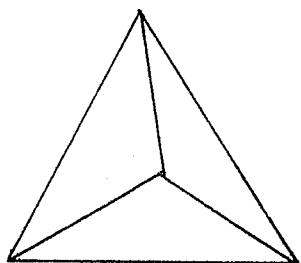
szögfelezőre illeszkedik, sőt ez a pont a belső szögfelezők egyetlen közös pontja. □

A tetraédernek a fenti tételben meghatározott pontja nem más, mint a tetraéderbe írható érintő gömb középpontja.

4.12.6 | A tetraéder éleit felező merőleges síkok közös pontra illeszkednek.

Bizonyítás

Vegyük a tetraéder egyik oldallapját. Ennek a háromszögnek két tetszőleges oldalát felező merőleges síkok egyenesben metszik egymást. Erre az egyenesre a harmadik oldal fele-



ző merőleges síkja is illeszkedik, mivel ennek az egyenesnek a pontjaitól a háromszög csúcsai azonos távolságra vannak. Egy negyedik oldalfelező merőleges sík ezt az egyenest egyetlen pontban metszi, amelyik a tetraéder mindegyik csúcsától azonos távolságra helyezkedik el. Ezért ezen a ponton az összes oldalfelező merőleges sík áthalad, és ez a síkok egyetlen közös pontja. □

Ebben a tételben meghatározott pont a tetraéder csúcsaira illeszkedő körülírt gömb középpontja.

A tetraéder súlyvonalait a csúcsokat a szemköztes háromszög-lap súlypontjával összekötő szakaszokként definiáljuk.

4.12.7 | A tetraéder súlyvonalai közös pontra illeszkednek.

| Ez a pont a súlyvonalakat negyedeli.

Bizonyítás Ha a csucsk valamely origóra vonatkozó helyvektorait $\underline{x}$, $\underline{y}$, $\underline{z}$, $\underline{v}$ jelöli, akkor könnyen belátható, hogy az

$$\frac{1}{4} (\underline{x} + \underline{y} + \underline{z} + \underline{v}) = \frac{3 \frac{\underline{x} + \underline{y} + \underline{z}}{3} + \underline{v}}{3 + 1}$$

helyvektoru pont minden súlyvonalra illeszkedik. Ez pedig az állítást igazolja. □

Végül megjegyezzük, hogy a tetraéder magasságvonalai általában nem illeszkednek közös pontra, ezért a tetraéderek magasságpontja általában nem definiálható.

13. § n -dimenziós euklideszi terek

Az általános n -dimenziós euklideszi tereket nem az előző fejezetben látott szintetikus axiómákkal, hanem analitikus módszerrel vezetjük be. Azonban ez a felépítés is axiomatikusnak mondható, ezért meg kell mutatnunk a két felépítés ekvivalenciáját.

Valós vektortéren olyan halmazt értünk, amelyben két művelet definiált, az összeadás és a valós számokkal való szorzás, és ezekre a következő tulajdonságok érvényesek.

A halmaz az összeadásra nézve Abel csoportot alkot, a valós számokkal való szorzásra pedig az alábbiak teljesülnek:

$$\begin{aligned}
 0 \cdot \underline{x} &= \underline{0} , \\
 1 \cdot \underline{x} &= \underline{x} , \\
 (\alpha \beta) \underline{x} &= \alpha (\beta \underline{x}) , \\
 (\alpha + \beta) \underline{x} &= \alpha \underline{x} + \beta \underline{x} , \\
 \alpha (\underline{x} + \underline{y}) &= \alpha \underline{x} + \alpha \underline{y} .
 \end{aligned}
 \tag{4.13.1}$$

A fenti egyenletekben az $\underline{x}$, $\underline{y}$ vektorokat, az α , valós számokat, a $\underline{0}$ pedig az Abel csoport egységelemét jelöli, és zérus vektornak nevezzük.

A

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i \underline{a}_i , \quad \lambda_i \in \mathbb{R} ,$$

alakú kifejezést lineáris kombinációnak nevezzük. A kombinációt triviálisnak mondjuk, ha minden λ_i együtthatója nulla, és nem-triviálisnak nevezzük, ha az együtthatók között létezik nullától különböző is. Az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_m$ vektorokat lineárisan függetlennek nevezzük, ha egyik vektor sem fejezhető ki a többi lineáris kombinációjaként, vagy - ami ezzel ekvivalens - a $\underline{0}$ vektor ezekből a vektorokból csak triviális lineáris kombinációval állítható elő. Az

$\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n$ vektorrendszert bázisnak mondjuk, ha lineárisan függetlenek, és belőlük minden vektor lineáris kombinációként előállítható.

A vektorteret véges dimenziósnak nevezzük, ha benne véges sok elemből álló bázis létezik.

Algebrai eszközökkel megmutatható, /ld. Kuros: Felsőbb algebra/ hogy ebben az esetben a báziselemek száma egyértelműen meghatározott. Ezt a számot a vektortér dimenziójának nevezzük.

Az n -dimenziós vektortereket A^n jellel jelöljük.

Az n -dimenziós vektorterekben a különböző dimenziós affin alterek is definiálhatók.

Ha az $\underline{a}_0$ tetszőleges vektor az $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k$ pedig lineárisan független vektorok, akkor az

$$(4.13.2) \quad \underline{a}_0 + \sum_{i=1}^k x^i \underline{a}_i, \quad x^i \in \mathbb{R}$$

alakban előállítható vektorok halmazát k -dimenziós altér-nek nevezzük. Az $(n-1)$ -dimenziós altereket hipertereknek, az 1 -dimenziós altereket pedig egyeneseknek mondjuk. Az egyeneseket a következőkben az

$$(4.13.3) \quad \underline{x} + t \underline{y}$$

alakban írjuk, és mindig kosszáértjük a $\underline{y} \neq \underline{0}$ és $-\infty < t < \infty$ feltételeket. Ezt az alakot az egyenes paraméteres alakjá-nak nevezik.

Az $A^n \times A^n$ Descartes szorzaton értelmezett

$\omega: A^n \times A^n \rightarrow \mathbb{R}$ valós függvényeket az $\omega(\underline{x}, \underline{y})$ alakban írhatjuk. Az ω függvény bilineárisnak mondjuk, ha mindkét komponensében homogén és additív. Az ω bilineáris formát szimmetrikusnak nevezzük, ha minden $\underline{x}, \underline{y}$ vektorra

$$(4.13.4) \quad \omega(\underline{x}, \underline{y}) = \omega(\underline{y}, \underline{x})$$

teljesül, és egy szimmetrikus bilineáris formát pozitív definitnek mondunk, ha minden $\underline{x} \neq \underline{0}$ vektorra

$$(4.13.5) \quad \omega(\underline{x}, \underline{x}) > 0$$

érvényes.

Minden A^n vektortérhez létezik pozitív definit szimmetrikus bilineáris forma.

Ugyanis, ha $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ a tér tetszőleges bázisa, és ebben az $\underline{x}, \underline{y}$ vektorokat az

$$\underline{x} = \sum x^i \underline{a}_i, \quad \underline{y} = \sum y^i \underline{a}_i$$

alakban fejtük ki, akkor az

$$(4.13.6) \quad \omega(\underline{x}, \underline{y}) := \sum_{i=1}^n x^i y^i$$

képlettel definiált függvény nyilvánvalóan szimmetrikus, pozitív definit bilineáris forma.

A konstrukcióból látható, hogy minden valós vektortérhez végtelen sok, egymástól különböző ilyen forma létezik.

Ha az A^n vektortér pozitív definit szimmetrikus bilineáris formái közül egy $(\underline{x}, \underline{y})$ formát kitüntetünk, akkor az $\{A^n, (,)\}$ rendszert euklideszi térnek, pontosabban kipontozott euklideszi térnek nevezzük.

A kitüntetett origó /zérus elem/ miatt a vektor és a pont fogalmakat azonos értelemben használjuk. Az $(\underline{x}, \underline{x})$ formát pedig belsőszorzatnak nevezzük.

Az euklideszi térben valamely $\underline{x}$ vektor abszolút értékét az

$$(4.13.7) \quad |\underline{x}| := \sqrt{(\underline{x}, \underline{x})}$$

számmal, két $\underline{x}, \underline{y}$ pont távolságát pedig az

$$(4.13.8) \quad |\underline{x} - \underline{y}| := |\underline{x} - \underline{y}|$$

számmal definiáljuk.

A belsőszorzatra a következő u.n. Minkowski egyenlőtlenség érvényes.

4.13.1 Minden $\underline{x}, \underline{y}$ vektorra az

$$(4.13.9) \quad |(\underline{x}, \underline{y})| \leq |\underline{x}| |\underline{y}|$$

egyenlőtlenség teljesül, amelynél az egyenlőség pontosan akkor áll, ha a két vektor lineárisan függő.

Bizonyítás Ha valamelyik vektor a $\underline{0}$ vektor, akkor a fenti képletben egyenlőség áll. Ezért tegyük fel, hogy az $\underline{x}, \underline{y}$ vektorok egyike sem tűnik el. Minden t valós számra

$$(\underline{x} - t \underline{y}, \underline{x} - t \underline{y}) = |\underline{y}|^2 t^2 - 2t (\underline{x}, \underline{y}) + |\underline{x}|^2 \geq 0$$

teljesül, és egyenlőség csak akkor állhat, ha $\underline{x} = t \underline{y}$ érvényes. Ez annyit jelent, hogy az

$$|\underline{y}|^2 t^2 - 2 (\underline{x}, \underline{y}) t + |\underline{x}|^2 = 0,$$

a t -re nézve másodfoku egyenletnek vagy nincs valós megoldása, vagy egy valós megoldása létezik. Ezért a D diszkriminánusra

$$D = 4 (\underline{x}, \underline{y})^2 - 4 |\underline{x}|^2 |\underline{y}|^2 \leq 0$$

adódik, ami a Minkowski egyenlőtlenséggel ekvivalens. Mivel a $D = 0$ egyenlőség pontosan az $\underline{x} = t \underline{y}$ esetben áll, így az állítás második felét is beláttuk. $\square$

A következőkben megmutatjuk, hogy a két- és háromdimenziós euklideszi terek szintetikus axiómákkal történő felépítése ekvivalens a fent közölt analitikus felépítéssel.

Korábban láttuk, hogy a szintetikus axiómákból levezetett vektorok valóban megfelelő dimenziós valós vektorteret alkotnak, és origó kitüntetésével a pontok a vektorokkal azonosíthatók. A vektorok között olyan belsőszorzatot

is levezettünk, hogy a pontoknak a vektorokkal való azonosítása után a pontok távolságát az

$$|\underline{x}, \underline{y}| = \sqrt{(\underline{x} - \underline{y}, \underline{x} - \underline{y})}$$

képlet adja.

Ezért csak annyit kell belátnunk, hogy a belsőszorzattal ellátott két- és háromdimenziós vektorterekben a bennük definiált egyenesekre, síkokra és a metrikára a szintetikus axiómákban megfogalmazott tulajdonságok érvényesek.

Itt csak a sík esetével foglalkozunk, mert a tér vizsgálatánál hasonlóan kell eljárunk.

Tekintsünk tehát egy két dimenziós, belsőszorzattal ellátott valós vektorteret, amelyben az egyeneseket és a metrikát a korábban leírt módon értelmezzük.

Nyilvánvaló, hogy végtelen sok egyenes létezik, és minden egyenesre végtelen sok pont illeszkedik, ezért a vektorsík egyenesekre az I₁ axióma valóban érvényes állítás.

Ha $\underline{x}$ és $\underline{y}$ két különböző pont, akkor rájuk egy és csak egy egyenes illeszkedik, mégpedig az

$$(4.13.10) \quad \underline{y} + t(\underline{x} - \underline{y}) = t \underline{x} + (1 - t)\underline{y}$$

egyenes. Ezzel az I₂ axióma teljesülését is megmutattuk.

Tekintsük az $\underline{r} + t \underline{v}$ egyenest és az $\underline{r}^*$ pontot. Ha a $\underline{v}^* \neq 0$ vektor a $\underline{v}$ vektortól lineárisan függ, akkor az $\underline{r} + t \underline{v}$ és az $\underline{r}^* + t \underline{v}^*$ egyenseknek vagy minden pontjuk közös, vagy pedig nincs közös pontjuk, annak megfelelően, hogy az $\underline{r}^*$ az $\underline{r} + t \underline{v}$ egyenesre illeszkedik vagy nem illeszkedik. Ha pedig a $\underline{v}, \underline{v}^*$ vektorok lineárisan függetlenek,

akkor ezek bázist alkotván, az $\underline{r} - \underline{r}^*$ egyértelműen az

$$\underline{r} - \underline{r}^* = -\tilde{t} \underline{v} + \tilde{t}^* \underline{v}^*$$

alakban írható. Nyilvánvaló, hogy ekkor az $\underline{r} + t \underline{v}$ és az $\underline{r}^* + t \underline{v}^*$ egyenesek egyetlen közös pontja az $\underline{r} + \tilde{t} \underline{v} = \underline{r}^* + \tilde{t}^* \underline{v}^*$ pont. Ezzel megmutattuk, hogy a vektorsíkon a párhuzamossági axióma is érvényes.

A rendezési axiómák vizsgálatához tekintsük az $\underline{r} + t \underline{v}$ egyenest. Ennek minden $\underline{x}$ pontjához rendeljük hozzá azt a $t(\underline{x})$ valós számot, amelyre $\underline{x} = \underline{r} + t(\underline{x}) \underline{v}$ teljesül. Az egyenes két $\underline{x}, \underline{y}$ pontjára az $\underline{x} \leq \underline{y}$ reláció definíció szerint akkor teljesül, ha $t(\underline{x}) \leq t(\underline{y})$ érvényes. Könnyen megmutatható, hogy ez a reláció teljes rendezés, amelynek inverzét úgy kapjuk, hogy az előbb leírt eljárásnál az egyenes $\underline{x} = \underline{r} - t(\underline{x}) \underline{v}$ előállításából indulunk ki. Az is könnyen megmutatható, hogy az egyenes másik $\underline{r}^* + t^* \underline{v}^*$ előállításából nyert $t^*(\underline{x})$ paraméterezésre

$$t^*(\underline{x}) = a t(\underline{x}) + b, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0,$$

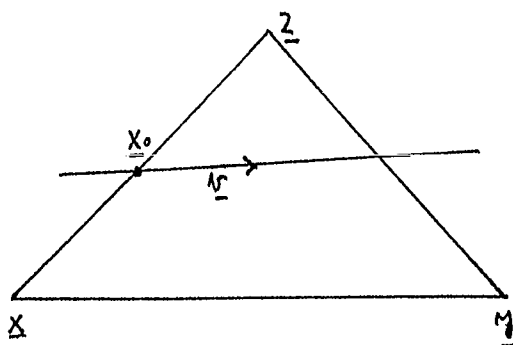
lineáris összefüggés érvényes, ezért az egyeneseken definiált két rendezés az egyenes előállításától függetlenül egyértelműen meghatározottak.

Mint az első fejezetben láttuk, a rendezésből a szakasz-főfogalom már bevezethető. A (4.13.10) előállításból triviálisan adódik, hogy az $\underline{x}, \underline{y}$ pontokat összekötő szakasz pontjait a

$$(4.13.12) \quad t \underline{x} + (1 - t) \underline{y}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

pontok alkotják.

A következőkben a Pasch axióma teljesülését mutatjuk meg.



Tekintsük az $\underline{x}$, $\underline{y}$, $\underline{z}$ háromszöget, és ennek $\overline{\underline{x}\underline{z}}$ oldala $\underline{x}_0$ belső pontján át olyan $\underline{x}_0 + t \underline{v}$ egyenest, amelyik a háromszög egyetlen csúcsára sem illeszkedik. Megmutatjuk, hogy ez az egyenes pontosan még

egy másik oldalt is metsz. Az $\underline{y} - \underline{x}$ és a $\underline{z} - \underline{x}$ vektorok bázist alkotnak, ezért a $\underline{v}$ vektor

$$\underline{v} = v^1 (\underline{y} - \underline{x}) + v^2 (\underline{z} - \underline{x})$$

alakban írható. Világos, hogy $v^1 \neq 0$, mert ellenkező esetben az egyenes áthaladna a z csúcson. Feltéhető, hogy $v^1 > 0$ érvényes, mert ha v^1 negatív lenne, akkor az egyenes paraméteres alakjában csak a $-\underline{v}$ vektorra kellene áttérnünk. Mivel az $\underline{x}_0$ vektor $\underline{x}_0 = \lambda \underline{x} + (1 - \lambda) \underline{z}$ /ahol $0 < \lambda < 1$ / alakban áll elő, ezért

$$\begin{aligned} \underline{x}_0 + t \underline{v} &= \lambda \underline{x} + (1 - \lambda) \underline{z} + t(v^1(\underline{y} - \underline{x}) + v^2(\underline{z} - \underline{x})) = \\ (4.13.13) \quad &= (\lambda - tv^1 - tv^2) \underline{x} + tv^1 \underline{y} + (1 - \lambda + tv^2) \underline{z} \end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy a jobboldalon az $\underline{x}$, $\underline{y}$, $\underline{z}$ vektorok együtthatóinak összege 1, és az $\underline{x}_0 + t \underline{v}$ pont akkor illeszkedik valamely oldalra, ha a két végponttól különböző harmadik csúcs együtthatója eltűnik, továbbá a másik két együttható nem-negatív. Az is látható, hogy létezik olyan $t > 0$ szám, amelyre vagy az $\underline{x}$ vagy pedig a $\underline{z}$ együtthatója 0.

Ugyanis $v^1 > 0$ és $0 < \lambda$; $(1 - \lambda) < 1$, ezért ha $v^2 < 0$ akkor a $\underline{z}$, ha pedig $v^2 \geq 0$ akkor pedig az $\underline{x}$ együttthatója tűnik el valamely $t > 0$ értékre.

Legyen $t_0 > 0$ az a legkisebb olyan érték amelyre vagy az $\underline{x}$ vagy pedig a $\underline{z}$ együttthatója eltűnik. Látható, hogy ekkor csak az egyik együtttható nulla, mert különben az $\underline{x}_0 + t_0 \underline{v} = t_0 v^1 \underline{y} = \underline{y}$ teljesülne és az egyenes áthaladna az $\underline{y}$ csúcson. Tehát az $\underline{x}_0 + t_0 \underline{v}$ pont vagy az $\underline{x} \underline{y}$ oldalra vagy pedig a $\underline{z} \underline{y}$ oldalra illeszkedik, annak megfelelően, hogy a $\underline{z}$ vagy az $\underline{x}$ együttthatója tűnik el a t_0 érték mellett.

A Pasch féle tulajdonság teljes bizonyításához már csak annyit kell belátnunk, hogy az egyenesről más pont nem illeszkedik a háromszög oldalaira, csak az $\underline{x}_0$ és az $\underline{x}_0 + t_0 \underline{v}$ pontok.

Ha $t < 0$, akkor a (4.13.13) egyenlet jobboldalán az $\underline{y}$ együttthatójára $t v^1 < 0$ teljesül, így az $\underline{x}_0 + t \underline{v}$ pont sem az $\underline{yz}$ sem az $\underline{xy}$ oldalra nem illeszkedik. De az $\underline{xz}$ oldalra sem illeszkedhet, mert az $\underline{y}$ együttthatója a nullától különbözik.

Ha $0 < t < t_0$ teljesül, akkor az $\underline{x}_0 + t \underline{v}$ pont (4.13.13) alakjában az $\underline{x}$, $\underline{y}$, $\underline{z}$ vektorok együttthatói pozitívak, így a pont egyetlen oldalra sem illeszkedik. Ha pedig $t > t_0$, akkor vagy az $\underline{x}$ vagy a $\underline{z}$ együttthatója negatív, amiből ismét az következik, hogy az $\underline{x}_0 + t \underline{v}$ pont nem illeszkedik a háromszög egyik oldalára sem.

Ezzel a Pasch-féle tulajdonságot megmutattuk.

A félsíkok ill. a féltérek fogalmát korábban a rendezési axiómák után vezettük le. A fenti bizonyításból látható, hogy az n -dimenziós vektorterekben a Pasch axióma minden 2-dimenziós affin altérben igaz, ezért mód nyílik a hiperterekre vonatkozó féltérek definiálására is. Ha H az A^n hipertere, akkor az $A^n \setminus H$ halmaz pontjait osztályokba sorolhatjuk oly módon, hogy két pont akkor kerül egy osztályba, ha az összekötő szakaszuk nem metszi a H hiperteret. Megmutatható, hogy ennek az osztályozásnak pontosan két osztálya van, amiket nyílt féltéreknek nevezünk. A részletek átgondolását az olvasóra bizzuk.

A metrikus axiómák vizsgálatára térünk át.

A (4.13.8) képlettel definiált távolságra az M_1, M_2 és M_4 axiómák triviálisan érvényesek. Az M_3 háromszög egyenlőtlenséget jelentő

$$(4.13.14) \quad |\underline{x} + \underline{y}| \leq |\underline{x}| + |\underline{y}|$$

egyenlőtlenség pedig a Minkowski egyenlőtlenségből a következő módon adódik:

$$\begin{aligned} |\underline{x} + \underline{y}|^2 &= (\underline{x} + \underline{y}, \underline{x} + \underline{y}) = |\underline{x}|^2 + 2(\underline{x}, \underline{y}) + |\underline{y}|^2 \leq \\ &|\underline{x}|^2 + 2|\underline{x}||\underline{y}| + |\underline{y}|^2 = (|\underline{x}| + |\underline{y}|)^2. \end{aligned}$$

Látható, hogy itt az egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha az $|\underline{x}|$ és $|\underline{y}|$ lineárisan függők.

Végezetül a tengelyes tükrözések axiómájához csak annyit jegyzünk meg, hogy az $\underline{r} + t \underline{v}$ egyeneshez a

$$(4.13.15) \quad \varphi(\underline{x}) := 2(\underline{x}, \underline{v})\underline{v} - \underline{x} + 2(\underline{r} - (\underline{r}, \underline{v})\underline{v})$$

leképezés eleget tesz az axióma követelményeinek.

Ezzel beláttuk, hogy a kipontozott euklideszi síkok és téterek kettréle felépítése egymással ekvivalens.

5. FEJEZET

AFFIN GEOMETRIA

1 § n-dimenziós affin terek és affin altereik

Ebben a fejezetben a véges dimenziós valós vektortereket metrika nélkül vizsgáljuk, vagyis bennük kitüntetett belsőszorzat nélkül. Durván fogalmazva az ilyen irányu vizsgálatok alkotják az affin geometria tárgyát.

A következőkben A^n mindig n -dimenziós valós vektorteret jelöl és kipontozott affin térnek vagy egyszerűen affin térnek nevezzük.

A kitüntetett origó miatt a vektor és a pont fogalmakat azonos értelemben használjuk. Jelölésükre is megtartjuk a korábban használatos mindkét módozatot. Tehát a pontokat vagy latin nagybetűkkel $A, B, C, \dots$ vagy pedig aláhúzott kisbetűkkel $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \dots$ jelöljük. Valamely A pontból a B pontba mutató vektoron a $\underline{b} - \underline{a}$ vektort értjük, és jelölésére az $\underline{AB}$ szimbólumot is alkalmazzuk.

Az A^n tér $\underline{a}_0, \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k$ pontjait affin függetleneknek nevezzük, ha az $\underline{a}_1 - \underline{a}_0, \dots, \underline{a}_k - \underline{a}_0$ vektorok lineárisan függetlenek.

Az affin függetlenség tulajdonsága nem függ a pontok sorrendjétől. Ez az állítás közvetlenül adódik a soronkövetkező tételből.

Tekintsük az $(\underline{a}, \alpha)$ alaku rendezett elempárok

halmazát, ahol $\underline{a} \in A^n$ vektor és $\alpha \in \mathbb{R}$ valós szám.

Ezek a párok a közöttük bevezetett

$$(\underline{a}, \alpha) + (\underline{b}, \beta) := (\underline{a} + \underline{b}, \alpha + \beta),$$

$$\lambda(\underline{a}, \alpha) := (\lambda \underline{a}, \lambda \alpha), \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

műveletekkel $(n + 1)$ -dimenziós vektorteret alkotnak.

5.1.1 | Az $\underline{a}_0, \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k$ pontok akkor és csak akkor
affin függetlenek, ha az $(\underline{a}_0, 1), (\underline{a}_1, 1), \dots,$
..., $(\underline{a}_k, 1)$ vektorok lineárisan függetlenek.

Bizonyítás Legyen a $\sum_{i=1}^k \alpha_i (\underline{a}_i - \underline{a}_0)$ tetszőleges

lineáris kombináció. Ezt a

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i (\underline{a}_i - \underline{a}_0) = \sum_{i=1}^k \alpha_i \underline{a}_i - \left(\sum_{i=1}^k \alpha_i \right) \underline{a}_0 = \sum_{j=0}^k \beta_j \underline{a}_j$$

alakban írhatjuk, ahol $\beta_0 = -\sum_{i=1}^k \alpha_i$, $\beta_i = \alpha_i$ ($i=1, \dots, k$),

és így a $\sum_{j=0}^k \beta_j = 0$ azonosság is érvényes. Ezért a

$$\sum_{j=0}^k \beta_j (\underline{a}_j, 1) = \left(\sum_{j=0}^k \beta_j \underline{a}_j, 0 \right) = 0$$

azonosság pontosan akkor teljesül, ha a $\sum_{j=0}^k \beta_j \underline{a}_j = 0$

azonosság érvényes. Vagyis az $\underline{a}_1 - \underline{a}_0, \dots, \underline{a}_k - \underline{a}_0$

vektorrendszer pontosan akkor lineárisan függő ill.

független, ha az $(\underline{a}_0, 1), \dots, (\underline{a}_k, 1)$ rendszer is lineá-

risan függő ill. független, ami állításunkat igazolja. $\square$

Tekintsük az A^n térben $n + 1$ számú

$\underline{a}_0, \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ affin független pontot. Segítségükkel a

térben u.n. affin koordináta rendszer vezethető be.

Mivel az $\underline{a}_1 - \underline{a}_0, \dots, \underline{a}_n - \underline{a}_0$ vektorok az alaptérben bázist alkotnak, ezért minden $\underline{x}$ vektorra az $\underline{x} - \underline{a}_0$ vektor az

$$\underline{x} - \underline{a}_0 = \sum_{i=1}^n x^i (\underline{a}_i - \underline{a}_0), \quad x^i \in \mathbb{R},$$

alakban írható. Így minden $\underline{x}$ vektorhoz az $(x^1, x^2, \dots, x^n)$ koordináták rendelhetők, amiket a vektornak az $\underline{a}_0, \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ alappontokra vonatkozó affin koordinátáknak nevezünk.

Látható, hogy az $\underline{a}_0$ vektor affin koordinátája zérus, ezért ezt a pontot a koordinátázás origójának nevezzük.

5.1.2 Legyen $(x^1, \dots, x^n)$ és $(y^1, \dots, y^n)$ az A^n tér két affin koordináta rendszere. Ekkor az azonos pontokhoz rendelt x és y koordináták között az

$$5.1.1 \quad y^i = \sum_{j=1}^n A_j^i x^j + p^i$$

lineáris összefüggés érvényes, ahol (A_j^i) nem-elfajuló, $n \times n$ típusu mátrix, valamint $p^1; \dots; p^n \in \mathbb{R}$.

Fordítva, az $(x^1, \dots, x^n)$ affin koordináta rendszerekből az (5.1.1) formulákkal származtatott $(y^1, \dots, y^n)$ függvények affin koordináta rendszert definiálnak.

Bizonyítás Az x ill. y koordinátázás alappont rendszerét jelölje $\underline{a}_0, \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ ill. $\underline{b}_0, \underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n$.

Az alaptér $\underline{a}_1 - \underline{a}_0; \dots, \underline{a}_n - \underline{a}_0$ ill. $\underline{b}_1 - \underline{b}_0, \dots, \underline{b}_n - \underline{b}_0$ bázisai között az

$$\underline{a}_j - \underline{a}_0 = \sum_{i=1}^n A_j^i (\underline{b}_i - \underline{b}_0)$$

összefüggést írhatjuk fel, ahol az (A_i^j) mátrix nem-el-fajuló.

Valamely $\underline{z}$ vektor $(x^1, \dots, x^n)$ koordinátáit a

$$\underline{z} - \underline{a}_0 = \sum_{i=1}^n x^i (\underline{a}_i - \underline{a}_0)$$

képlet adja, ezért

$$\underline{z} - \underline{b}_0 = \sum_{i=1}^n x^i (\underline{a}_i - \underline{a}_0) + (\underline{a}_0 - \underline{b}_0) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n A_i^j x^i + p^j \right) (\underline{b}_j - \underline{b}_0)$$

ahol $\underline{a}_0 - \underline{b}_0 = \sum_{j=1}^n p^j (\underline{b}_j - \underline{b}_0)$. Ez utóbbi képletből pedig

éppen az (5.1.1) transzformációt kapjuk.

A fenti képletekből az is látható, hogy előírt $\underline{a}_0, \dots, \underline{a}_n$ alappontok, (A_i^j) mátrix és $p^1, \dots, p^n$ valós számok esetén az (5.1.1) képletből származtatott y^i koordináták pontosan az affin független

$$\underline{b}_0 = \underline{a}_0 - \sum_{i,k=1}^n p^k A^{-1}_k^i (\underline{a}_i - \underline{a}_0)$$

(5.1.2)

$$\begin{aligned} \underline{b}_j &= \sum_{i=1}^n A^{-1}_j^i (\underline{a}_i - \underline{a}_0) + \underline{b}_0 = \\ &= \underline{a}_0 + \sum_{i=1}^n \left(A^{-1}_j^i - \sum_{k=1}^n p^k A^{-1}_k^i \right) (\underline{a}_i - \underline{a}_0) \end{aligned}$$

alappontokra vonatkoznak, ahol az $(A^{-1}_j^i)$ az (A_j^i) inverz mátrixa.

□

Áttérünk az affin alterek vizsgálatára.

Tekintsünk az A^n térben $k+1$ affin független pontot és jelöljük ezeket az $\underline{a}_0, \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k$

jelekkel. Ezek segítségével képezzük az

$$(5.1.3) \quad \underline{a}_0 + \sum_{i=1}^k x^i (\underline{a}_i - \underline{a}_0), \quad x^i \in \mathbb{R},$$

alakban előállítható vektorok halmazát. Az így előállítható halmazokat k-dimenziós affin altereknek nevezzük.

Nyilvánvalóan adódik, hogy ezek az alterek az $\underline{a}_0, \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k$ alappontokat tartalmazzák, ezért az alappontokra illeszkedő affin altereknek nevezzük.

Az altér vektorainak (5.1.3) előállítása egyértelmű. Minden vektorhoz rendeljük hozzá az $(x^1, \dots, x^k)$ koordinátákat. Ezeket a koordinátákat az alappontokra vonatkozó affin koordinátáknak nevezzük. Az (5.1.2) tételhez teljesen hasonlóan belátható, hogy valamely altér két különböző koordinátázása között az (5.1.1) alaku transzformációk érvényesek.

Az (5.1.3) képletben vezessük be az $x^0 = 1 - \sum_{i=1}^k x^i$ jelölést. Ekkor az (5.1.3) formula a $\sum_{i=0}^k x^i \underline{a}_i$ alakba írható át, ahol $\sum_{i=0}^k x^i = 1$ teljesül. Fordítva, az is világos, hogy az $\underline{a}_0, \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k$ alappontokra illeszkedő affin altér pontjait pontosan a

$$(5.1.4) \quad \sum_{i=0}^k x^i \underline{a}_i, \quad \text{ahol} \quad \sum_{i=0}^k x^i = 1,$$

alakban előállítható vektorok alkotják. Ebből a megállapításból azonnal következik, hogy az alappontokra illeszkedő

altér nem függ az alappontok sorrendjétől.

Az altér pontjainak (5.1.4) előállításából nyert $(x^0, x^1, \dots, x^k)$ koordinátáit, illetve ezek tetszőleges zérustól különböző konstansszorosait a pontnak az alappontokra vonatkozó baricentrikus koordinátáinak nevezzük.

Az alappontok és a baricentrikus koordináták az altér pontjait egyértelműen meghatározzák, hiszen valamely $(x^0, x^1, \dots, x^k)$, $\sum_{i=0}^k x^i \neq 0$, baricentrikus koordináták csak az altér

$$(5.1.5) \quad \underline{x} = \frac{1}{\sum_{i=0}^k x^i} \sum_{j=0}^k x^j \underline{a}_j$$

vektorához tartozhatnak. Ez utóbbi képlet miatt valamely $(x^0, x^1, \dots, x^k)$ baricentrikus koordinátájú pontot az x^i súlyokkal súlyozott $\underline{a}_i$ pontrendszer súlypontjának is nevezik.

Megjegyezzük még, hogy az A^n alaptér tetszőleges $\underline{a}_0, \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ affin független pontjaira vonatkozóan az alaptér pontjainak baricentrikus koordinátái is definiálhatók. Ezek definiálásánál szintén az (5.1.4) képletet alkalmazzuk a $k = n$ esetre.

Rögzítsük le az A^n alaptérben az $\underline{a}_0, \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ affin független pontokat, és tekintsük az általuk definiált $(x^1, x^2, \dots, x^n)$ affin koordináta rendszert. A következőkben az affin altereket ilyen koordináta rendszerben vizsgáljuk.

5.1.3 Az A^n tér minden k -dimenziós A^k affin alteréhez létezik olyan $n - k$ egyenletből álló

(5.1.6)
$$\sum_{j=1}^n A_j^l x^j + p = 0, \quad l = k + 1, k + 2, \dots, n$$

lineáris egyenletrendszer, amelyre az $A^l = A_1^l, \dots, A_n^l, \quad l = k + 1, \dots, n,$ sorvektorok lineárisan függetlenek, és az egyenletrendszert pontosan az A^k altér pontjainak $(x^1, x^2, \dots, x^n)$ affin koordinátái elégítik ki. Fordítva, mindazok a pontok, amelyek koordinátái egy (5.1.6) típusú egyenletrendszert elégítenek ki, k -dimenziós affin alteret alkotnak.

Bizonyítás Legyen az A^k k -dimenziós affin altér, és válasszunk az A^n térben olyan $\underline{b}_0, \underline{b}_1, \dots, \underline{b}_k, \underline{b}_{k+1}, \dots, \underline{b}_n$ affin független pontokat, hogy közülük a $\underline{b}_0, \underline{b}_1, \dots, \underline{b}_k$ pontok az A^k altérbe essenek. Ha $(y^1, y^2, \dots, y^n)$ a pontoknak a $\underline{b}_0, \dots, \underline{b}_n$ alappontokra vonatkozó affin koordinátáit jelöli, akkor az A^k alteret pontosan azok a pontok alkotják, amelyek koordinátái az

$$y^{k+1} = y^{k+2} = \dots = y^n = 0$$

egyenleteket elégítik ki. Így, az (5.1.1) képlet segítségével az $(x^1, \dots, x^n)$ koordinátákra áttérve, pontosan az A^k pontjaira érvényesek az

$$\sum_{j=1}^n A_j^l x^j = -p^l, \quad l = k + 1, \dots, n,$$

egyenletek, ahol az $A^l = A_1^l, \dots, A_n^l, \quad l = k + 1, \dots, n,$

sorvektorok lineárisan függetlenek, hiszen az (A_j^i) mátrix nem-elfajuló.

Fordítva, ha adott egy (5.1.6) típusu egyenletrendszer, akkor az (A_j^1) együtttható-mátrixot egészítsük ki $n \times n$ -típusu nem-elfajuló (A_j^i) mátrixá, valamint a $p^{k+1}, \dots, p^n$ valós számokat egészítsük ki a $p^1, \dots, p^k, p^{k+1}, \dots, p^n$ számsorra. Ha az affin független $\underline{b}_0, \underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n$ pontokat az (5.1.2) formula alapján képezzük, akkor azonnal látható, hogy az (5.1.6) egyenleteket pontosan a $\underline{b}_0, \underline{b}_1, \dots, \underline{b}_k$ pontokra illeszkedő altér pontjainak koordinátái elégítik ki. $\square$

Az A^n tér $n-1$ -dimenziós affin altereit hipertersknek nevezzük. Ezeket n számú affin független pontok feszítik ki, és a fenti tétel alapján egyetlen lineáris egyenlettel írhatók le.

5.1.4 Az A^n tér valamely $(x^1, x^2, \dots, x^n)$ affin koordináta rendszerében a $\underline{b}_0, \underline{b}_1, \dots, \underline{b}_{n-1}$ affin független pontokra illeszkedő hipertér egyenlete:

$$(5.1.7) \det \begin{vmatrix} x^1, x^2, \dots, x^n, 1 \\ b_0^1, b_0^2, \dots, b_0^n, 1 \\ \vdots \\ b_{n-1}^1, b_{n-1}^2, \dots, b_{n-1}^n, 1 \end{vmatrix} := \det(\underline{x}_1, \underline{b}_0, \dots, \underline{b}_{n-1}) = 0,$$

ahol a $b_i^1, b_i^2, \dots, b_i^n$ a $\underline{b}_i$ pont affin koordinátáit jelöli.

Bizonyítás Világos, hogy a $\underline{b}_i$, $i=0, \dots, n-1$, pontok affin koordinátái az (5.1.7) egyenleteket kielégítik, hiszen ezeket behelyettesítve mindig két azonos sor szerepel a determinánsban. Ezért a determináns kifejtve, vagy a triviális $0x^1 + 0x^2 + \dots + 0x^n + 0 \cdot 1 = 0$ egyenlethez jutunk, vagy pedig az $x^1, \dots, x^n$ változók együttható-vektora különbözik a zérus vektortól, és ekkor az egyenlet a $\underline{b}_0, \underline{b}_1, \dots, \underline{b}_{n-1}$ pontrendszerre fektetett hipertér egyenlete. Az első eset az 5.1.1 tétel miatt nem fordulhat elő. Ugyanis a $\underline{b}_0^1, \dots, \underline{b}_{n-1}^1$ vektorok lineárisan függetlenek, ezért nem lehetséges, hogy a kifejtéssel felírt lineáris egyenlet minden együtthatója eltűnjék. Ez pedig az állításunkat igazolja. $\square$

5.1.5 | Legyenek a $\underline{b}_0, \underline{b}_1, \dots, \underline{b}_k$ pontok affin függetlenek, és egészítsük ki a rendszert a $\underline{b}_0, \underline{b}_1, \dots, \underline{b}_k, \underline{b}_{k+1}, \dots, \underline{b}_n$ affin független pontokká. Ekkor a tér $(x^1, \dots, x^n)$ affin koordináta rendszerében a $\underline{b}_0, \dots, \underline{b}_k$ pontokra illeszkedő k -dimenziós altér egyenletei a következők:

$$\begin{aligned}
 & \det(\underline{x}_1, \underline{b}_0^1, \dots, \underline{b}_k^1, \underline{b}_{k+2}^1, \dots, \underline{b}_n^1) = 0, \\
 (5.1.8) \quad & \det(\underline{x}_1, \underline{b}_0^1, \dots, \underline{b}_k^1, \underline{b}_{k+1}^1, \underline{b}_{k+3}^1, \dots, \underline{b}_n^1) = 0, \\
 & \vdots \\
 & \det(\underline{x}_1, \underline{b}_0^1, \dots, \underline{b}_k^1, \underline{b}_{k+1}^1, \dots, \underline{b}_{n-1}^1) = 0.
 \end{aligned}$$

Bizonyítás Vegyük észre, hogy a fenti baloldali kifejezések mindegyikére és tetszőleges α valós számra

érvényes a

$\det(\alpha \underline{x}, \underline{b}_0 1, \dots) = \alpha \det(\underline{x} 1, \underline{b}_0 1, \dots)$
 azonosság. Az is látható, hogy a $\underline{b}_0, \underline{b}_1, \dots, \underline{b}_k$ vektorok affin koordinátái az (5.1.8) egyenleteket kielégítik. Ezekből pedig nyilvánvalóan adódik, hogy az A^k altér tetszőleges $\sum_{i=0}^k \lambda_i \underline{b}_i$ ($\lambda_i \in \mathbb{R}, \sum \lambda_i = 1$)

pontjának a koordinátái kielégítik az (5.1.8) egyenleteket, hiszen

$$\begin{aligned} \det\left(\sum_{i=0}^k (\lambda_i \underline{b}_i) 1, \underline{b}_0 1, \dots\right) &= \sum_{i=0}^k \det(\lambda_i \underline{b}_i 1, \underline{b}_0 1, \dots) = \\ &= \sum_{i=0}^k \lambda_i \det(\underline{b}_i 1, \underline{b}_0 1, \dots) = 0. \end{aligned}$$

Még megmutatjuk, hogy más pontok koordinátáira nem igazak az (5.1.8) egyenletek. Ehhez vegyük észre, hogy ha a $\underline{b}_{k+1}, \underline{b}_{k+2}, \dots, \underline{b}_n$ pontok koordinátáit az egyenletekbe helyettesítjük, akkor a $\underline{b}_{k+i}$ pont koordinátáinak a behelyettesítésénél minden azonosság teljesül, kivéve az i -ik egyenletet, ahol is az 5.1.1 tétel miatt

$\det(\underline{b}_{k+i} 1, \underline{b}_0 1, \dots, \underline{b}_{k+i-1} 1, \underline{b}_{k+i+1} 1, \dots, \underline{b}_n 1) = \gamma_i \neq 0$
 érvényes. Jelölje $\underline{\gamma}_i$ azt az $n-k$ komponensből álló sorvektort, amelynek minden komponense zérus, kivéve az i -ik komponensét, amelyik γ_i , vagyis $\underline{\gamma}_i = (0, \dots, \gamma_i, \dots, 0)$. Világos, hogy az $\underline{\gamma}_1, \dots, \underline{\gamma}_{n-k}$ vektorrendszer lineárisan független.

Tekintsünk most egy tetszőleges

$$\underline{x} = \sum_{i=0}^n \lambda_i \underline{b}_i \quad (\lambda_i \in \mathbb{R}, \sum_{i=0}^n \lambda_i = 1)$$

pontot, és ennek affin koordinátáit helyettesítsük be
rendre az (5.1.8) egyenletek baloldalaiba. Az i -ik
behelyettesítésnél egy V_i számot kapunk, és tekint-
sük a $\underline{V} = (V_1, \dots, V_{n-k})$ sorvektort. Mivel az
 i -ik helyettesítésnél

$$V_i = \det \left(\sum_{j=0}^n (\lambda_j \underline{b}_j) 1, \underline{b}_0 1, \dots \right) = \det \left((\lambda_{k+i} \underline{b}_{k+i}) \lambda_{k+i}, \underline{b}_0 1, \dots \right) = \\ = \lambda_{k+i} \eta_i$$

adódik, ezért

$$\underline{V} = \sum \lambda_{k+i} \underline{\eta}_i.$$

Mivel az $\underline{\eta}_i$ vektorok lineárisan függetlenek, ezért a

$\underline{V} = 0$ pontosan akkor teljesül, ha $\lambda_{k+1} = \lambda_{k+2} = \dots = \lambda_n = 0$,
vagyis ha az $\underline{x}$ pont a $\underline{b}_0, \dots, \underline{b}_k$ pontokra fektetett
affin altérre illeszkedik. Ezzel a bizonyítást befejez-
tük. □

A fenti tétel azt a szemléletes tényt fejezi ki,
hogy egy k -dimenziós affin altér mindig $n - k$ számú
hipertér metszeteként állitható elő.

Az affin alterek között különböző illeszkedési viszonyok definiálhatók.

Legyen az A^{n-1} tetszőleges hipertér, és az A^k ($k < n$)
pedig tetszőleges affin altér. Ezeket párhuzamosoknak
mondjuk, ha vagy $A^k \subseteq A^{n-1}$ vagy pedig $A^k \cap A^{n-1} = \emptyset$
teljesül. Ha pedig A^m és A^k két tetszőleges affin al-
tér, akkor ezeket abban az esetben mondjuk párhuzamosnak,

ha létezik olyan A^1 affin altér, amelyik mind a kettőt tartalmazza, az egyik altér az A^1 -ben hipertér, valamint az A^1 -ben az előbb leírt értelemben párhuzamosak.

Két affin altér kitérő, ha nem párhuzamosak és metszetük az üres halmaz. Két affin altér metsző, ha nem párhuzamosak és metszetük nem üres.

Az altér-egyenletek lehetővé teszik, hogy a különböző illeszkedési tételek bizonyításánál a lineáris egyenletrendszerek elméletét alkalmazzuk. Ilyen módon igazolható a következő állítás is.

5.1.6 Két affin altér vagy párhuzamos, vagy kitérő, vagy pedig olyan altérben metszik egymást, amelynek dimenziója kisebb mint a másik két altéré. Egy A^{n-1} hipertér és egy A^k altér vagy párhuzamos vagy pedig $k - 1$ -dimenziós affin altérben metszik egymást.

A tétel bizonyítását, mint egyszerű feladatot, az olvasóra bizzuk.

Az l -dimenziós affin altereket egyeneseeknek nevezzük. Ha $\underline{x}_0$ és $\underline{x}_1$ két affin független pont, akkor rájuk egy és csak egy egyenes illeszkedik, amelynek pontjait az

$$(1 - t) \underline{x}_0 + t \underline{x}_1, \quad -\infty < t < \infty$$

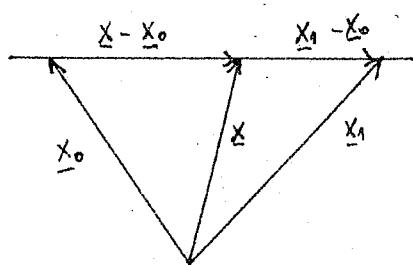
alakban előállítható pontok alkotják. Ebben a képletben a t paraméterérték nem más, mint a pontoknak az $\underline{x}_0, \underline{x}_1$ alappontokra vonatkozó affin koordinátája. Ha ez a paraméter-érték csak a 0 és 1 számok között változik

$0 \leq t \leq 1$, akkor az így leírt ponthalmazt az $\underline{x}_0$ és $\underline{x}_1$ pontokat összekötő szakasznak nevezzük. Szakaszok jelölésére később az $[\underline{x}_0 \underline{x}_1]$ jelölést is alkalmazzuk.

Tekintsük most az egyenesnek egy tetszőleges $\underline{x}$ pontját, amelynek affin koordinátája a t érték.

Az $\mu = t / (1 - t)$ értéket az $\underline{x}$ pontnak az $\underline{x}_0, \underline{x}_1$ alappontokra vonatkozó osztóviszonyának nevezzük, és $(\underline{x}_0, \underline{x}_1, \underline{x})$ jellel jelöljük.

Az osztóviszony geometriai tartalmára az



$$\underline{x} - \underline{x}_0 = \frac{t}{1-t} (\underline{x}_1 - \underline{x})$$

azonosság mutat, mivel eszerint a μ annyit jelent, hogy az $\underline{x} - \underline{x}_0$ vektor hányszorosa az $\underline{x}_1 - \underline{x}$ vektornak.

Az $(\underline{x}_0, \underline{x}_1, \underline{x})$ osztóviszony a μ értéket a $t = \mu / (\mu + 1)$ paraméterű pontban veszi fel, ezért az osztóviszony a -1 érték kivételével minden valós értéket felvesz. Sőt az is látható, hogy az $[\underline{x}_0 \underline{x}_1]$ szakaszon kívül az osztóviszony negatív, az $\underline{x}_0$ pontban 0 értéket vesz fel, az $\underline{x}_1$ pontban pedig az $1 : 0$ aránnyal jelöljük.

2 § Konvex alakzatok, konvex burok

Az A^n affin tér valamely K részhalmazát konvexnek nevezzük, ha bármely két pontjával együtt az ezeket összekötő szakasz pontjait is tartalmazza.

Nyilvánvaló, hogy konvex halmazok metszete is konvex halmaz, hiszen a metszet bármely két pontját összekötő szakaszt mindegyik konvex halmaz pontonként tartalmazza.

Jelöljön S tetszőleges ponthalmazt. Az S konvex burkán mindazon konvex ponthalmazok metszetét értjük, amelyek az S halmazt tartalmazzák. A konvex burok jelölésére a conv S jelölést alkalmazzuk. A konvex burok minimális abban az értelemben, hogy ha valahányszor egy konvex halmaz az S halmazt tartalmazza, akkor tartalmazza a conv S halmazt is.

A tér tetszőleges $\underline{x}_0, \underline{x}_1, \dots, \underline{x}_k$ vektorait véve a

$$\sum_{i=0}^k \alpha^i \underline{x}_i, \text{ ahol } \alpha^i \in \mathbb{R}, \alpha^i \geq 0, \sum_{i=0}^k \alpha^i = 1$$

alakú lineáris kombinációt konvex lineáris kombinációnak nevezzük.

A szakasz definíciójánál látható, hogy egy szakasz pontjai végpontjainak konvex lineáris kombinációjaként állíthatók elő.

A következő tételben a konvex burok pontjait az alaphalmaz pontjainak konvex lineáris kombinációjaként állítjuk elő. Az erre vonatkozó következő tételt Caratheodory tételnek is nevezik.

5.2.1 | A conv S konvex burok minden pontja az S alaphalmazba eső legfeljebb $n + 1$ számú pont konvex lineáris kombinációjaként állítható elő, vagyis

$$\text{conv } S = \left\{ \lambda_0 \underline{x}_0 + \dots + \lambda_n \underline{x}_n \mid \underline{x}_i \in S, \lambda_i \geq 0, \sum \lambda_i = 1 \right\}.$$

Bizonyítás Jelölje T^* azoknak a pontoknak a halmazát, amelyek

$\lambda_0 \underline{x}_0 + \lambda_1 \underline{x}_1 + \dots + \lambda_n \underline{x}_n$, $\underline{x}_i \in S$, $\lambda_i \geq 0$, $\sum \lambda_i = 1$,
alakban állíthatók elő.

Mivel minden $\underline{x} \in S$ elem $\underline{x} = 1 \cdot \underline{x} + 0 \cdot \underline{x}_1 + \dots$
 $\dots + 0 \cdot \underline{x}_n$, $\underline{x}_i \in S$ alakban írható, ezért a T^* az S
halmazt tartalmazza.

A következő lépésben megmutatjuk, hogy a T^* pont-
halmaz konvex. Ehhez először a következő lemmát bizonyít-
juk be.

Lemma Ha az A^n tér valamely $\underline{r}$ vektora S -beli vek-
torok konvex lineáris kombinációjaként állítható elő, akkor
legfeljebb $n + 1$ számú S -beli vektor konvex lineáris
kombinációjával is előállítható.

Bizonyítás Legyen az

$$\underline{r} = \sum_{i=0}^m \lambda_i \underline{w}_i, \quad \underline{w}_i \in S,$$

olyan konvex lineáris kombináció, amelyben a $\underline{w}_i \in S$
vektorok száma minimális. Ekkor nyilvánvalóan minden
együtthatóra $\lambda_i > 0$ teljesül. A bizonyításhoz az $m \leq n$
egyenlőtlenséget kell igazolnunk.

Indirekt feltevésként tegyük fel, hogy $m > n$ telje-
sül.

Ekkor a $(\underline{w}_i, 1) \in A^{n+1}$ vektorok lineárisan függők,
ezért ezeknek a vektoroknak létezik nem-triviális

$$\sum_{i=0}^m \alpha_i (\underline{w}_i, 1) = \left(\sum_{i=0}^m \alpha_i \underline{w}_i, \sum_{i=0}^m \alpha_i \right) = \underline{0}$$

lineáris kombinációja, amelyre szükségképpen a

$$\sum_{i=0}^m \alpha_i w_i = 0, \quad \sum_{i=0}^m \alpha_i = 0 \quad \text{azonosságok is érvényesek.}$$

Az α_i együtthatók indexelését úgy végezzük el, hogy $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k < 0$ és $\alpha_{k+1}, \dots, \alpha_m \geq 0$ teljesüljön. Negatív α_i együttható biztosan létezik, hiszen másképpen nem teljesülne a $\sum_{i=0}^m \alpha_i = 0$ feltétel.

Legyen az $s = \lambda_j / -\alpha_j$ a $\lambda_0 / -\alpha_0, \lambda_1 / -\alpha_1, \dots, \lambda_k / -\alpha_k$ számok minimuma. Ekkor nyilvánvalóan $s > 0$ teljesül.

A $\sum \alpha_i w_i = 0$ egyenlet miatt az

$$\underline{r} = \sum_{i=0}^m \lambda_i w_i = \sum_{i=0}^m (\lambda_i + s \alpha_i) w_i$$

azonosság is érvényes.

Megmutatjuk, hogy a jobb oldalon konvex lineáris kombináció szerepel. Valóban, ha $i \leq k$, akkor $s \leq \lambda_i / -\alpha_i$ és így $\lambda_i + s \alpha_i \geq 0$ érvényes. Ha pedig $i > k$, akkor $\lambda_i + s \alpha_i > 0$, hiszen $\lambda_i > 0$ és $s \alpha_i \geq 0$ érvényes. Nyilvánvalóan érvényes a

$$\sum_{i=0}^m (\lambda_i + s \alpha_i) = \sum_{i=0}^m \lambda_i = 1$$

azonosság is, tehát a fenti kombináció valóban konvex.

Ugyanakkor a j -ik együtthatóra

$$\lambda_j + s \alpha_j = \lambda_j + \frac{\lambda_j}{-\alpha_j} \alpha_j = 0$$

érvényes, és így a fenti előállításban az $\underline{r}$ vektort m -nél kevesebb S -beli vektor konvex lineáris

kombinációjaként állítottuk elő. Ez ellentmond az m minimális tulajdonságának, amivel a lemma indirekt bizonyítását befejeztük.

A T^* konvexségének igazolásához tekintsünk két $\underline{x}, \underline{y} \in T^*$ vektort, és az ezeket összekötő szakaszon jelöljük ki egy

$$\underline{r} = t \underline{x} + (1 - t) \underline{y} \quad , \quad 0 < t < 1$$

pontot. Mivel a végpontok

$$\underline{x} = \sum_{i=0}^n \lambda_i \underline{v}_i \quad , \quad \underline{y} = \sum_{i=0}^n \mu_i \underline{w}_i \quad , \quad \underline{v}_i, \underline{w}_i \in S$$

alakban konvex lineáris kombinációként állíthatók elő, ezért az $\underline{r}$ vektor is

$$\underline{r} = \sum_{i=0}^n t \lambda_i \underline{v}_i + \sum_{i=0}^n (1 - t) \mu_i \underline{w}_i = \sum_{i=0}^{2n+1} \gamma_i \underline{a}_i$$

alakban konvex lineáris kombinációként áll elő, ahol az $i \leq n$ esetben $\gamma_i = t \lambda_i$, $\underline{a}_i = \underline{v}_i$, és az $i > n$ esetben pedig $\gamma_i = (1 - t) \mu_i$ és $\underline{a}_i = \underline{w}_i$ átjelölést alkalmaztuk.

Mivel $\underline{a}_i \in S$, ezért a lemma alapján az $\underline{r} \in T^*$ is teljesül, tehát a T^* konvex pontthalmaz.

A bizonyítás utolsó lépéseként a $T^* \subseteq \text{conv } S$ relációt látjuk be.

A T^* valamely $\underline{x} = \lambda_0 \underline{x}_0 + \lambda_1 \underline{x}_1 + \dots + \lambda_n \underline{x}_n$ eleménél az indexelést úgy végezzük el, hogy

$\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k > 0$ és $\lambda_{k+1} = \dots = \lambda_n = 0$ teljesüljön.

A bizonyítást k szerinti teljes indukcióval végezzük.

A $k = 1$ esetben a vektor $\underline{x} = \lambda_0 \underline{x}_0 + \lambda_1 \underline{x}_1$ alakú.

Mivel $\underline{x}_0, \underline{x}_1 \in S$, ezért az $[\underline{x}_0, \underline{x}_1]$ szakasz pontjai a $\text{conv } S$ konvex burokba esnek. Ezért $\underline{x} \in \text{conv } S$, hiszen $\underline{x} \in [\underline{x}_0, \underline{x}_1]$.

Tegyük fel, hogy az $\underline{x} \in \text{conv } S$ reláció minden olyan $\underline{x} \in T^k$ vektorra érvényes, amelyik $\underline{x} = \lambda_0 \underline{x}_0 + \dots$

$\dots + \lambda_{k-1} \underline{x}_{k-1}$ alakban áll elő. Tekintsünk ezek után

egy $\underline{y} = \mu_0 \underline{x}_0 + \dots + \mu_k \underline{x}_k, \mu_i \neq 0$ alakban előállítható $\underline{y} \in T^{k+1}$ vektort, és definiáljuk ebből az

$$\underline{u} = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\mu_i}{\mu_0 + \dots + \mu_{k-1}} \underline{x}_i$$

vektort. Itt a jobb oldalon konvex lineáris kombináció szerepel, és az indukciós feltevés miatt $\underline{u} \in \text{conv } S$ is érvényes. Ugyanakkor

$$\underline{y} = (1 - \mu_k) \underline{u} + \mu_k \underline{x}_k,$$

(Ugyanis $1 - \mu_k = \mu_0 + \dots + \mu_{k-1}$) és itt is a jobb oldalon konvex lineáris kombináció szerepel. Ismét az indukciós feltevésből $\underline{y} \in \text{conv } S$ adódik. Ezzel Caratheodory tételének bizonyítását befejeztük. □

Az $\underline{a}_0, \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k$ affin független pontok konvex burkát k -dimenziós szimplexnek, az $\underline{a}_0, \dots, \underline{a}_k$ pontokat pedig a szimplex csucsainak nevezzük.

Minden szimplex a csucsok által kifeszített affin altérbe esik, ezért Caratheodory tétele alapján, a

szimplex a csucsainak konvex lineáris kombinációjaként állítható elő. Mivel a csucsok affín függetlenek, ezért az egész szimplex nem állítható elő $k + 1$ -nél kisebb számú csucs konvex lineáris kombinációjaként.

Tekintsünk a csucsok közül $l + 1$ számú $a_{i_1}, \dots, a_{i_{l+1}}$ csucsot. Az általuk meghatározott szimplexet l -dimenziós élnek hívjuk. A $(k - 1)$ -dimenziós éleket a következőkben lapoknak is nevezzük.

Vegyük ki egy szimplex pontjai közül a lapok pontjait. Ekkor pontosan azok a pontok maradnak vissza, amelyek

$$\sum_{i=0}^k \lambda_i a_i, \quad \lambda_i > 0, \quad \sum_{i=0}^k \lambda_i = 1$$

alakban állnak elő. Az így nyert pontthalmazra a k -dimenziós nyílt szimplex, vagy a szimplex belseje elnevezést használjuk. Az A^n térben az n -dimenziós nyílt szimplexeket szimplex-környezetnek is mondjuk.

A szimplex környezetek segítségével a torlódási pont, a konvergencia és a zárttság fogalmak a szokásos módon definiálhatók. Az A^n térben valamely $\underline{x}_n$ pontsorozat az $\underline{x}_0$ ponthoz torlódik, ha az $\underline{x}_0$ bármely szimplex környezetébe a sorozatnak végtelen sok eleme esik. Az $\underline{x}_n$ pontsorozat az $\underline{x}_0$ ponthoz konvergál, ha a sorozat egyetlen torlódási pontja az $\underline{x}_0$ pont. Az A^n térben valamely pontthalmazt zártnak mondunk, ha minden sorozatának minden torlódási pontját tartalmazza.

Bevezethető a korlátosság fogalma is. A térben egy pontthalmazt korlátosnak mondunk, ha létezik olyan szimplex, amelyik az adott pontthalmazt tartalmazza.

Bebizonyítható az az analízisből jól ismert állítás, hogy egy pontthalmaz akkor és csak akkor korlátos, ha minden sorozatának létezik torlódási pontja. Ennek igazolását az olvasóra bizzuk.

A korlátos és zárt pontthalmazokat kompakt pontthalmazoknak mondjuk. Könnyen belátható, hogy minden szimplex kompakt pontthalmazt alkot.

Megjegyezzük még, hogy az 1-dimenziós szimplexek a szakaszok, a 2-dimenziós szimplexek pedig a háromszög-lapok.

Végezetül a szimplexekre vonatkozó Pasch-féle tulajdonságot mutatjuk meg.

5.2.2 Tekintsünk az A^n térben egy n -dimenziós szimplexet. Ha egy egyenes a szimplex egyetlen $(n-2)$ -dimenziós élet sem metszi, de egy lapot belső pontban metsz, akkor pontosan még egy lapot metsz belső pontjában.

Bizonyítás A bizonyítást csak vázlatosan írjuk le, mivel hasonló a háromszögekre vonatkozó azonos állítás igazolásához.

A szimplex csucsait jelölje $a_0, a_1, \dots, a_n$, és tegyük fel, hogy az egyik x_0 dőféspontja az $a_0, \dots, a_{n-1}$ csucskok által meghatározott lapra illeszkedik. Vagyis

$$\underline{x}_0 = \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j \underline{a}_j, \text{ ahol } \lambda_j > 0, \sum \lambda_j = 1.$$

Az egyenest itt is $\underline{x}_0 + t \underline{v}$ alakban tekintsük, ahol a $\underline{v}$ irányvektorról feltehető, hogy a

$$\underline{v} = \sum_{i=1}^n v^i (\underline{a}_i - \underline{a}_0)$$

előállításban $v^n > 0$ érvényes. Az egyenes valamely $\underline{x}_0 + t \underline{v}$ pontja az

$$\underline{x}_0 + t \underline{v} = \left(\lambda_0 - \sum_{i=1}^n t v^i \right) \underline{a}_0 + \sum_{i=1}^{n-1} t v^i \underline{a}_i + t v^n \underline{a}_n$$

alakban áll elő. A háromszögeknél látottakhoz hasonlóan megmutatható, hogy létezik olyan $t > 0$ szám, amelyre a fenti előállításban az $\underline{a}_0, \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_{n-1}$ vektorok valamelyik együtthatója eltűnik. Legyen t_0 ezek között a legkisebb. Ekkor az $\underline{x}_0 + t_0 \underline{v}$ pont a keresett másik dőféspont. □

3. § Helly tétele

Helly tétele előtt Radon tételét ismertetjük.

5.3.1 | Az A^n térben minden $n + 2$ elemszámu, különböző pontokból álló pontrendszer pontjai két diszjunkt osztályba sorolhatók úgy, hogy konvex burkuk metszete nem üres.

Bizonyítás A pontokat jelöljük az $\underline{x}_0, \underline{x}_1, \dots, \underline{x}_{n+1}$ jelekkel. Mivel az $(\underline{x}_i, 1)$ vektorok az A^{n+1} térben

lineárisan függők, ezért létezik ezeknek egy

$$\sum \alpha_i (\underline{x}_i, 1) = 0$$

nem-triviális lineáris kombinációja. Nyilvánvaló, hogy ekkor a

$$\sum \alpha_i \underline{x}_i = 0 \quad \text{és} \quad \sum \alpha_i = 0$$

azonosságok is teljesülnek. Az indexelést úgy végezzük el, hogy

$$\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k > 0 \quad \text{és} \quad \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_{n+1} \leq 0$$

teljesüljön. A $\sum \alpha_i = 0$ azonosság miatt az egyik index-halmaz sem lehet az üres halmaz. Soroljuk a pontokat az egymástól diszjunkt

$$S_1 = \{\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_k\} \quad , \quad S_2 = \{\underline{x}_{k+1}, \dots, \underline{x}_{n+1}\}$$

osztályokba.

Mivel $\sum_{i=0}^{n+1} \alpha_i \underline{x}_i = 0$, ezért

$$\sum_{i=0}^{n+1} \frac{\alpha_i}{\alpha_0 + \dots + \alpha_k} \underline{x}_i = 0 \quad ,$$

és ebből átrendezéssel

$$\sum_{i=0}^k \frac{\alpha_i}{\alpha_0 + \dots + \alpha_k} \underline{x}_i = \sum_{i=k+1}^{n+1} \frac{-\alpha_i}{\alpha_0 + \dots + \alpha_k} \underline{x}_i$$

adódik. Azonnal látható, hogy mindkét oldalon konvex lineáris kombináció szerepel, sőt a két oldal által egyértelműen meghatározott $\underline{x}$ vektor a baloldal szerint, Carathéodory tétele alapján, a $\text{conv } S_1$ halmazba, a jobb oldal szerint pedig a $\text{conv } S_2$ halmazba esik. Ezért $\underline{x} \in \text{conv } S_1 \cap \text{conv } S_2$, amivel a bizonyítást befejeztük.



Helly tételének ismertetésére térünk át.

5.3.2 Tekintsünk az A^n affin térben N számú K_i konvex ponthalmazt. Ha ezek közül bármely $n + 1$ ponthalmaznak a metszete nem üres, akkor az összesnek a metszete sem üres.

Bizonyítás A tételt N szerinti teljes indukcióval igazoljuk. Az $N \leq n + 1$ esetben az állítás nyilvánvalóan érvényes.

Tekintsük az $N = n + 2$ esetet. Az $i = 1, \dots, n + 2$ indexekre a K_i^* konvex ponthalmazokat a

$$K_i^* = K_1 \cap \dots \cap K_{i-1} \cap K_{i+1} \cap \dots \cap K_{n+2}$$

metszetként definiáljuk. A feltételek alapján minden indexre $K_i^* \neq \emptyset$ teljesül. Minden K_i^* ponthalmazban jelöljük ki egy $\underline{x}_i \in K_i^*$ pontot. A K_i^* definíciója szerint az $\underline{x}_i$ pont minden olyan K_j ponthalmazba beleesik, amelyre $j \neq i$ teljesül. Ha az $\underline{x}_i$ pontra még $\underline{x}_i \in K_i$ is teljesül, akkor az állítás bizonyítása kész, hiszen ekkor az $\underline{x}_i$ minden K_j alakzatba beleesik, és így az összes alakzatok metszete nem üres.

Ezért a továbbiakban azt az esetet vizsgáljuk, amikor $\underline{x}_i \notin K_i$ érvényes minden indexre.

Radon tételét felhasználva soroljuk az $S = \{\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_{n+2}\}$ ponthalmaz pontjait két S_1, S_2 osztályba úgy, hogy

$S = S_1 \cup S_2$, $S_1 \cap S_2 = \emptyset$, $\text{conv } S_1 \cap \text{conv } S_2 \neq \emptyset$ teljesüljön, és tekintsünk egy tetszőleges $\underline{x} \in \text{conv } S_1 \cap \text{conv } S_2$ pontot. Megmutatjuk, hogy az $\underline{x}$ pont mindegyik

K_j , $j = 1, \dots, n + 2$, alakzatba beleesik, és ezzel az állítás a tekintett esetben is bizonyított lesz.

Tekintsünk egy tetszőleges K_j alakzatot. Ekkor az $\underline{x}_j$ pont vagy az S_1 vagy pedig az S_2 osztályba esik. Tegyük fel, hogy $\underline{x}_j \in S_2$ teljesül. /Az $\underline{x}_j \in S_1$ esetben hasonlóan kell eljárni!/ Az $\underline{x}_1$ pontok definíciója alapján a K_j alakzat minden olyan $\underline{x}_1$ pontot tartalmaz, amelyre $\underline{x}_1 \in S_1$ teljesül. Ezért a K_j tartalmazza a $\text{conv } S_1$ pontthalmazt is, és speciálisan az $\underline{x} \in \text{conv } S_1 \cap \text{conv } S_2$ pontot is. Ezzel az $N = n + 2$ esetre vonatkozó bizonyítást befejeztük.

Tegyük fel, hogy Helly tétele igaz minden $N - 1 \geq n + 2$ esetben. Megmutatjuk, hogy ebből következően az állítás az N esetben is érvényes.

Tekintsük tehát a tétel feltételeit kielégítő $K_1, \dots, K_N$ konvex alakzatokat. A K'_{N-1} konvex alakzatot definiáljuk a

$$K'_{N-1} = K_{N-1} \cap K_N$$

metszetként. Azonnal látható, hogy a

$$K_1, \dots, K_{N-2}, K'_{N-1}$$

rendszerre érvényes a tétel feltétele. Ugyanis ha az alakzatok közül olyan $n + 1$ alakzatnak a metszetét tekintjük, amelyben a K'_{N-1} alakzat szerepel, akkor az előbb vizsgált eset miatt /mert ilyenkor tulajdonképpen a

$K_{i_1} \cap \dots \cap K_{i_n} \cap K_{N-1} \cap K_N$ $(n+2)$ -tagu metszetet tekintjük/ ez a metszet nem üres. Ha pedig a metszetben a K'_{N-1}

tag nem szerepel, akkor a nem-üres metszet a tétel feltétele miatt létezik.

Az indukciós feltétel miatt

$$K_1 \cap \dots \cap K_{N-2} \cap K'_{N-1} = K_1 \cap \dots \cap K_N \neq \emptyset,$$

amivel a bizonyítást befejeztük. $\square$

Helly tételének alkalmazásaként további két állítást bizonyítunk be.

5.3.3 Ha az A^n térben az $F_1, \dots, F_\ell$ félterek az egész teret lefedik, akkor közülük kiválasztható legfeljebb $n + 1$ féltér, amelyek szintén lefedik az egész teret.

Bizonyítás Tekintsük a $K_i = A^n \setminus F_i$ féltereket. Mivel az F_i félterek nem fedik le a $\bigcap_{i=1}^{\ell} K_i$ metszet pontjait,

ezért

$$\bigcap_{i=1}^{\ell} K_i = \emptyset.$$

Helly tétele miatt kiválaszthatók olyan $i_0, i_1, \dots, i_n$ indexek is, amelyekre

$$\bigcap_{m=0}^n K_{i_m} = \emptyset$$

érvényes. Ebből pedig az következik, hogy az F_i félterek is lefedik az egész teret. $\square$

Végezetül Young tételét ismertetjük.

5.3.4 Ha az euklideszi síkon az $x_1, \dots, x_N$ pontrendszer bármely két elemére $|x_i - x_j| \leq 1$ érvényes,

akkor létezik olyan $\sqrt{3}/3$ sugaru kör, amelyik a pontrendszeret lefedi.

Bizonyítás Irjunk minden pont köré $\sqrt{3}/3$ sugaru kört. Megmutatjuk, hogy bármely 3 körnek létezik közös pontja.

Legyen a három kör középpontja x_1, x_2, x_3 , és legyen α a középpontok által meghatározott háromszögben az a szög, amelyik nem kisebb a 60° -nál. Tegyük fel, hogy ez a szög az x_3 csúcspontban van. Ekkor az $[x_1 x_2]$ hur fölé a 60° -os látószögű kört írva olyan körhöz jutunk, amelynek r sugarára $r \leq \sqrt{3}/3$ érvényes, valamint az x_3 pont vagy a belsejébe vagy pedig a határára esik. Ezért a csúcspontok köré írt $\sqrt{3}/3$ sugaru körök legalább ennek a körnek a középpontját tartalmazzák.

Helly tétele miatt az összes körnek létezik közös pontja, ami köré $\sqrt{3}/3$ sugaru kört írva lefedjük a pontrendszeret. $\square$

4 § Konvex poliéderek és politopok

Véges sok zárt féltér metszetét konvex poliédernek, a metszésben szereplő feltételeket pedig definiáló feltételeknek nevezzük. A definiáló feltételek egy rendszerét minimálisnak mondjuk, ha közülük kevesebb számú féltér metszete az összes féltér metszetét valódi részhalmazként tartalmazza. Nyilvánvaló, hogy egy konvex poliéder definiáló feltételei közül mindig kiválasztható minimális definiáló rendszer.

Valamely konvex poliédert k -dimenziósnak mondunk, ha létezik a poliédert tartalmazó k -dimenziós affin altér, és bármely alacsonyabb dimenziós affin altér a poliédert nem tartalmazza. Világos, hogy valamely k -dimenziós konvex poliédert tartalmazó k -dimenziós affin altér egyértelműen meghatározott.

Tekintsük valamely definiáló féltér határoló hipertérnek a k -dimenziós/ poliéderrel vett metszetét. Ez a metszet vagy $l (\leq k - 1)$ -dimenziós affin altér vagy pedig $l (\leq (k - 1))$ -dimenziós konvex poliéder. A definiáló féltér lényegesnek mondjuk, ha határoló hipertere a poliéderből k -számu affin független pontot tartalmaz, vagy ami ezzel ekvivalens, a határoló hipertérnek a poliéderrel vett metszete vagy $(k - 1)$ -dimenziós affin altér vagy pedig $(k - 1)$ -dimenziós konvex poliéder.

5.4.1 Az A^n térben az n -dimenziós konvex poliéderek minimális definiáló rendszerét pontosan a lényeges féltérek alkotják. Ezért a minimális definiáló rendszer egyértelműen meghatározott.

Bizonyítás Először egy segédállítást bizonyítunk. Tekintsünk az A^n térben valamely n -dimenziós P konvex poliédert, és egy H hipertérrel. A H által meghatározott két zárt féltérrel jelölje H_+ ill. H_- . A $P_+ := P \cap H_+$ ill. $P_- := P \cap H_-$ konvex poliéderről azt mondjuk, hogy a H hipertér a P poliédert a P_+ ill. P_- poliéderekre vágja szét.

Ezek után segédállításunk a következő:

„Ha az A^n térben egy H hipertér valamely n -dimenziós P konvex poliédert két n -dimenziós konvex poliéderre vág szét, akkor a $H \cap P$ metszet tartalmaz n -számu affin független pontot, vagyis a metszet vagy a hipertér vagy pedig egy $(n - 1)$ -dimenziós konvex poliéder.”

Mivel a feltétel szerint a P_+ és P_- poliéderek n -dimenziósak, ezért léteznek olyan

$$\underline{x} \in P_+, \underline{x} \notin H, \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n \in P_-$$

pontok, amelyekre az $\underline{a}_i - \underline{x}$ vektorok lineárisan függetlenek. Nyilvánvaló, hogy az $[\underline{x}, \underline{a}_i]$ szakaszok a H hipertert olyan $\underline{b}_i$ pontokban metszik, amelyek affin függetlenek és $\underline{b}_i \in P$ teljesül. Ezzel a segédállítást bebizonyítottuk.

Legyen az $F_1, \dots, F_\ell$ a P valamely minimális definiáló rendszere. Az F_i féltér határoló hipertert jelölje H_i . Ekkor minden i indexre a H_i hipertér az $F_1 \cap \dots \cap F_{i-1} \cap F_{i+1} \cap \dots \cap F_\ell$ poliédert két n -dimenziós poliéderre vágja szét, ezért a segédállítás miatt $\dim H_i \cap P = n - 1$ érvényes. Tehát a minimális definiáló rendszer minden eleme lényeges féltér.

De a minimális definiáló rendszernek az összes lényeges támasz féltert tartalmazni kell. Ugyanis, ha valamely F lényeges féltér nem egyezne meg az $F_1, \dots, F_\ell$ rendszer valamelyik elemével, akkor ennek H hipertere a P poliédert két n -dimenziós poliéderre vágná szét, ami

lehetetlen. Ezzel a tétel bizonyítását befejeztük.



Tekintsünk az A^n térben egy n -dimenziós konvex poliédert. Ennek lényeges témasz feltételeinek határoló hiperterei a poliéderből vagy $(n - 1)$ -dimenziós hiperteret vagy pedig $(n - 1)$ -dimenziós konvex poliédert metszenek ki. Ezeket a poliéder oldallapjainak, pontjaikat pedig a poliéder határpontjainak nevezzük. A poliéder határpontoktól különböző pontjai alkotják a poliéder u.n. belsejét. Amennyiben egy oldallap konvex poliéder, akkor ennek oldallapjait $(n - 2)$ -dimenziós éleknek nevezzük. Általában, az i -dimenziós éleket az $(i + 1)$ -dimenziós poliéder-élek oldallapjaiként definiáljuk. A poliéder 0 -dimenziós éleit csucsoknak nevezzük, magát a P poliédert pedig n -dimenziós élnek is mondjuk.

Oldallapok, élek és csucsok tetszőleges $k (< n)$ -dimenziós konvex poliéderre is definiálhatók, csak ekkor a poliédert tartalmazó k -dimenziós affin altérből kell kiindulnunk a definíció során.

Valamely konvex poliéder csucsait a többi ponttól a következő tulajdonság különbözteti meg.

5.4.2 | Valamely P konvex poliédernek valamely $\underline{x}$ pontja akkor és csak akkor nem csucspont, ha létezik olyan, a P poliéderben haladó szakasz, amelyik az $\underline{x}$ pontot belső pontként tartalmazza.

Bizonyítás Ha valamely $\underline{x} \in P$ pont nem csucspont, akkor

valamely $k (> 0)$ -dimenziós élnek a belső pontja, és ekkor létezik az élben haladó, az x pontot belső pontként tartalmazó szakasz. Fordítva, ha az x pontot, valamely a P -ben haladó $[a, b]$ szakasz belső pontként tartalmazza, ekkor legyen E olyan minimális dimenzióju él, amelyik a szakaszt tartalmazza. Ekkor a szakasz két végpontja nem eshet az E -nek ugyanabba az oldallapjába. Ezért a szakasz minden belső pontja egyben az E -nek is belső pontja, ezért ezek a pontok nem lehetnek csúcspontok. Speciálisan az x pont sem csúcspont, amivel az állítást igazoltuk. $\square$

A konvex alakzatok ugyancsak fontos osztályát az u.n. konvex politopok alkotják. Ezeket véges sok pontnak, az u.n. definiáló pontoknak, a konvex burkaként értelmezzük. A definiáló pontok rendszerét minimálisnak mondjuk, ha konvex burkuk bármely valódi részhalmazuk konvex burkát valódi részhalmazként tartalmazza. Könnyen belátható, hogy minden konvex politophoz létezik minimális definiáló pontrendszer.

A konvex politopok kompakt ponthalmazt alkotnak, míg a konvex poliéderek zártak, de általában nem korlátosak. Ezért a konvex poliéderek általában nem politopok. De később azt is megmutatjuk, hogy a konvex politopok mindig poliéderek, pontosabban fogalmazva a konvex politopok nem mások, mint a kompakt konvex poliéderek.

A konvex poliéderekhez hasonlóan a konvex politopokhoz is definiálható az alakzat dimenziója. Valamely konvex

politopot k -dimenziósnak nevezzük, ha létezik az alakzatot tartalmazó k -dimenziós affin altér, de bármely alacsonyabb dimenzióju affin altér a pontthalmazt nem tartalmazza. Könnyen belátható, hogy valamely k -dimenziós konvex politophoz az alakzatot tartalmazó k -dimenziós affin altér egyértelműen meghatározott.

Tekintsünk egy tetszőleges k -dimenziós P konvex politopot. A P támasz feltételeinek azokat a zárt feltételeket nevezzük, amelyek a P pontthalmazt tartalmazzák. Valamely hiperteret pedig a P támasz hiperterének mondjuk, ha létezik közös pontja a politoppal, valamint az általa meghatározott két zárt féltér közül az egyik támasz féltér. Egy támasz féltérrel lényeges támasz féltérnek nevezünk, ha határoló hipertere k -számu affin független definiáló pontot tartalmaz.

5.4.1 | Az A^n térben minden n -dimenziós konvex politop a lényeges támasz feltételeinek metszeteként áll elő.

Bizonyítás Jelölje S a politop definiáló pontjainak a halmazát, valamint legyen P' a lényeges támasz feltételeknek a metszete. Mivel a P' konvex és $S \subset P'$, ezért $P = \text{conv } S \subseteq P'$.

A teljes bizonyításhoz a $P' \subseteq P$ relációt kell még bizonyítanunk, vagyis azt, hogy ha valamely $\underline{x}$ pont nem esik bele a P halmazba, akkor a P' halmazba sem esik bele. Ezzel tulajdonképpen a $P' \subseteq P$ relációval ekvivalens $\bar{P} \subseteq \bar{P}'$ relációt igazoljuk, ahol $\bar{P} : A^n \setminus P$, $\bar{P}' = A^n \setminus P'$.

A bizonyításhoz rögzítsünk le egy $\underline{x} \in P$ pontot. Mivel a politop n -dimenziós, ezért a definiáló pontoknak léteznek olyan $\underline{c}_{i_1}, \dots, \underline{c}_{i_n}$ részhalmazai, amelyekre az $\underline{x}, \underline{c}_{i_1}, \dots, \underline{c}_{i_n}$ pontok affin függetlenek. Jelölje Q az ilyen $\underline{c}_{i_1}, \dots, \underline{c}_{i_n}$ pontrendszereknek a halmazát, és minden ilyen pontrendszerre jelölje $\text{simpl}(\underline{c}_{i_1}, \dots, \underline{c}_{i_n})$ az általa definiált $(n-1)$ -dimenziós szimplexet.

Tekintsünk most az $\underline{x}$ ponton keresztül olyan ℓ egyenest, amelyik legalább egy ilyen szimplexbe belemetsz, viszont a definiáló pontok bármely $(\underline{c}_{p_1}, \dots, \underline{c}_{p_n})$ affin független részrendszerét tekintve az ℓ nem metsz bele a $\text{simpl}(\underline{c}_{p_1}, \dots, \underline{c}_{p_n})$ szimplex egyetlen $(n-2)$ -dimenziós élébe sem. Ilyen ℓ egyenes nyilván létezik. Ugyanis válasszunk ki először olyan $\underline{c}_{i_1}, \dots, \underline{c}_{i_n}$ pontrendszert, amelyre az $\underline{x}, \underline{c}_{i_1}, \dots, \underline{c}_{i_n}$ pontrendszer affin független. Ezek után tetszőleges $\text{simpl}(\underline{c}_{p_1}, \dots, \underline{c}_{p_n}), \underline{c}_{p_i} \in S$, $(n-1)$ -dimenziós szimplexnek tetszőleges Z $(n-2)$ -dimenziós oldallapját tekintve legyen Z' a Z és az $\underline{x}$ által kifeszített affin altér. Ennek dimenziójára nyilvánvalóan érvényes a $\dim Z' \leq (n-1)$ egyenlőtlenség. Mivel az $\underline{x}, \underline{c}_{i_1}, \dots, \underline{c}_{i_n}$ rendszer affin független pontokból áll, ezért a Z' altér a $\underline{c}_{i_1}, \dots, \underline{c}_{i_n}$ pontok hiperterét olyan Z'' altérben metszi, amelyre $\dim Z'' \leq (n-2)$ érvényes. Ilyen módon a $\underline{c}_{i_1}, \dots, \underline{c}_{i_n}$ pontok hiperterében véges sok Z'' valódi altér keletkezik. Ha már most az $\underline{y} \in \text{simpl}(\underline{c}_{i_1}, \dots, \underline{c}_{i_n})$ pontot úgy választjuk, hogy ne

essék rá egyetlen Z'' altérre sem, akkor az $\underline{x}$, $\underline{y}$ pontok ℓ egyenese az állításnak nyilván megfelelő.

A következő lépésben csak azokat a $\underline{c}_{i_1}, \dots, \underline{c}_{i_n} \in S$ affin független pontokból álló pontrendszereket tekintsük, amelyekre az $\underline{x}$, $\underline{c}_{i_1}, \dots, \underline{c}_{i_n}$ pontok affin függetlenek, és létezik /az egyetlen!/

$$\underline{y}_{i_1 \dots i_n} := \ell \cap \text{simpl}(\underline{c}_{i_1} \dots \underline{c}_{i_n})$$

metszéspont. Majd ezek közül /véges sok ilyen rendszer van!/
 válasszunk ki olyan $\underline{c}_{j_1}, \dots, \underline{c}_{j_n}$ rendszert, amelyre az igaz, hogy az $[\underline{x}, \underline{y}_{j_1 \dots j_n}]$ szakasz belsőjébe már másik $\underline{y}_{i_1 \dots i_n}$ pont nem esik.

Megmutatjuk, hogy a $\underline{c}_{j_1}, \dots, \underline{c}_{j_n}$ pontok H hipertére az S definiáló pontok halmazát elválasztja az $\underline{x}$ ponttól, abban az értelemben, hogy az $\underline{x}$ a H által meghatározott egyik nyílt féltérbe esik, míg az S pontjai az ellentétes zárt féltérbe esnek.

Ezt az állítást indirekt uton bizonyítjuk. Tegyük fel, hogy létezik olyan $\underline{c} \in S$ pont, amelyik a H hipertérnek az $\underline{x}$ által meghatározott nyílt féltérébe esik. Ekkor a $\underline{c}$, $\underline{c}_{j_1}, \dots, \underline{c}_{j_n}$ pontok affin függetlenek. Az $\underline{x}$ pont nem eshet bele a $\text{simpl}(\underline{c}, \underline{c}_{i_1} \dots \underline{c}_{i_n})$ szimplexbe, mert különben $\underline{x} \in \text{conv } S$ teljesülne. Ugyanakkor az ℓ egyenes nem metszi a $\text{simpl}(\underline{c}, \underline{c}_{j_1}, \dots, \underline{c}_{j_n})$ szimplex egyetlen $(n-2)$ -dimenziós élel sem, viszont a $\text{simpl}(\underline{c}_{j_1}, \dots, \underline{c}_{j_n})$ oldallapját belső pontban metszi. A Pasch féle tulajdonság miatt a szimplexnek létezik olyan $\text{simpl}(\underline{c}_{k_1}, \dots, \underline{c}_{k_n})$

állapja, amelyik a c pontot csucspontként tartalmaz-
 valamint ezt a lapot az l egyenes a belső $y_{k_1 \dots k_n}$
 pontban metszi. Nyilvánvalóan adódik, hogy az
 $x, c_{k_1}, \dots, c_{k_n}$ pontok affin függetlenek, továbbá
 $y_{k_1 \dots k_n} \in (x, y_{i_1 \dots i_n})$ is érvényes. Ez pedig ellent-
 mond az $y_{i_1 \dots i_n}$ pontra kirótt feltételnek, tehát a H
 hipertér az S pontjait valóban elválasztja az x pont-
 tól.

Ez utóbbi állítással lényegében azt mutattuk meg,
 hogy létezik olyan lényeges támasz féltér, amelyik az x
 pontot nem tartalmazza, vagyis $x \notin P'$ érvényes. Ezzel a
 tétel bizonyítása teljes. $\square$

5.4.2 | Tetszőleges dimenziós konvex politop véges sok lé-
 nyeges támasz féltér metszeteként áll elő, tehát
 minden konvex politop egyben konvex poliéder.

Bizonyítás A $\dim = n$ esetet az előző tételben vizsgál-
 tuk.

Tekintsünk most egy k -dimenziós P politopot, ame-
 lyik az A^k affin altérben helyezkedik el. Az A^k térben
 a P politop véges sok lényeges támasz féltér metszeteként
 áll elő. Egészítsük ki ezeket a féltereket az A^n tér zárt
 féltéreibé, és jelöljük ezeket az $F_1, \dots, F_l$ jelekkel.

Az A^k affin alteret pedig állítsuk elő $(n - k)$
 számú $H_1 \dots H_{n-k}$ hipertér metszeteként, és minden hiper-
 térre tekintsük az általa meghatározott mindkét zárt félte-
 ret.

Az $F_1, \dots, F_l$ rendszert ezekkel a zárt félterekkel kiegészítve olyan véges sok lényeges támasz féltérhez jutunk, amelyek metszete a P politop. $\square$

Az A^n tér valamely n -dimenziós P politopjából a lényeges támasz félterek határoló hipersíkjai $(n - 1)$ -dimenziós politopokat, a politop u.n. oldallapjait metszik ki. Hasonló módon definiálhatók az oldallapok oldallapjai, amiket $(n - 2)$ -dimenziós éleknek nevezünk. Az eljárást folytatva, a k -dimenziós éleket a $(k + 1)$ -dimenziós élek oldallapjaiként definiáljuk. A 0 -dimenziós éleket csúcspontoknak nevezzük. Ezek az 1 -dimenziós élek végpontjai. A csúcspontokat a politop többi pontjától az a tulajdonság is megkülönbözteti, hogy a csúcspontok kivételével minden ponthoz létezik a politopba eső olyan szakasz, amelyik az adott pontot belső pontként tartalmazza. Nyilvánvaló, hogy a csúcspontokhoz ilyen szakasz sosem létezik.

5.4.3 Minden kompakt konvex poliéder csucsainak konvex burkaként áll elő. Tehát a konvex politopok osztálya egybeesik a kompakt konvex poliéderek osztályával.

Bizonyítás Mindenek előtt megjegyezzük, hogy a korlátosság miatt minden kompakt konvex poliéder minden oldallapja is konvex kompakt poliéder, ezért csúcspontok biztosan léteznek.

Jelölje P^* a P kompakt konvex poliéder csúcspontjainak konvex burkát.

Mivel a P konvex, ezért a $P^* \subseteq P$ reláció nyilvánvalóan teljesül. A teljes bizonyításhoz a $P^* = P$ azonosságot kell igazolnunk.

Az állítást indirekt úton bizonyítjuk. Tegyük fel, hogy a P^* valódi része a P ponthalmaznak. Ebből azt az ellentmondást fogjuk bebizonyítani, hogy a P^* nem tartalmazza a P összes csucseit.

Legyen az $\underline{x} \in P$ olyan pont, amelyre $\underline{x} \notin P^*$ teljesül. Az 5.4.1 tétel bizonyítása alapján a P^* politop valamely H lényeges támasz hipertere a P^* politopot az $\underline{x}$ ponttól abban az értelemben választja el, hogy a P^* politop a H -hoz tartozó egyik zárt féltérbe, míg az $\underline{x}$ pont az ellenkező nyílt féltérbe esik. Mozgassuk a H hiperteret az $\underline{x}$ felé, és azon túl is úgy, hogy párhuzamos maradjon az eredeti pozíciójával. A P kompaktsága miatt létezik egy „utolsó” H' pozíció, amikor a H' a P poliédert még metszi, de utána már nem metszi. Az $\underline{x} \notin P^*$ miatt a H' nem metszi a P^* politopot, a P poliédereből pedig a P' kompakt konvex poliédert metszi ki. Azonnal látható, hogy a P' minden csucsa a P poliédernek is csucsa. Ugyanis, ha egy ilyen csucsponthoz létezne olyan P -ben haladó szakasz, amelyik az adott csucst belső pontként tartalmazná, ekkor ez a szakasz nem metszhetné a H' hiperteret, mert ekkor a P „tulnyulna” H' hipertéren. De a H' hipertérben sem haladhat, mert akkor a tekintett pont nem lehetne a P' csucsa. Tehát ilyen szakasz

nem létezik, és a P' minden csúcsa egyben a P csúcsa is. Mivel ezeket a csúcsoakat a P^* nem tartalmazza, ezzel a korábban jelzett ellentmondást beláttuk. $\square$

A fenti tételből nyilvánvalóan következik, hogy az affin alterek a konvex politopokból mindig konvex politopokat metszenek ki.

5 § Euler tétele konvex politopokra

Tekintsünk egy konvex politopot, és jelölje c_i az i -dimenziós éleinek a számát. Ha a politop n -dimenziós, akkor magát a politopot n -dimenziós élnek számítjuk, ezért $c_n = 1$. A c_i mennyiségekre a következő u.n. Euler formula érvényes.

5.5.1 Minden n -dimenziós konvex politopra érvényes a

$$c_0 - c_1 + \dots + (-1)^n c_n = 1$$

összefüggés.

Bizonyítás A tétel bizonyítását a politop dimenziója szerinti teljes indukcióval végezzük el.

Ha $n = 1$, akkor a politop szakasz, ezért $c_0 = 2$ és $c_1 = 1$. Tehát ebben az esetben az Euler formula triviálisan érvényes.

Legyen $n > 1$ tetszőleges természetes szám, és tegyük fel, hogy az Euler féle összefüggés minden n -nél kisebb dimenzióju konvex politopra érvényes. Bebizonyítjuk,

hogy ebből a feltételből következően az összefüggés az n -dimenziós konvex politopokra is érvényes.

Legyen tehát a P n -dimenziós konvex politop, amelyről az éltalánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy az n -dimenziós A^n térben helyezkedik el.

Vegyünk fel a P csucsain keresztül olyan egymással párhuzamos hipertereket, amelyek közül mindegyik pontosan egy csucspontot tartalmaz. Ezek a hiperterek bizonyos sorrendben követik egymást, és e sorrendnek megfelelően jelöljük ezeket a $H_1, H_3, \dots, H_{2c_0-1}$ jelekkel. A hipertereknek ez a sorrendje az A_i csucsoknak is egy $A_1, A_2, \dots, A_{c_0}$ sorrendjét definiálja, mégpedig úgy, hogy $A_i \in H_{2i-1}$ teljesül.

Vegyünk fel minden két szomszédos H_{2i-1}, H_{2i+1} hipertér között egy velük párhuzamos H_{2i} hiperteret is. Ekkor a $H_1, H_2, \dots, H_{2c_0-1}$ hiperterek közül az első és az utolsó csucspontban metszi a politopot, az összes többi H_i hipertér pedig egy $(n-1)$ -dimenziós P_i konvex politopot metsz ki. Jelölje c_j^i a P_i politop j -dimenziós éleinek a számát. Az indukciós feltétel miatt minden P_i metszetre /az elsőre és utolsóra is!/ felírhatjuk az Euler féle formulát. Ekkor a következő egyenletekhez jutunk

$$\begin{aligned} 1 &= 1, \\ c_0^i - c_1^i + \dots + (-1)^{n-1} c_{n-1}^i &= 1, \quad i = 2, 3, \dots, 2c_0-2, \\ 1 &= 1 \end{aligned}$$

Adjuk össze ezeket az egyenleteket alternálva, vagyis

az i -ik egyenlet az összegzésnél a $(-1)^{i-1}$ előjellel szerepeljen. Megmutatjuk, hogy ez az összeg nem más, mint az n -dimenziós konvex politopokra vonatkozó Euler formula.

Mivel páratlan sok egyenlet szerepel, ezért a jobboldalon az alternáló összeg értéke 1.

Számoljuk ki a baloldalon szereplő

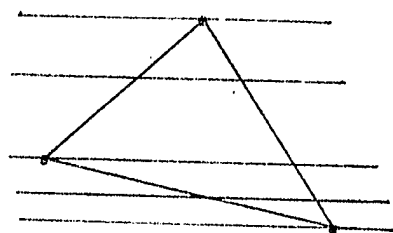
$$(*) \quad \sum_{i=1}^{2c_0-2} (-1)^{i+j-1} c_j^i, \quad j = 0, 1, \dots, n-1$$

alternáló részösszegeket is.

A $j = 0$ indexre a kimetszett csucsokat számoljuk össze, természetesen alternálva. Ezeket a csucsokat a H_i hipertérek a P 1-dimenziós éleiből metszik ki. Egy 1-dimenziós élét mindig páratlan számú hipertér metsz, és belső pontjában is mindig páratlan számú hipertér metszi. Ezért ha egy él mentén a belső kimetszett csucsokat alternálva számoljuk össze, akkor ez az összeg mindig -1, mivel az összeszámlálás mindig a -1 értékkel kezdődik. Ezért az összes olyan kimetszett csucs alternáló összege, amelyek a P valamely 1-dimenziós élének belső pontjai, a $-c_1$ értékkel egyenlő. Mivel a csucsok alternáló összegében a P eredeti csucsai mindig +1 értékkel szerepelnek, ezért az összes kimetszett csucsra vonatkozó alternáló összeg értéke $c_0 - c_1$.

Végezetül megmutatjuk, hogy a $j \geq 1$ esetben a (*) alternáló összeg értéke $(-1)^{j+1} c_{j+1}$.

Ebben az esetben a kimetszett j -dimenziós élek alternáló összegét kell kiszámolnunk. Ezeket az éleket a hiperterek a $P(j+1)$ -dimenziós éleiből metszik ki. Tekintsük a P valamely $(j+1) (\geq 2)$ -dimenziós élet. Ezt



páratlan számú hipertér metszi. Ezek közül az első és az utolsó egy-egy csúcspontot, a többi pedig egy j -dimenziós élet metsz ki. A lapból

kimetszett élek alternáló összegének számolását mindig a $(-1)^{j+1}$ értékkel kezdjük, ezért egy lap mentén /páratlan sok kimetszett él lévén/ az alternáló összeg értéke $(-1)^{j+1}$. Az előjeles összeszámlálást minden $(j+1)$ -dimenziós él mentén elvégezve az alternáló részösszeg értékére valóban a $(-1)^{j+1} c_{j+1}$ érték adódik.

Ezzel a teljes indukciós bizonyítást befejeztük. □

A két- és három-dimenziós esetben az Euler formulára a fentínél egyszerűbb bizonyítás is adható.

A két-dimenziós esetben a politopnak ugyanannyi csúcsa van, mint éle, ezért a formula nyilvánvalóan érvényes.

A három-dimenziós esetben pedig a következő gondolatmenet is alkalmazható.

A 3 -dimenziós politop oldallapjait tekintsük országoknak, amelyek határait az élek alkotják. Készítsünk erről a „földgömbről” térképet a következő módszerrel. Huzzunk be először egy élet. Ebben a kezdő helyzetben

$c_0 = 2, c_1 = 1, c_2 = 1$ teljesül, tehát $c_0 - c_1 + c_2 = 2$ érvényes. A többi éleket úgy húzzuk be, hogy vagy egy már berajzolt csucstól még be nem rajzolt csuccsal kötünk össze, vagy két már berajzolt csucstól kötünk össze. Az első esetben a c_0 és a c_1 értékek eggyel nőnek a c_2 pedig változatlan marad. A második esetben pedig a c_0 változatlan, míg a c_1 és a c_2 értékek nőnek eggyel. Mindkét esetben a $c_0 - c_1 + c_2$ érték változatlan marad, tehát az egész politopra $c_0 - c_1 + c_2 = 2$, vagyis $c_0 - c_1 + c_2 - c_3 = 1$ érvényes.

6 § Lineáris leképezések és invariánsaik

Az A^n tér valamely $\alpha: A^n \rightarrow A^n$ leképezését lineárisnak, ha homogén és additív, vagyis minden $\lambda \in \mathbb{R}$ valós számra és $\underline{x}, \underline{y} \in A^n$ vektorokra az

$$\alpha(\lambda \underline{x}) = \lambda \alpha(\underline{x}),$$

$$\alpha(\underline{x} + \underline{y}) = \alpha(\underline{x}) + \alpha(\underline{y})$$

tulajdonságok érvényesek.

Minden lineáris leképezésnél az 0 origó önmagára transzformálódik. Ugyanis az additivitás miatt

$$\alpha(\underline{0}) = \alpha(\underline{0} + \underline{0}) = \alpha(\underline{0}) + \alpha(\underline{0})$$

adódik, amiből $\alpha(\underline{0}) = \underline{0}$ következik.

Tekintsünk az A^n térben egy $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ bázist. A báziselemek valamely α lineáris leképezésre vett képét az

$$(5.6.1) \quad \alpha(\underline{a}_i) = \sum_{j=1}^n \alpha_i^j \underline{a}_j$$

alakban írhatjuk fel. Az így nyert (α_i^j) mátrixot az α lineáris leképezésnek az $(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n)$ bázisra vonatkozó mátrixának nevezzük.

Az α lineáris leképezést a mátrixa egyértelműen meghatározza. Ugyanis

ha $\underline{x} = \sum_{i=1}^n x^i \underline{a}_i$ tetszőleges vektor, akkor

$$\alpha(\underline{x}) = \sum_{i=1}^n x^i \alpha(\underline{a}_i) = \sum_{i,j=1}^n x^i \alpha_i^j \underline{a}_j,$$

vagyis a képvektornak az adott bázisra vonatkozó koordinátái az

$$(5.6.2) \quad \begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \dots & \alpha_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_1^n & \dots & \alpha_n^n \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix}$$

mátrix-szorzással adódnak. Megjegyezzük, hogy a fenti (α_i^j) mátrix i -ik oszlopában az $\alpha(\underline{a}_i)$ vektornak az $(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n)$ bázisra vonatkozó koordinátái szerepelnek. Az is nyilvánvalóan látható, hogy két lineáris leképezés szorzatának mátrixa a két mátrix szorzatmátrixával egyezik meg.

Tekintsünk az A^n térben egy újabb $\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n$ bázist. A bázisvektorokat a régi $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ bázisban kifejtve a

$$(5.6.3) \quad \underline{b}_j = \sum_{k=1}^n b_j^k \underline{a}_k, \quad j = 1, \dots, n,$$

egyenletekhez jutunk. Lineáris algebrából jól ismert, hogy a (b_j^k) mátrix invertálható és az

$$(5.6.4) \quad \underline{a}_j = \sum_{k=1}^n (b^{-1})_j^k \underline{b}_k$$

inverz formula is érvényes.

Határozzuk meg az α lineáris leképezés mátrixát az új $(\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n)$ bázisra vonatkozóan is. Ez az újabb (β_j^i) mátrix általában különbözik az $(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n)$ bázisra vonatkozó (α_j^i) mátrixtól, és közöttük a következő összefüggés érvényes.

5.6.1 | Az α lineáris leképezés $(\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n)$ bázisra vonatkozó (β_j^i) mátrixa az $(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n)$ bázisra vonatkozó (α_j^i) mátrixból a

$$(5.6.5) \quad (\beta_j^i) = (b^{-1})_k^j (\alpha_r^k) (b_i^r)$$

mátrix-szorzással áll elő, ahol a (b_j^k) mátrix az

(5.6.3) kifejtéssel nyert u.n. átmenet mátrix.

Bizonyítás Az (5.6.3) és (5.6.4) képletek alapján az

$$\begin{aligned} \alpha(\underline{b}_i) &= \alpha\left(\sum_{j=1}^n b_i^k \underline{a}_k\right) = \sum_{r=1}^n b_i^r \alpha(\underline{a}_r) = \sum_{r,k=1}^n b_i^r \alpha_r^k \underline{a}_k = \\ &= \sum_{r,k,j=1}^n b_i^r \alpha_r^k (b^{-1})_k^j \underline{b}_j \end{aligned}$$

átalakításokat végezhetjük el. Ez az egyenlet a bizonyítandó (5.6.5) formulát igazolja. $\square$

A fenti tételből azonnal következik, hogy az α lineáris leképezés különböző bázisra vonatkozó mátrixainak determinánsai megegyeznek egymással. Ezt az egyértelműen meghatározott determináns értéket az α determinánsának nevezzük és $\det \alpha$ jellel jelöljük.

Mint látható, a bázis-változtatások a lineáris leképezések mátrixát általában megváltoztatják. Azonban ezeknek a változó mátrix-komponenseknek a segítségével olyan mennyiségek definiálhatók, amelyek változatlanok a bázis-transzformációkra nézve, és így a lineáris leképezésekre vonatkozóan egyértelműen meghatározottak. Az ilyen típusu mennyiségeket a lineáris leképezések invariánsainak nevezzük. A $\det \alpha$ mennyiség mellett később további invariánsokat is levezetünk.

Valamely α lineáris leképezést nem-elfajulónak mondunk, ha különböző vektorokat különböző vektorokba transzformál.

Könnyen beláthatjuk, hogy egy α lineáris leképezés akkor és csak akkor nem fajul el, ha zérustól különböző vektorok zérustól különböző vektorokba transzformálódnak.

Ha pedig a lineáris leképezést az (5.6.2) koordináta transzformációs alakra írjuk át, akkor a lineáris egyenletrendszerek elméletéből azonnal adódnak a következő állítások.

5.6.2 | Valamely α lineáris leképezés akkor és csak akkor
| nem-elfajuló, ha $\det \alpha \neq 0$, érvényes.
| Minden nem-elfajuló lineáris leképezés bijekció.

Valamely $\underline{x} \neq 0$ vektort az α lineáris leképezés saját vektorának nevezzük, ha az α nem változtatja meg az $\underline{x}$ irányát, vagyis létezik olyan $\lambda \in \mathbb{R}$ valós szám, amelyre $\alpha(\underline{x}) = \lambda \underline{x}$ érvényes. Az $\underline{x}$ sajátvektorhoz tartozó λ értéket az $\underline{x}$ irányához tartozó sajátértéknek hívjuk.

Egy $\lambda \in \mathbb{R}$ valós szám az α lineáris leképezésnek akkor és csak akkor sajátértéke, ha az

$$(5.6.6) \quad (\alpha - \lambda \text{id})(\underline{x}) = 0$$

egyenletnek létezik zérustól különböző megoldása az ismeretlen $\underline{x}$ vektorra nézve.

A térben egy $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ bázist választva, ez az egyenlet a következő koordinátákra vonatkozó homogén lineáris egyenletrendszerre írható át

$$\begin{pmatrix} \alpha_1^1 - \lambda & \dots & \alpha_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_1^n & \dots & \alpha_n^n - \lambda \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

ahol (α_i^j) az α mátrixa az adott bázisra vonatkozóan. Ismeretes, hogy minden ilyen homogén lineáris egyenletrendszernek pontosan akkor létezik nem-triviális megoldása, ha együttható mátrixának determinánsa eltűnik. Itt az együttható mátrix nem más, mint az $\alpha - \lambda \text{id}$ lineáris leképezésnek az adott bázisra vonatkozó mátrixa, és ennek determinánsa pedig a λ változóban n -ed fokú

$$\det(\alpha - \lambda \text{id}) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} \sigma_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots \\ \dots + (-1)^1 \sigma_1 \lambda + \sigma_0$$

polinom, ahol a $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ együtthatók az (α_j^i) mátrix komponensei segítségével írhatók fel. Például a σ_0 együttható nem más, mint az (α_j^i) mátrix determinánsa, a σ_{n-1} mennyiség pedig az (α_j^i) mátrix főátlójában szereplő komponensek összege: $\sigma_{n-1} = \sum_{i=1}^n \alpha_i^i$. Mivel a

$\det(\alpha - \lambda \text{id})$ mennyiség független a bázis választásától, ezért az (α_j^i) komponensei segítségével felírt

$\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ mennyiségek is függetlenek a bázis választásától, és az α lineáris leképezésre vonatkozóan egyértelműen meghatározottak. A $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ mennyiségeket az α teljes invariáns rendszerének nevezzük, a σ_{n-1} mennyiségre pedig a leképezés nyoma elnevezést is használjuk. Ez utóbbi jelölésére általában a német szakirodalomból átvett $\text{Spur } \alpha$ vagy az angol szakirodalomból átvett $\text{Trace } \alpha$ jelölést használják.

Ezzel a sajátértékre vonatkozóan a következő állítást bizonyítottuk be.

5.6.3 Valamely $\lambda \in \mathbb{R}$ valós szám az α lineáris leképezésnek akkor és csak akkor sajátértéke, ha a λ gyöke az α

$$(5.6.8) \quad \lambda^n + (-1)^1 \sigma_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + (-1)^{n-1} \sigma_1 \lambda + \\ + (-1)^n \sigma_0$$

u.n. karakterisztikus polinomjának.

7 § Affinitások

Az A^n térben egy $\alpha: A^n \rightarrow A^n$ bijekciót affinitás-nak nevezünk, ha egyenest egyenesbe transzformál.

Legyen $\alpha': A^n \rightarrow A^n$ tetszőleges nem-elfajuló lineáris leképezés, a $\underline{p} \in A^n$ pedig tetszőleges vektor. Ekkor az

$$(5.7.1) \quad \alpha(\underline{x}) := \alpha'(\underline{x}) + \underline{p}$$

alakban felírt leképezés affinitás, ugyanis az 5.6.2 tétel miatt az α bijekció, továbbá az $\underline{x}, \underline{y}$ különböző pontokra illeszkedő $t \underline{x} + (1-t) \underline{y}$, $-\infty < t < \infty$, egyenest az $\alpha(\underline{x}), \alpha(\underline{y})$ pontokra illeszkedő egyenesbe transzformálja.

Megmutatjuk, hogy minden affinitás az (5.7.1) alakban állítható elő.

5.7.1 | Ha valamely $\alpha: A^n \rightarrow A^n$ affinitás az 0 origót fixen hagyja, akkor az α nem-elfajuló lineáris leképezés.

Bizonyítás Először megmutatjuk, hogy az α 2-dimenziós síkokat 2-dimenziós síkokra, továbbá párhuzamos egyeneseket párhuzamos egyenesekbe transzformál.

Legyen S tetszőleges 2-dimenziós sík, és vegyünk fel ebben két metsző a és b egyenest. Az $\alpha(a)$ és $\alpha(b)$ egyenesek ismét metszőt és jelölje S' a rájuk fektetett 2-dimenziós síkot. Az S valamely $\underline{x} (\notin a, \notin b)$ pontján keresztül huzzunk olyan ℓ egyenest, amelyik az

a, b egyeneseket két különböző pontban metszi. Ekkor az ℓ képe olyan ℓ' egyenes, amelyik az $\alpha(a), \alpha(b)$ egyeneseket két különböző pontban metszi. Tehát az ℓ' az S' síkra illeszkedik az $\underline{x}$ pont $\underline{x}'$ képével együtt. Ezzel beláttuk, hogy az S sík képe az S' sík.

Ha c és d az S síkban két egymással párhuzamos egyenes, akkor az α bijektív tulajdonsága miatt ezek c, d képei is párhuzamosak az S síkban. Tehát az párhuzamos egyeneseket párhuzamos egyenesekbe transzformál.

A következő lépésben megmutatjuk, hogy az α additív, vagyis minden $\underline{x}, \underline{y}$ vektorra $\alpha(\underline{x} + \underline{y}) = \alpha(\underline{x}) + \alpha(\underline{y})$ érvényes.

Mivel párhuzamos egyenesek párhuzamos egyenesekbe transzformálódnak, ezért paralelogrammák képei is paralelogrammák. Így ha $\underline{x}$ és $\underline{y}$ különböző irányú vektorok, akkor a $\underline{Q}, \underline{x}, \underline{y}, \underline{x} + \underline{y}$ pontok által meghatározott paralelogramma a $\underline{Q}, \alpha(\underline{x}), \alpha(\underline{y}), \alpha(\underline{x}) + \alpha(\underline{y})$ pontok által meghatározott paralelogrammába transzformálódik, amiből az $\alpha(\underline{x} + \underline{y}) = \alpha(\underline{x}) + \alpha(\underline{y})$ azonosság következik.

Az azonos irányú $\underline{x}, \underline{y}$ vektorokra vonatkozó additív tulajdonságot a következőképpen igazolhatjuk.

Először lássuk be az $\alpha(-\underline{x}) = -\alpha(\underline{x})$ azonosságot.

Szerkesszünk az $[\underline{x}, -\underline{x}]$ szakasz mint átló fölé egy paralelogrammát. A másik átló ezt az átlót az $\underline{Q}$ felező pontban metszi. A paralelogramma képe olyan paralelogramma, amelynek $[\alpha(\underline{x}), \alpha(-\underline{x})]$ átlóját a másik átló az $\underline{Q}$

felezőpontban metszi. Ezért valóban érvényes az

$\alpha(-\underline{x}) = -\alpha(\underline{x})$ azonosság, amiből az $\alpha(\underline{x} + (-\underline{x})) =$
 $= \alpha(\underline{x}) + \alpha(-\underline{x}) = 0$ additív tulajdonság következik.

Ha pedig $\underline{x}$ és $\underline{y}$ olyan azonos irányú vektorok, amelyekre $\underline{y} \neq -\underline{x}$ érvényes, akkor választható olyan e-zektől független $\underline{z}$ vektor, amelyre az $\underline{x} + \underline{z}$ és $\underline{y} - \underline{z}$ vektorok is lineárisan függetlenek. Ilyen $\underline{z}$ vektort választva a következő átalakítások végezhetők el:

$$\begin{aligned}\alpha(\underline{x} + \underline{y}) &= \alpha((\underline{x} + \underline{z}) + (\underline{y} - \underline{z})) = \alpha(\underline{x} + \underline{z}) + \\ &+ \alpha(\underline{y} - \underline{z}) = \alpha(\underline{x}) + \alpha(\underline{z}) + \alpha(\underline{y}) - \alpha(\underline{z}) = \\ &= \alpha(\underline{x}) + \alpha(\underline{y}),\end{aligned}$$

amivel az additivitás tulajdonságát minden esetre vonatkozóan bebizonyítottuk.

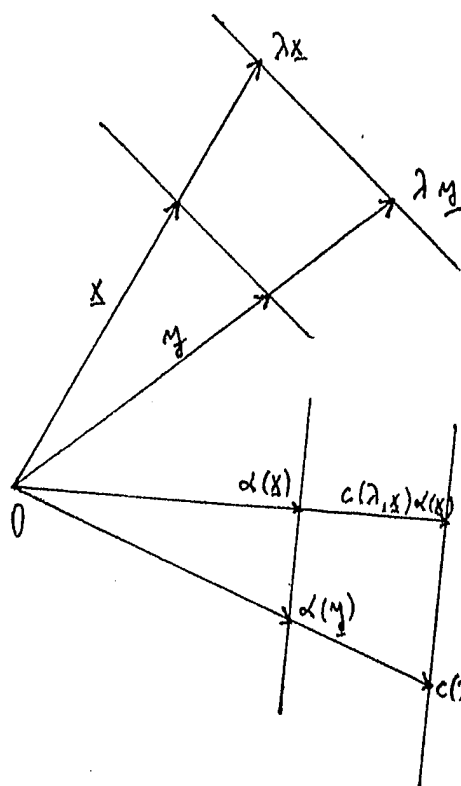
Az α az origóra illeszkedő egyeneseket origóra illeszkedő egyenesekbe transzformálja, ezért az

$$\alpha(\lambda \underline{x}) = c(\lambda, \underline{x}) \alpha(\underline{x}),$$

azonosság írható fel, ahol a $c(\lambda, \underline{x})$ valós szám, a λ -tól és az $\underline{x}$ vektortól is függhet.

A homogenitás bizonyításához a $c(\lambda, \underline{x}) = \lambda$ azonosságot kell igazolnunk.

Először belátjuk, hogy a $c(\lambda, \underline{x})$ függvény nem függ az $\underline{x}$ változótól, ezért $c(\lambda)$ alakban írható.



Ha az $\underline{x}$ és $\underline{y}$ különböző irányú vektorok, akkor a párhuzamos szelők tétele miatt, az $\underline{x}$, $\underline{y}$ vektorok végpontjaira fektetett egyenes párhuzamos a $\lambda \underline{x}$, $\lambda \underline{y}$ vektorok végpontjaira fektetett egyenessel. Mivel párhuzamos egyenesek párhuzamos egyenesekbe transzformálódnak, ezért az $\alpha(\underline{x})$, $\alpha(\underline{y})$ vektorok végpontjaira illeszke-

dő egyenes párhuzamos a $c(\lambda, \underline{x})\alpha(\underline{x})$, $c(\lambda, \underline{y})\alpha(\underline{y})$ vektorokra fektetett egyenessel. Ismét párhuzamos szelők tétele miatt $c(\lambda, \underline{x}) = c(\lambda, \underline{y})$ adódik. Ha pedig az $\underline{x}$ és $\underline{y}$ vektorok lineárisan függők, akkor tőlük független $\underline{z}$ vektort választva

$$c(\lambda, \underline{x}) = c(\lambda, \underline{z}) = c(\lambda, \underline{y})$$

adódik, tehát a $c(\lambda, \underline{x})$ függvény valóban nem függ az $\underline{x}$ változótól.

Bebizonyítjuk, hogy a $c(\lambda)$ függvény additív és multiplikatív, vagyis érvényesek a

$$c(\lambda_1 + \lambda_2) = c(\lambda_1) + c(\lambda_2),$$

$$c(\lambda_1 \lambda_2) = c(\lambda_1) c(\lambda_2)$$

azonosságok.

Tetszőleges $\underline{x} \neq 0$ vektort választva a következő átalakítások végezhetők el:

$$c(\lambda_1 + \lambda_2) \alpha(\underline{x}) = \alpha((\lambda_1 + \lambda_2) \underline{x}) = \alpha(\lambda_1 \underline{x} + \lambda_2 \underline{x}) = \\ = \alpha(\lambda_1 \underline{x}) + \alpha(\lambda_2 \underline{x}) = (c(\lambda_1) + c(\lambda_2)) \alpha(\underline{x}),$$

$$c(\lambda_1 \lambda_2) \alpha(\underline{x}) = \alpha(\lambda_1 \lambda_2 \underline{x}) = c(\lambda_1) \alpha(\lambda_2 \underline{x}) = \\ = c(\lambda_1) c(\lambda_2) \alpha(\underline{x}).$$

Mivel az α bijekció, ezért $\alpha(\underline{x}) \neq 0$. A két egyenletből együttható összehasonlítással a $c(\lambda)$ additív ill. multiplikatív tulajdonsága következik.

A $c(\lambda)$ definíciójából közvetlenül beláthatók a $c(0) = 0$, $c(1) = 1$ azonosságok. Legyen $\lambda > 0$ pozitív valós szám. A multiplikatív tulajdonságot felhasználva

$$c(\lambda) = c(\sqrt{\lambda} \cdot \sqrt{\lambda}) = (c(\sqrt{\lambda}))^2 \geq 0$$

adódik, tehát a $c(\lambda)$ nem-negatív értékeken nem negatív értékeket vesz fel. Ebből pedig bebizonyítható, hogy a $c(\lambda)$ monoton nő. Valóban, tetszőleges $\lambda^* > 0$ pozitív valós számra

$$c(\lambda + \lambda^*) = c(\lambda) + c(\lambda^*) \geq c(\lambda)$$

érvényes, ami a monoton növekedést igazolja.

A függvényegyenlet - lemma alapján a $c(\lambda)$ függvény lineáris, és a $c(1) = 1$ azonosság miatt $c(\lambda) = \lambda$ érvényes. Ezzel bebizonyítottuk, hogy az α leképezés homogén.

Mivel az α bijekció, ezért minden $\underline{x} \neq 0$ vektorra $\alpha(\underline{x}) \neq 0$ teljesül. Tehát az α nem-elfajuló lineáris leképezés, és a tétel bizonyítását befejeztük. □

5.7.2 Az A^n tér minden α affinitása egyértelműen az

$$\alpha(\underline{x}) = \alpha'(\underline{x}) + \underline{p}$$

alakban állítható elő, ahol az α' nem-elfajuló lineáris leképezés a $\underline{p}$ pedig vektor.

Bizonyítás Az $\alpha(\underline{x}) - \alpha(\underline{0})$ affinitás az origót fixen hagyja, ezért ez az affinitás nem-elfajuló lineáris leképezés. Tehát az α valóban a fenti alakban áll elő, ahol $\alpha(\underline{0}) = \underline{p}$.

Mivel minden fenti alakban felírt affinitásnál a $\underline{p}$ nem más, mint az origó képének helyzetvektora, ezért valamely α affinitásra nézve a $\underline{p}$ is és az α' is egyértelműen meghatározott. $\square$

A következő tételt az affinitások alaptételének nevezzük.

5.7.3 Az affinitások affin független pontokat affin független pontokba transzformálnak és az A^n tér minden $(\underline{a}_0, \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n), (\underline{b}_0, \underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n)$ affin független pontokból álló pontrendszereihez egy és csak egy affinitás létezik, amelyik az $\underline{a}_i$ pontokat rendre a $\underline{b}_i$ pontba transzformálja.

Bizonyítás Tekintsünk az A^n térben egy $\alpha(\underline{x}) = \alpha'(\underline{x}) + \underline{p}$ affinitást és egy $(\underline{a}_0, \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k)$ affin független pontrendszert. Ha a pontrendszer képét $(\underline{b}_0, \underline{b}_1, \dots, \underline{b}_k)$ jelöli, akkor az α' lineáris leképezés az $\underline{a}_i - \underline{a}_0$ vektorokat a $\underline{b}_i - \underline{b}_0$ vektorokba transzformálja. Mivel az

α nem-elfajuló, ezért a $\underline{b}_i - \underline{b}_0$ vektorok lineárisan függetlenek és ezért a $\underline{b}_0, \underline{b}_1, \dots, \underline{b}_k$ pontrendszer affin független.

Ha pedig $(n + 1)$ -számu affin független $\underline{a}_0, \dots, \underline{a}_n$ pontot tekintünk akkor a α' lineáris leképezés az $(\underline{a}_1 - \underline{a}_0, \dots, \underline{a}_n - \underline{a}_0)$ bázist a $(\underline{b}_1 - \underline{b}_0, \dots, \underline{b}_n - \underline{b}_0)$ bázisba transzformálja, valamint $\underline{p} = \underline{b}_0 - \alpha'(\underline{a}_0)$ is teljesül. Mivel egy adott bázist egy másik adott bázisba transzformáló lineáris leképezések egyértelműen meghatározottak, ezért tetszőleges $(\underline{a}_0, \dots, \underline{a}_n), (\underline{b}_0, \dots, \underline{b}_n)$ affin független pontrendszerekhez egy és csak egy α affinitás létezik, amelyre $\alpha(\underline{a}_i) = \underline{b}_i$, $i = 0, \dots, n$, teljesül. Ez az affinitás $\alpha'(\underline{x}) + \underline{p}$ alakban áll elő, ahol α' az az egyértelműen meghatározott lineáris leképezés, amelyik az $(\underline{a}_1 - \underline{a}_0, \dots, \underline{a}_n - \underline{a}_0)$ bázist a $(\underline{b}_1 - \underline{b}_0, \dots, \underline{b}_n - \underline{b}_0)$ bázisba transzformálja, valamint $\underline{p} = \underline{b}_0 - \alpha'(\underline{a}_0)$ is teljesül. $\square$

A fenti tételből egyszerűen következik, hogy az affinitások k -dimenziós affin altereket k -dimenziós affin alterekbe visznek, mégpedig valamely affin független pontokra illeszkedő affin alteret a képpontokra illeszkedő affin altérbe transzformálják.

Tekintsünk két affin független $\underline{x}, \underline{y}$ pontot. A rájuk illeszkedő $t \underline{x} + (1 - t) \underline{y}$ egyenest az $\alpha(\underline{x}) = \alpha'(\underline{x}) + \underline{p}$ affinitás a $t \alpha(\underline{x}) + (1 - t) \alpha(\underline{y})$ egyenesbe transzformálja.

Ebből pedig nyilvánvalóan következik, hogy az affinitások az osztásviszonyt is invariánsan hagyják, mivel az egyenesek affin paraméterezéseit affin paraméterezésekbe viszik át.

A következő tételekben az affinitásokat affin koordináta rendszerekben írjuk le.

5.7.4 Az affin tér valamely $(x_1, \dots, x_n)$ affin koordináta rendszerében az affinitások az

$$(5.7.2) \quad x'^i = \sum_{j=1}^n \alpha_j^i x^j + p^i, \quad i = 1, \dots, n,$$

alaku koordináta transzformációknak felelnek meg, ahol az (α_j^i) nem-elfajuló mátrix.

Ha az $(y^1, \dots, y^n)$ másik affin koordináta rendszer, amelyre $x^i = \sum_{j=1}^n A_j^i y^j + d^i$,

$\det(A_j^i) \neq 0$, teljesül, akkor az (5.7.2) affinitásnak ebben az új koordináta rendszerben vett alakja a következő:

$$(5.7.3) \quad y'^q = \sum_{i,j=1}^n A^{-1q}_i \alpha_j^i A^j_\ell y^\ell + \sum_{i,j=1}^n A^{-1q}_i (\alpha_j^i d^j + p^i - d^i), \quad q = 1, \dots, n.$$

Bizonyítás Tekintsünk az alaptérben egy $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ bázist. Ha a vektorok $\underline{x}^1, \dots, \underline{x}^n$ koordinátáit erre a bázisra vonatkozóan határozzuk meg, akkor olyan affin koordináta rendszert kapunk, amelynek origója a $\underline{0}$ vektor. Az 5.7.2 tétel alapján minden ilyen koordináta rendszerben az α affinitást az (5.7.2) formulával írhatjuk fel.

Az is világos, hogy minden (5.7.2) formában felírt transzformáció affinitás.

Vegyünk fel most egy másik $(y^1, \dots, y^n)$ affin koordináta rendszert, amelyik az előbbi rendszerrel az

$$x^i = \sum_{j=1}^n A_j^i y^j + d^i, \quad \det (A_j^i) \neq 0, \quad i = 1; \dots; n,$$

egyenletekkel függ össze. Ekkor az (5.7.2) formula a következőképpen transzformálódik:

$$\sum_{j=1}^n A_j^i y'^j + d^i = \sum_{j,l=1}^n \alpha_j^i (A_l^j y^l + d^j) + p^i, \quad i=1, \dots, n,$$

amiből

$$y'^q = \sum_{i,j,l=1}^n (A^{-1q}_i \alpha_j^i A_l^j) y^l + \sum_{i,j=1}^n A^{-1q}_i (\alpha_j^i d^j + p^i - d^i),$$

$$q = 1; \dots; n,$$

adódik. Ezzel beláttuk, hogy minden affin koordináta rendszerben az affinitások (5.7.2) alakúak, és az (5.7.3) transzformációs formulát is bebizonyítottuk. $\square$

Állítsunk elő egy α affinitást az (5.7.2) alakban. Az (5.7.3) transzformációs formula alapján a $\det \alpha_j^i$ mennyiség egyértelműen meghatározott, és nem függ attól, hogy az affinitást melyik affin koordináta környezetben állítjuk elő.

Ezt a mennyiséget az α affinitás determinánsának nevezzük, és $\det \alpha$ jellel jelöljük.

A $\det \alpha$ mennyiség különbözik a zérustól. Ha $\det \alpha > 0$, akkor az α affinitést irányítástartónak, ha pedig $\det \alpha < 0$, akkor irányításfordítónak nevezzük.

Az elnevezés geometriai tartalmára a következő paragrafusban mutatunk rá.

8 § Térfogatformák és irányítás. Térfogattartó affinitások

Tekintsük az A^n vektortérből képezett r -tagu

$$A^n \times A^n \times \dots \times A^n$$

Descartes szorzatot. Minden $\omega: A^n \times \dots \times A^n \rightarrow \mathbb{R}$ valós függvény az $\omega(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_r)$ alakban írható. Az ω leképezést multilineárisnak, vagy más szóval r -lineárisnak mondjuk, ha mindegyik komponensében homogén és additív, vagyis az

$$(5.8.1) \quad \begin{aligned} \omega(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_i + \underline{y}_i, \dots, \underline{x}_r) &= \omega(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_i, \dots, \underline{x}_r) + \\ &+ \omega(\underline{x}_1, \dots, \underline{y}_i, \dots, \underline{x}_r), \end{aligned}$$

$$\omega(\underline{x}_1, \dots, \lambda \underline{x}_i, \dots, \underline{x}_r) = \lambda \omega(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_i, \dots, \underline{x}_r),$$

tulajdonságok érvényesek minden $i = 1, \dots, r$ indexre.

Az összeadás és a valós számokkal való szorzás az r -lineáris leképezések köréből nem vezet ki, ezért az r -lineáris leképezések ezekre a műveletekre nézve vektorteret alkotnak.

Valamely r -lineáris leképezést antiszimmetrikusnak nevezünk, ha bármely két komponensének felcserélése esetén

előjelet vált. Az antiszimmetrikus r -lineáris leképezéseket r -formáknak is nevezik, az A^n tér n -formáira pedig a térfogatforma elnevezés használatos.

Könnyen belátható, hogy az r -formák halmaza az összeadásra és a valós számokkal való szorzásra nézve zárt, és ezekre a műveletekre nézve vektorteret alkotnak. Az r -formák vektorterét szokásos módon a $\wedge^r$ jellel jelöljük.

Tekintsünk egy $\omega(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_n)$ térfogatformát, és vegyünk fel az A^n alaptérben egy $(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n)$ bázist. Azt állítjuk, hogy az ω forma a bázis elemeken felvett

$\omega(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n)$ értéke által egyértelműen meghatározott.

A bizonyításhoz először azt vegyük észre, hogy az ω 0-értéket vesz fel minden olyan $\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_n$ vektorsorozaton, amelyben két azonos vektor szerepel. Ezt az észrevételt és az antiszimmetriát kihasználva azonnal látható, hogy tetszőleges $\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_n$ vektorsorozatra az

$$(5.8.2) \quad \omega(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_n) = \det(x_j^i) \omega(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n)$$

azonosság érvényes, ahol az (x_j^i) mátrix komponenseit az

$$(5.8.3) \quad \underline{x}_j = \sum_{i=1}^n x_j^i \underline{a}_i$$

kifejtésekből származtatjuk. Ezzel a fenti állítást bebizonyítottuk.

Az (5.8.2) formulából látható, hogy bármely két térfogatforma csak egy konstans-szorosban különbözik egymástól. Ezzel bebizonyítottuk a következő állítást.

5.8.1 | A térfogatformák Λ^n vektortere 1-dimenziós.

A zérustól különböző térfogatformákat két diszjunkt osztályba sorolhatjuk úgy, hogy egy osztályba azok a formák kerülnek, amelyek pozitív konstans-szorosban különböznek egymástól. Az így nyert osztályokat irányítás-osztályoknak nevezzük, és a két osztály közül az egyiket kitüntetve az A^n teret irányítotttnak tekintjük.

A kitüntetett irányításosztálynak tekintsük egy tetszőleges ω elemét.

Az irányított tér valamely $(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n)$ bázisát jobbsodrásunak mondjuk, ha $\omega(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n) > 0$, és balsodrásunak ha $\omega(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n) < 0$ teljesül. Az affin független $(\underline{a}_0, \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n)$ pontrendszert pedig akkor nevezzük jobbsodrásunak ill. balsodrásunak, ha az $(\underline{a}_1 - \underline{a}_0, \dots, \underline{a}_n - \underline{a}_0)$ bázis jobbsodrásu ill. balsodrásu.

Könnyen belátható, hogy az így definiált tulajdonságok függetlenek az ω választásától.

Az itt adott irányítás-fogalom összhangba hozható a korábban látott irányítás-fogalommal.

Legyen az A^{n-1} az irányított A^n térben irányított hipertér, és jelöljünk ki az A^{n-1} hipertérben az $\underline{a}_0, \dots, \underline{a}_{n-1}$ jobbsodrásu affin független pontokat. Az A^{n-1} jobbpartját definíció szerint azok az $\underline{a}$ pontok alkotják, amelyekre az $\underline{a}_0, \dots, \underline{a}_{n-1}, \underline{a}$ pontok affin függetlenek és jobbsodrásuak. Egyszerűen igazolható, hogy az A^{n-1} jobbpartját pontosan az általa definiált egyik nyílt féltér

pontjai alkotják, és így a jobbpárt független az $\underline{a}_0, \dots, \underline{a}_{n-1}$ pontok választásától.

Az alaptér minden α lineáris leképezése kanonikus módon az r -lineáris leképezések vektorterének lineáris leképezésévé terjeszthető ki. Ha az ω r -lineáris leképezés, akkor az $\alpha(\omega)$ definíció szerint az

$$(5.8.4) \quad \alpha(\omega)(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_r) = \omega(\alpha(\underline{x}_1), \dots, \alpha(\underline{x}_r))$$

r -lineáris leképezés.

5.8.2 Minden $\omega \in \Lambda^n$ térfogatformára és α lineáris leképezésre

$$(5.8.5) \quad \alpha(\omega) = \det \alpha \cdot \omega$$

érvényes.

Bizonyítás Tekintsünk az alaptérben egy $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ bázist. Ekkor

$$\begin{aligned} \alpha(\omega)(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n) &= \omega(\alpha(\underline{a}_1), \dots, \alpha(\underline{a}_n)) = \omega\left(\sum_{i_1=1}^n \alpha_{1 i_1}^1 \underline{a}_{i_1}, \dots \right. \\ &\quad \left. \dots, \sum_{i_n=1}^n \alpha_{n i_n}^n \underline{a}_{i_n}\right) = \det(\alpha_{ij}^j) \omega(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n) \end{aligned}$$

következik, ami az állításunkat igazolja. □

Az affinitásoknak a térfogatformákon vett hatását a következőképpen definiáljuk.

Állítsuk elő az α affinitást az $\alpha(\underline{x}) = \alpha'(\underline{x}) + \underline{p}$ alakban. Ekkor definíció szerint minden $\omega \in \Lambda^n$ térfogatformára

$$(5.8.5) \quad \alpha(\omega) := \alpha'(\omega)$$

A fenti tétel alapján minden α affinitásra és ω térfogatformára

$$(5.8.6) \quad \alpha(\omega) = \det \alpha \cdot \omega$$

érvényes. Ebből a formulából közvetlenül kiolvasható a következő állítás

5.8.3 | Valamely α affinitás akkor és csak akkor irányítástartó ($\det \alpha > 0$) ill. irányításfordító ($\det \alpha < 0$), ha tetszőlegesen irányított térben jobbsodrásu affin független pontrendszereket jobbsodrásu affin független pontrendszerekbe, ill. bal-sodrásu affin független pontrendszerekbe transzformál.

Az α affinitást térfogattartónak nevezzük, ha $\det \alpha = \pm 1$ teljesül.

Az affinitásokra vonatkozó

$$\det \alpha \beta = \det \alpha \det \beta$$

triviális azonosságból azonnal adódik, hogy a térfogattartó affinitások részcsoporthat alkotnak.

A térfogattartó affinitások között az irányítástartóak szintén részcsoporthat alkotnak. Ezek az affinitások minden

térfogatformát invariánsan hagynak, az az minden

$\omega \in \Lambda^n$ formára $\alpha(\omega) = \omega$ teljesül.

A következőkben bizonyítás nélkül ismertetünk egy tételt, amelyik a „térfogatforma” és a „térfogattartó affinitások” elnevezések geometriai tartalmára mutat rá.

Először a parallelotópok fogalmát definiáljuk.

Tekintsünk az A^n affin térben k -számu lineárisan független $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k$ vektort. Minden $1 \leq l \leq k$ számra és az $1, \dots, k$ indexeknek $i_1 \ i_2 \ \dots \ i_l$ részhal-mazára jelölje $\underline{a}_{i_1 i_2 \dots i_l}$ az $\underline{a}_{i_1} + \underline{a}_{i_2} + \dots + \underline{a}_{i_l}$ vek-tort. A $\underline{0}$ pontnak és az így nyert $\underline{a}_{i_1 \dots i}$ pontoknak konvex burkát origó csucsú k -dimenziós paralelotópnak nevezzük, és $P(\underline{0}, \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k)$ jellel jelöljük.

Az általános helyzetű paralelotópokat pedig a követ-kezőképpen definiáljuk. Ha az $\underline{a}_0, \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k$ pontrend-szer affin független elemekből áll, akkor jelölje $\underline{b}_i$ az $\underline{a}_i - \underline{a}_0$ vektort. Az $\underline{a}_0$ és a $\underline{b}_{i_1 \dots i} + \underline{a}_0$ pontok konvex burkát k -dimenziós paralelotópnak nevezzük, és a $P(\underline{a}_0, \dots, \underline{a}_k)$ jellel jelöljük.

Mint látható, a paralelotópok a paralelogrammák ill. paralelepipedonok fogalmát általánosítják magasabb dimen-zióra. A definícióból az is azonnal következik, hogy minden k -dimenziós paralelepipedonnak

$$\binom{k}{0} + \binom{k}{1} + \dots + \binom{k}{k} = 2^k$$

számu csucsa van.

Legyen $\omega \in \wedge^n$ tetszőleges zérustól különböző tér-fogatforma. Az ω -ra vonatkozóan minden n -nél kisebb dimenzióju paralelotóp előjeles térfogatát zérusnak defi-niáljuk. Továbbá minden n -dimenziós $P(\underline{a}_0, \dots, \underline{a}_n)$ paral-lelotóp előjeles ω -térfogata definíció szerint az $\omega(P) = \omega(\underline{a}_1 - \underline{a}_0, \dots, \underline{a}_n - \underline{a}_0)$ érték, valamint abszolút ω -tér-fogata az $|\omega(\underline{a}_1 - \underline{a}_0, \dots, \underline{a}_n - \underline{a}_0)| > 0$ pozitív szám.

A definícióból és az (5.8.6) képletből közvetlenül kiolvashatók a következő állítások.

5.8.4 Ha valamely P paralelotóp két olyan P_1, P_2 paralelotópok egyesítéseként áll elő, amelyek metszete valamely közös oldallap, akkor

$$|\omega(P)| = |\omega(P_1)| + |\omega(P_2)|.$$

Az abszolút ω -térfogat a térfogattartó affinitásokra nézve invariáns, vagyis $|\omega(P)| = |\omega(\alpha(P))|$ érvényes minden α térfogattartó affinitásra.

A következő állítást bizonyítás nélkül közöljük.

Az A^n affin térben pozitív konstans szorzótól eltekintve egy és csak egy olyan hozzárendelés létezik, amelyik minden K konvex politophoz $V(K) \geq 0$ számot rendel a következő tulajdonságokkal.

1. $V(K) = 0$, ha $\dim K < n$ és $V(K) > 0$, ha $\dim K = n$.
2. Ha a K konvex politop olyan véges sok K_i , $i = 1, \dots, k$ konvex politop egyesítéseként áll elő, amelyekre a $K_i \cap K_j$ metszet mindig valamely közös, n -nél kisebb dimenzióju él, akkor

$$V(K) = V(K_1) + \dots + V(K_k).$$

3. A V invariáns az α térfogattartó affinitásokra nézve, vagyis

$$V(\alpha(K)) = V(K)$$

érvényes.

9 § Dilatációk

Valamely affinitést dilatációnak nevezünk, ha minden egyenes párhuzamos a képével.

Mivel két dilatáció szorzata és egy dilatáció inverze is dilatáció, ezért a dilatációk részcsoporthoz alkotnak.

A dilatációkra legegyszerűbb példaként a párhuzamos eltolásokat említjük. Ezek általános analitikus alakja a következő:

$$\alpha(\underline{x}) = \underline{x} + \underline{p},$$

ahol a $\underline{p}$ vektort eltolás-vektornak nevezzük.

Másik példaként a centrális hasonlóságokat említjük. Ezeket a következőképpen definiáljuk. Tekintsünk egy $\underline{c}$ u.n. centrumot és egy $\lambda \neq 0$ u.n. nyújtási paramétert. Minden $\underline{c}$ pontból kiinduló helyzetvektort nyújtunk meg λ -szorosára. Ilyen módon olyan $\alpha(\underline{x})$ affinitáshoz jutunk, amelyet analitikusan az

$$\alpha(\underline{x}) = \underline{c} + \lambda(\underline{x} - \underline{c}) = \lambda \underline{x} + (1 - \lambda) \underline{c}$$

alakban írhatunk. A párhuzamos szelők tételéből azonnal következik, hogy a centrális hasonlóságok valóban dilatációk.

5.9.1 | Bármely dilatáció vagy párhuzamos eltolás vagy pedig centrális hasonlóság.

Bizonyítás Allítsuk elő az α dilatációt az $\alpha(\underline{x}) = \lambda'(\underline{x}) + \underline{p}$ analitikus alakban. Mivel minden egyenes párhuzamos a képével, ezért minden $\underline{x}$ vektorra $\lambda'(\underline{x}) = \lambda(\underline{x}) \underline{x}$, $\lambda(\underline{x}) \in \mathbb{R}$. A párhuzamos szelők tételéből

triviálisan következik, hogy a $\lambda(\underline{x})$ független az $\underline{x}$ vektortól, ezért a λ az α számára egyértelműen meghatározott konstans. Tehát az α az $\alpha(\underline{x}) = \lambda \underline{x} + \underline{p}$ alakban áll elő.

Ha $\lambda = 1$, akkor az α párhuzamos eltolás. Ha pedig $\lambda \neq 1$, akkor az α a $\underline{c} = (1 - \lambda)^{-1} \underline{p}$ pontot fixen hagyja és az α a $\underline{c}$ centrumu λ paraméterű centrális hasonlóság. $\square$

10 § Izometriák és hasonlóságok euklideszi terekben

Az $\{A^n, (,)\}$ euklideszi tér valamely ponttranszformációját izometriának nevezzük, ha nem változtatja meg a pontok távolságát. A háromszög-egyenlőtlenség miatt az izometriák egyenest egyenesbe transzformálnak, ezért minden izometria affinitás. A lineáris izometrikus leképezéseket ortogonális transzformációknak nevezzük. Az $\alpha(\underline{x}) = \alpha'(\underline{x}) + \underline{p}$ analitikus előállításból következik, hogy minden izometria egy ortogonális transzformációnak és egy párhuzamos eltolásnak a szorzataként állítható elő.

5.10.1 | Az euklideszi tér valamely $\alpha(\underline{x}) = \alpha'(\underline{x}) + \underline{p}$ affinitása akkor és csak akkor izometria, ha az α' a belsőszorzatot invariánsan hagyja, vagyis minden $\underline{x}, \underline{y}$ vektorra $(\alpha'(\underline{x}), \alpha'(\underline{y})) = (\underline{x}, \underline{y})$ teljesül.

Bizonyítás Ha az α affinitás izometria, ekkor az α' is

nyilvánvalóan izometria, és így

$$|\alpha'(\underline{x})| = |\underline{x}|, \quad (\alpha'(\underline{x}), \alpha'(\underline{x})) = (\underline{x}, \underline{x})$$

teljesül. Tetszőleges $\underline{x}, \underline{y}$ vektorok esetén pedig a következőket írhatjuk.

$$\begin{aligned} (\alpha'(\underline{x}), \alpha'(\underline{y})) &= \frac{1}{4} \{ (\alpha'(\underline{x} + \underline{y}), \alpha'(\underline{x} + \underline{y})) - (\alpha'(\underline{x} - \underline{y}), \alpha'(\underline{x} - \underline{y})) \} \\ &= \frac{1}{4} \{ (\underline{x} + \underline{y}, \underline{x} + \underline{y}) - (\underline{x} - \underline{y}, \underline{x} - \underline{y}) \} = (\underline{x}, \underline{y}), \end{aligned}$$

Tehát az α' valóban invariánsan hagyja a belsőszorzatot.

Ha pedig az α affinitásra $(\alpha'(\underline{x}), \alpha'(\underline{y})) = (\underline{x}, \underline{y})$ érvényes, akkor az α' invariánsan hagyja a vektorok hosszát, és így az α affinitással együtt izometria.



A következő tételekben az ortogonális transzformációkat analitikusan írjuk le.

Tekintsünk az alaptérben egy $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ ortonormált bázist. Valamely α ortogonális transzformációnak erre a bázisra vonatkozó (α^i_j) mátrixát az

$$\alpha(\underline{e}_j) = \sum_{i=1}^n \alpha^i_j \underline{e}_i$$

kifejtések segítségével definiáljuk, és nyilvánvalóan érvényes az

$$\alpha^i_j = (\alpha(\underline{e}_j), \underline{e}_i)$$

azonosság.

5.10.2 | Ha (α^i_j) egy α ortogonális transzformációnak
| valamely $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ ortonormált bázisra

vonatkozó mátrixa, akkor az α^{-1} inverznek az $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ bázisra vonatkozó mátrixát az (α_{ij}^i) mátrixból a főátlóra vonatkozó tükrözéssel kapjuk.

Bizonyítás Mivel az α^{-1} szintén ortogonális transzformáció, ezért

$$\begin{aligned} \alpha_{ij}^j &= (\alpha(\underline{e}_i), \underline{e}_j) = (\alpha^{-1}\alpha(\underline{e}_j), \alpha^{-1}(\underline{e}_j)) = (\underline{e}_i, \alpha^{-1}(\underline{e}_j)) \\ &= \alpha_{ji}^{-1}, \end{aligned}$$

ami az állítást igazolja. □

5.10.3 Egy α lineáris leképezés akkor és csak akkor ortogonális, ha tetszőleges ortonormált bázisra vonatkozó mátrixának sor-, vagy oszlopvektorai ortonormált rendszert alkotnak.

Bizonyítás Legyen az α tetszőleges ortogonális transzformáció. Mivel valamely $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ ortonormált bázisra vonatkozó mátrixának i -ik oszlopában az $\alpha(\underline{e}_i)$ vektornak az adott bázisra vonatkozó komponensei szerepelnek, ezért az oszlopvektorok valóban ortonormált rendszert alkotnak. Az előző tétel szerint a sorvektorok az α^{-1} mátrixának oszlopvektorai, ezért a sorvektorok is ortonormált rendszert alkotnak.

A fordított állítás igazolásához tekintsünk egy

$\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ ortonormált bázist és egy (α_{ij}^i) mátrixot, amelynek oszlopvektorai ortonormált rendszert alkotnak.

Definiáljuk az $\alpha(\underline{x})$ lineáris leképezést az

$$\alpha(\underline{x}) = \alpha\left(\sum_{i=1}^n x^i \underline{e}_i\right) = \sum_{i,j=1}^n x^i \alpha^j_i \underline{e}_j$$

képlettel. Ekkor $(\alpha(\underline{e}_i), \alpha(\underline{e}_j)) = \delta^j_i$ érvényes, és ezért tetszőleges $\underline{x}, \underline{y}$ vektorokra

$$\begin{aligned} (\alpha(\underline{x}), \alpha(\underline{y})) &= \left(\alpha\left(\sum_{i=1}^n x^i \underline{e}_i\right), \alpha\left(\sum_{j=1}^n y^j \underline{e}_j\right)\right) = \\ &= \sum_{i,j=1}^n x^i y^j (\alpha(\underline{e}_i), \alpha(\underline{e}_j)) = \sum_{i=1}^n x^i y^i = (\underline{x}, \underline{y}) \end{aligned}$$

érvényes, tehát az α ortogonális. Ezzel a tétel bizonyítását befejeztük. □

Valamely izometriát irányítástartónak ill. irányításfordítónak nevezünk, ha mint affinitás irányítástartó ill. irányításfordító. Könnyen megmutatható, hogy ezek a definíciók ekvivalensek a 2 - és 3 -dimenziós esetben adott definíciókkal.

Térjünk át a hasonlóságok vizsgálatára.

Az euklideszi tér egy bijekcióját hasonlóságnak nevezzük, ha bármely két különböző A, B pont képe olyan A', B' pontpár, amelyekre a

$$\frac{|A' B'|}{|A B|} = \lambda$$

hányados konstans. A λ konstansot a hasonlóság paraméterének nevezzük. A hasonlóságokat a következőkben a φ_λ

jellel jelöljük. Világos, hogy a hasonlóságok csoportot alkotnak.

Mivel tetszőleges C centrumu C_λ centrális dilatáció szintén hasonlóság, ezért a

$$C_{1/\lambda} \varphi_\lambda$$

hasonlóság izometria. Ebből kapjuk, hogy minden hasonlóság egy izometriának és egy centrális dilatációnak a szorzataként állitható elő. Ebből következően minden hasonlóság affinitás.

5.10.4 | Ha egy hasonlóság nem izometria, akkor létezik
" | egy és csak egy fixpontja.

Bizonyítás Feltehetjük, hogy a φ_λ hasonlóságra $0 < \lambda < 1$ érvényes, mert ellenkező esetben elegendő az állítást a $\varphi_\lambda^{-1} = \varphi_{1/\lambda}$ inverzre igazolnunk.

Legyen az $\underline{x}_0$ tetszőleges pont, és definiáljuk ebből az

$$\underline{x}_n := \varphi_\lambda^n(\underline{x}_0), \quad n = 1, 2, \dots,$$

pontsorozatot.

A sorozat bármely két szomszédos $\underline{x}_i, \underline{x}_{i+1}$ elemére

$$|\underline{x}_{i+1} - \underline{x}_i| = d \lambda^i$$

teljesül, ahol $d = |\underline{x}_1 - \underline{x}_0|$. Így a sorozat bármely két $\underline{x}_i, \underline{x}_j$, $j > i$, elemére

$$\begin{aligned} |\underline{x}_j - \underline{x}_i| &\leq \sum_{\ell=1}^{j-i} |\underline{x}_{i+\ell} - \underline{x}_{i+\ell-1}| = d \sum_{\ell=1}^{j-i-1} \lambda^{i+\ell} = \\ &= d \lambda^i (1 - \lambda^{j-i}) / (1 - \lambda) \leq d \frac{\lambda^i}{1 - \lambda} \end{aligned}$$

teljesül. Mivel $0 < \lambda < 1$, ezért minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan ν küszöbszám, hogy valahányszor $i, j > \nu$, mindannyiszor $|\underline{x}_j - \underline{x}_i| < \varepsilon$ érvényes. Tehát a sorozat kielégíti a Cauchy féle konvergencia kritériumot, ezért a sorozat konvergens. Jelölje $\underline{x}$ a sorozat egyetlen torlódási pontját. Megmutatjuk, hogy az $\underline{x}$ pont fixen marad.

Az affinitások mátrixos előállításából látható, hogy minden affinitás folytonos. Ezért

$$\varphi_\lambda(\underline{x}) = \lim_{m \rightarrow \infty} \varphi_\lambda(\underline{x}_m) = \lim_{m \rightarrow \infty} \underline{x}_{m+1} = \underline{x},$$

ami az állítást igazolja.

Mivel a φ_λ két pont távolságát megváltoztatja, ezért két különböző fixpont nem létezik.

Ezzel a tétel bizonyítását befejeztük. □

11 § Merőleges affinitások

Tekintsünk az $\{A^n, (,)\}$ euklideszi térben egy α lineáris leképezést. Az α adjungáltján azt az α^* lineáris leképezést értjük, amelyre

$$(5.11.1) \quad (\alpha(\underline{x}), \underline{y}) = (\underline{x}, \alpha^*(\underline{y}))$$

teljesül minden $\underline{x}, \underline{y}$ vektorra. A definícióból nyilvánvalóan következik az $(\alpha\beta)^* = \beta^* \alpha^*$ azonosság.

Tekintsünk a térben egy $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ ortonormált bázist. Az α -nak és az adjungáltjának e bázisra

vonatkozó mátrixa között a következő összefüggés érvényes:

$$(5.11.2) \quad \alpha_i^j = (\alpha(e_i), e_j) = (e_i, \alpha(e_j)) = \alpha_{j,i}^*.$$

Tehát az α^* mátrixa nem más mint az α mátrixának transzponáltja.

Az α lineáris leképezést önadjungáltnak nevezzük, ha megegyezik az adjungáltjával.

Az (5.11.2) formula alapján az α akkor és csak akkor önadjungált, ha az α mátrixa valamely ortonormált bázisra vonatkozóan /és ebből következően minden ortonormált bázisra vonatkozóan/ szimmetrikus.

A következő tételben az önadjungált leképezések fő-tengely-transzformációjára vonatkozó állítást igazoljuk.

5.11.1 Minden α önadjungált leképezéshez létezik olyan $(e_1, \dots, e_n)$ ortonormált bázis, amelynek elemei az α sajátvektorai. Az α -nak erre a bázisra vonatkozó mátrixa diagonális, és a főátlóban az α sajátértékei szerepelnek.

Bizonyítás Az $(\alpha(x), x)$ leképezés az origó középpontú egységgömbön folytonos, ezért ez a függvény felveszi a maximumát valamely e_1 pontban. Szorítsuk meg az $(\alpha(x), x)$ függvényt az e_1 vektorra merőleges, origóra illeszkedő hipertér egységgömbjére, és legyen e_2 ismét olyan pont, amelyben a megszorított függvény maximumot vesz fel. Az eljárást folytatva az $e_1, e_2, \dots, e_n$ ortonormált bázishoz jutunk. Megmutatjuk, hogy ez a bázis a tételnek megfelelő.

Tekintsünk két e_i, e_j , $i < j$, vektort.

A végpontokon áthaladó, origó középpontu egységkör pontjait paraméteresen a

$$t \underline{e}_i + s \underline{e}_j, \quad t^2 + s^2 = 1$$

alakban írhatjuk. Az $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ vektorok kiválasztására vonatkozó elv miatt az

$$(t \alpha(\underline{e}_i) + s \alpha(\underline{e}_j), t \underline{e}_i + s \underline{e}_j) \leq (\alpha(\underline{e}_i), \underline{e}_i)$$

egyenlőtlenség érvényes. A $t^2 + s^2 = 1$ azonosságot és az önadjungálttságot felhasználva ez az egyenlőtlenség a

$$2 \frac{t}{s} (\alpha(\underline{e}_i), \underline{e}_j) \leq (\alpha(\underline{e}_i), \underline{e}_i) - (\alpha(\underline{e}_j), \underline{e}_j)$$

alakra hozható. Az egyenlőtlenség jobb oldala nem-negatív. A baloldalon szereplő $(\alpha(\underline{e}_i), \underline{e}_j)$ mennyiségnek zérusnak kell lennie, mert ellenkező esetben mindig választhatók lennének olyan t, s értékek, amelyekre a baloldal nagyobb lenne mint a jobboldal.

Tehát az $\alpha(\underline{e}_i)$ vektor az összes többi $\underline{e}_j$, $j \neq i$ egységvektorra merőleges, vagyis az $\underline{e}_i$ az α sajátvektora. A tétel többi állítása ebből az észrevételből közvetlenül adódik. □

Önadjungált affinitásokra legegyszerűbb példaként az u.n. merőleges affinitásokat említjük. Ezek definíciója a következő.

Legyen Δ valamely origóra illeszkedő hipertér és $\lambda \neq 0$ tetszőleges valós szám. Valamely $\underline{x}$ vektornak a Δ hipertérre vett merőleges vetületét jelölje $\underline{p}_x$.

Ha $\underline{n}$ a Δ normálvektorát jelöli, akkor nyilvánvalóan

$$(5.11.3) \quad \underline{p}_x = \underline{x} - (\underline{x}, \underline{n}) \underline{n}$$

érvényes. Rendeljük az $\underline{x}$ vektorhoz azt az $\underline{y}$ vektort, amelyre

$$(5.11.4) \quad \underline{p}_y = \underline{p}_x \quad ; \quad \underline{y} - \underline{p}_y = \lambda (\underline{x} - \underline{p}_x)$$

teljesülnek. Az $\underline{y}$ vektort $\mu_{\Delta\lambda}(\underline{x})$ jellel jelöljük, az így nyert leképezést pedig a Δ hipertérre és a λ paraméterre vonatkozó merőleges affinitásnak nevezzük. Az

(5.11.3) és (5.11.4) formulákból látható, hogy a leképezést a

$$(5.11.5) \quad \mu_{\Delta\lambda}(\underline{x}) = \underline{x} + (\lambda - 1) (\underline{x}, \underline{n}) \underline{n}$$

analitikus alakban írhatjuk. Látható, hogy a $\mu_{\Delta\lambda}$ nem-elfajuló lineáris leképezés, tehát affinitás.

Legyen az $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n)$ olyan ortonormált bázis, amelyre $\underline{e}_1 = \underline{n}$ teljesül. Ekkor az $\underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n$ vektorok a Δ hipertérbe esnek, ezért a $\mu_{\Delta\lambda}$ leképezésnek erre a bázisra vonatkozó mátrixa a

$$(5.11.6) \quad \begin{pmatrix} \lambda & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

diagonális mátrix. Ebből következik, hogy a $\mu_{\Delta\lambda}$ önadjungált.

5.11.2 | Ha a Δ_1 és a Δ_2 két egymásra merőleges,

origóra illeszkedő hipertér, akkor a $\mu_{\Delta_1 \lambda_1}$ és a $\mu_{\Delta_2 \lambda_2}$ affinitások egymással felcserélhetők, és szorzatuk ismét önadjungált lineáris leképezés.

Bizonyítás Jelölje $\underline{n}_i$ a Δ_i hipertér normálvektorát, és legyen $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3, \dots, \underline{e}_n)$ olyan ortonormált bázis, amelyre $\underline{e}_1 = \underline{n}_1$ és $\underline{e}_2 = \underline{n}_2$ teljesül. Ekkor az $\underline{e}_3, \dots, \underline{e}_n$ vektorok a $\Delta_1 \cap \Delta_2$ metszetbe esnek, és a $\mu_{\Delta_i \lambda_i}$, $i = 1, 2$, mátrixa e bázisra vonatkozóan olyan diagonális mátrix, amelynek átlójában az i -ik helyen λ_i , a többi helyen pedig az 1 érték szerepel. Ebből következik, hogy a $\mu_{\Delta_1 \lambda_1}$ és a $\mu_{\Delta_2 \lambda_2}$ egymással felcserélhetők. Továbbá

$$\begin{aligned} (\mu_{\Delta_1 \lambda_1} \mu_{\Delta_2 \lambda_2})^* &= \mu_{\Delta_2 \lambda_2}^* \mu_{\Delta_1 \lambda_1}^* = \mu_{\Delta_2 \lambda_2} \mu_{\Delta_1 \lambda_1} = \\ &= \mu_{\Delta_1 \lambda_1} \mu_{\Delta_2 \lambda_2} \end{aligned}$$

is teljesül, tehát a szorzatuk valóban önadjungált. $\square$

5.11.3 Minden α affinitás

$$(5.11.7) \quad \alpha = \eta \mu_1 \mu_2 \dots \mu_n$$

alakban állítható elő, ahol a η izometria, μ_i leképezések pedig páronként merőleges hiperterekre vonatkozó merőleges affinitások.

Bizonyítás Állítsuk elő az α affinitást az $\alpha(\underline{x}) = \alpha'(\underline{x}) + \underline{p}$ alakban. Az $|\alpha'(\underline{x})|$ függvény az A^n origó középpontú egységömbjén folytonos, ezért valamely $\underline{e}_1$

pontban felveszi a maximumát. Szorítsuk meg a fenti függvényt az $\underline{e}_1$ vektorra merőleges, origóra illeszkedő hipertér origó középpontú egységgömbjére, és legyen $\underline{e}_2$ olyan pont, ahol ez a függvény a maximumát veszi fel. Az eljárást folytatva az $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n)$ ortonormált bázishoz jutunk.

Megmutatjuk, hogy az $\alpha'(\underline{e}_i)$ vektorok szintén páronként merőlegesek.

Az $\underline{e}_i, \underline{e}_j$, $i < j$ vektorok síkjában tekintsük a

$$t \underline{e}_i + s \underline{e}_j, \quad t^2 + s^2 = 1$$

egységkört. Az $\underline{e}_k$ vektorok kiválasztása miatt

$$|t \alpha'(\underline{e}_i) + s \alpha'(\underline{e}_j)|^2 \leq |\alpha'(\underline{e}_i)|^2.$$

egyenlőtlenség érvényes, ami a

$$2 \frac{t}{s} (\alpha'(\underline{e}_i), \alpha'(\underline{e}_j)) \leq |\alpha'(\underline{e}_i)|^2 - |\alpha'(\underline{e}_j)|^2$$

egyenlőtlenséggel ekvivalens. A baloldalon szereplő

$(\alpha'(\underline{e}_i), \alpha'(\underline{e}_j))$ kifejezésnek zérusnak kell lennie, mert ellenkező esetben választhatók lennének olyan t, s értékek, amelyekre a baloldal nagyobb lenne mint a jobboldal.

Ezzel megmutattuk, hogy az $\alpha'(\underline{e}_i)$ vektorok páronként merőlegesek.

Vezessük be a $\lambda_i = |\alpha'(\underline{e}_i)|$, $\underline{a}_i = \alpha'(\underline{e}_i)/\lambda_i$ jelöléseket, továbbá legyen Δ_i az $\underline{e}_i$ vektorra merőleges, origóra illeszkedő hipertér, valamint η' az az ortogonális transzformáció, amelyik az $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ ortonormált bázist az $(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n)$ ortonormált bázisba

transzformálja. Nyilvánvaló, hogy az α affinitás az

$$\alpha = \eta \mu_{\Delta_1 \lambda_1} \mu_{\Delta_2 \lambda_2} \dots \mu_{\Delta_n \lambda_n}$$

alakban áll elő, ahol η az $\eta(\underline{x}) = \eta'(\underline{x}) + \underline{p}$ izomet-
riát jelöli. □

12 § Tenzorok

Az A^n vektortér $\alpha: A^n \rightarrow \mathbb{R}$ valós függvényét lineáris funkcionálnak nevezzük, ha homogén és additív, vagyis az

$$\alpha(\lambda \underline{x}) = \lambda \alpha(\underline{x}), \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

$$\alpha(\underline{x} + \underline{y}) = \alpha(\underline{x}) + \alpha(\underline{y}); \quad \underline{x}, \underline{y} \in A^n,$$

tulajdonságok érvényesek.

Mivel sem az összeadás sem a valós számokkal való szorzás a lineáris funkcionálok köréből nem vezet ki, ezért a lineáris funkcionálok ezekre a műveletekre nézve vektorteret alkotnak. Ezt a vektorteret duális térnek nevezzük, és A^{*n} jellel jelöljük.

Megmutatjuk, hogy az A^{*n} n-dimenziós vektortér.

Legyen az $(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n)$ az A^n tetszőleges bázisa. Minden α funkcionál a bázis elemeken felvett

$$(5.12.1) \quad \alpha_i := \alpha(\underline{a}_i)$$

értéke által egyértelműen meghatározott. Valóban, ha

$$\underline{x} = \sum_{i=1}^n x^i \underline{a}_i \quad \text{tetszőleges vektor, akkor}$$

$$(5.12.2) \quad \alpha(\underline{x}) = \alpha\left(\sum_{i=1}^n x^i \underline{a}_i\right) = \sum_{i=1}^n x^i \alpha_i$$

érvényes, ami az állítást igazolja.

Az $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ vektorok segítségével az $\underline{a}^{*1}, \underline{a}^{*2}, \dots, \underline{a}^{*n}$ lineáris funkcionálokat az

$$(5.12.3) \quad \underline{a}^{*i}(\underline{a}_j) = \delta_j^i$$

képlet segítségével definiáljuk, ahol δ_j^i a Kronecker féle δ -függvény. A fenti megállapítás alapján az $\underline{a}^{*i}$ funkcionálok jól-definiáltak. Megmutatjuk, hogy ezek a funkcionálok a duális térben bázist alkotnak.

Nyilvánvaló, hogy ezek a funkcionálok lineárisan függetlenek. Ha pedig α tetszőleges lineáris funkcionál, akkor az

$$\alpha(\underline{a}_1) \underline{a}^{*1} + \dots + \alpha(\underline{a}_n) \underline{a}^{*n} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \underline{a}^{*i}$$

lineáris funkcionál az $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ báziselemeken ugyanazokat az értékeket veszi fel, mint az α funkcionál, tehát

$$(5.12.4) \quad \alpha = \sum_{i=1}^n \alpha(\underline{a}_i) \underline{a}^{*i} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \underline{a}^{*i}.$$

Ezzel beláttuk, hogy az $\underline{a}^{*1}, \dots, \underline{a}^{*n}$ funkcionálok bázist alkotnak, és az A^{*n} valóban n -dimenziós.

Az $(\underline{a}^{*1}, \dots, \underline{a}^{*n})$ bázist az $(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n)$ bázis duális bázisának nevezzük, az α funkcionálnak a duális bázisra vonatkozó $\alpha_i = \alpha(\underline{a}_i)$ koordinátáit pedig az α kovariáns koordinátáinak mondjuk.

Ha a $(\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n)$ másik bázis, amelyik az $(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n)$

bázissal a

$$\underline{b}_i = \sum_{j=1}^n b_i^j \underline{a}_j$$

egyenletekkel függ össze, akkor az α funkcionálnak a $\underline{b}^{*1}, \dots, \underline{b}^{*n}$ duális bázisra vonatkozó α'_i kovariáns koordinátáira az

$$(5.12.5) \quad \alpha'_i = \alpha(\underline{b}_i) = \alpha\left(\sum_{j=1}^n b_i^j \underline{a}_j\right) = \sum_{j=1}^n \alpha_j b_i^j$$

transzformációs törvény érvényes.

Megjegyezzük, hogy az $\underline{x}$ vektor $\underline{x} = \sum_{i=1}^n x^i \underline{a}_i$ kifejtéséből nyert x^i komponensei másképpen transzformálódnak, ha az $(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n)$ bázisról a $(\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n)$ bázisra térünk át. Ekkor az

$$\underline{a}_i = \sum_{j=1}^n b^{-1j}_i \underline{b}_j$$

formula miatt

$$\underline{x} = \sum_{i=1}^n x^i \underline{a}_i = \sum_{i,j=1}^n x^i b^{-1j}_i \underline{b}_j$$

érvényes, vagyis a transzformációs formula a következő:

$$(5.12.6) \quad x^{i'} = \sum_{j=1}^n b^{-1i}_j x^j.$$

Mivel ebben a transzformációs formulában a (b^j_i) átmenet-mátrix inverze szerepel, ezért a vektorok x^i koordinátáit kontravariáns koordinátáknak is nevezik.

Az $\underline{x} \in A^n$ vektorokra a kontravariáns vektor elnevezés is használatos, míg az $\underline{x}^* \in A^{*n}$ funkcionálokat kovariáns vektoroknak is nevezik.

Vizsgáljuk meg az A^{*n} duális tér A^{**n} duálisát is. Ez szintén n -dimenziós valós vektortér, amelyről megmutatható, hogy kanonikus módon azonosítható az A^n vektortérrel.

Valóban, minden $\underline{x} \in A^n$ vektorhoz rendeljük hozzá azt az $\underline{x}^{**} \in A^{**n}$ elemet, amely valamely $\omega \in A^{*n}$ funkcionálon az

$$5.12.7 \quad \underline{x}^{**}(\omega) := \omega(\underline{x})$$

értéket veszi fel. Könnyen megmutatható, hogy ez az

$$A^n \longrightarrow A^{**n}, \quad \underline{x} \longrightarrow \underline{x}^{**}$$

leképezés nem-elfajuló lineáris leképezés, hiszen $\dim A^n = \dim A^{**n} = n$, és $\underline{x} \neq 0$ vektorra $\underline{x}^{**} \neq 0$ teljesül. Ezért a két tér azonos dimenziója miatt a leképezés bijekció. Ezzel a kanonikus azonosítással az A^{**n} elemeit az A^n elemeinek tekintjük.

Megjegyezzük, hogy az A^n és A^{*n} duálisa között a fentihez hasonló kanonikus azonosítás nem létezik. Azonban ha az A^n alaptérben egy $(,)$ belsőszorzatot tüntetünk ki, akkor ennek segítségével az

$$5.12.8 \quad A^n \longrightarrow A^{*n}, \quad \underline{x} \longrightarrow \omega(\underline{y}) = (\underline{x}, \underline{y})$$

nem-elfajuló lineáris leképezés definiálható. Látható, hogy ez a leképezés függ a belsőszorzat választásától.

Az általános típusú tenzorok definíciójára térünk át.

Tekintsük az

$$A^{(r,s)} = A^{*n} \times \dots \times A^{*n} \times A^n \times \dots \times A^n$$

Descartes szorzatot, amelyben az A^{*n} duális tér r -szer

az A^n pedig s -szer szerepel. Az $A^{(r,s)}$ halmaz minden $\Omega : A^{(r,s)} \rightarrow \mathbb{R}$ valós függvénye $\Omega(\omega^1, \dots, \omega^r, \underline{x}_1, \dots, \underline{x}_s)$ alakban írható, ahol $\omega^i \in A^{*n}$ és $\underline{x}_i \in A^n$.

Az Ω függvényt multilineárisnak ill. (r,s) -lineárisnak nevezzük, ha mindegyik komponensében homogén és additív.

Az (r,s) -lineáris leképezéseket (r,s) -tipusu tenzoroknak is nevezik, ahol r a kontravariáns komponensek az s pedig kovariáns komponensek számát jelöli.

Az (r,s) -tipusu tenzorok az összeadásra és a valós számokkal való szorzásra nézve valós vektorteret alkotnak, amit A_s^r jellel jelölünk.

Megmutatjuk, hogy az A_s^r vektortér dimenziója
 $\dim A_s^r = n^{r+s}$.

Tekintsünk az A^n alaptérben egy $(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n)$ bázist és legyen az $(\underline{a}^{*1}, \dots, \underline{a}^{*n})$ a duális bázis. Vegyük észre, hogy az Ω (r,s) -tipusu tenzor egyértelműen meghatározott a báziselem-sorozatokon felvett

$$(5.12.9) \quad \Omega_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} := \Omega(\underline{a}^{*i_1}, \dots, \underline{a}^{*i_r}, \underline{a}_{j_1}, \dots, \underline{a}_{j_s}),$$

$i, j = 1; \dots; n$, értékei által. Valóban, ha $\underline{x}^{*1}, \dots, \underline{x}^{*2}, \underline{x}_1, \dots, \underline{x}_s$ tetszőleges sorozat, amelyekre

$$\underline{x}^{*i} = \sum_{j=1}^n x^{*i}_j \underline{a}^{*j}, \quad x_i = \sum_{j=1}^n x_i^j \underline{a}_j$$

érvényes, akkor

$$\Omega(\underline{x}^{*1}, \dots, \underline{x}^{*r}, \underline{x}_1, \dots, \underline{x}_s) = \sum_{i_1, j_1=1}^n \dots \sum_{i_r, j_r=1}^n x_{i_1}^{*1} \dots x_{i_r}^{*r} x_1^{j_1} \dots x_s^{j_s} \Omega_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r},$$

ami az állítást igazolja.

Tetszőleges $i_1 \dots i_r \quad j_1 \dots j_s$, $i; j = 1, \dots, n$, indexekre jelölje

$$(5.12.10) \quad \underline{a}_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s} \in A_S^r$$

azt az (r, s) típusu tenzort, amelyre

$$(5.12.11) \quad \underline{a}_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s} (\underline{a}^{*p_1} \dots \underline{a}^{*p_r}, \underline{a}_{q_1}, \dots, \underline{a}_{q_s}) = \\ = \delta_{i_1}^{p_1} \dots \delta_{i_r}^{p_r} \delta_{q_1}^{j_1} \dots \delta_{q_s}^{j_s}$$

teljesül. Könnyen belátható, hogy a

$$\sum_{i, j=1}^n \Omega_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} \underline{a}_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s}$$

r, s -típusu tenzor az $(\underline{a}^{*p_1}, \dots, \underline{a}^{*p_r}, \underline{a}_{q_1}, \dots, \underline{a}_{q_s})$

sorozatokon ugyanazokat az értékeket veszi fel, mint az Ω , ezért

$$(5.12.12) \quad \Omega = \sum_{i, j=1}^n \Omega_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} \underline{a}_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s}.$$

Ezzel beláttuk, hogy az $\underline{a}_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s}$ tenzorok az A_S^r

térben bázist alkotnak, és ezért $\dim A_S^r = n^{r+s}$.

Az $\underline{a}_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s}$, $i; j = 1, \dots, n$, bázist az $(\underline{a}_1 \dots \underline{a}_n)$

által indukált bázisnak nevezzük. Az (5.12.12) kifejtésben az $i_1 \dots i_r$ indexeket kontravariáns, a $j_1 \dots j_s$ indexeket pedig kovariáns indexeknek nevezzük. A kontravariáns indexeket az $\Omega_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}$ koordinátáknál mindig felül a kovariáns indexeket pedig mindig alul írjuk.

A korábban bevezetett $\alpha : \Lambda^n \rightarrow \Lambda^n$ lineáris leképezések az $(1, 1)$ -tipusu tenzorokkal azonosíthatók. Valóban az α lineáris leképezéshez rendeljük hozzá az

$$\tilde{\alpha}(\omega_{\underline{x}}) = \omega(\alpha(\underline{x})), \quad \omega \in \Lambda^{*n}, \quad \underline{x} \in \Lambda^n$$

$(1, 1)$ -tipusu tenzort.

Könnyen belátható, hogy az $\alpha \rightarrow \tilde{\alpha}$ leképezés a két függvényter között bijekció, hiszen a két függvényter dimenziója megegyezik, valamint ha $\alpha \neq 0$, akkor $\tilde{\alpha} \neq 0$ is érvényes.

A következőkben a tenzorszorzás műveletét vezetjük be.

Ha az Ω_1 (r, s) -tipusu az Ω_2 pedig (r', s') -tipusu tenzor, akkor ezek $\Omega_1 \otimes \Omega_2$ tenzorszorzata definíció szerint az

$$(5.12.13) \quad \Omega_1 \otimes \Omega_2(\omega_1, \dots, \omega_{r+r'}, \underline{x}_1, \dots, \underline{x}_{s+s'}) = \\ = \Omega_1(\omega_1, \dots, \omega_r, \underline{x}_1, \dots, \underline{x}_s) \Omega_2(\omega_{r+1}, \dots, \omega_{r+r'}, \underline{x}_{s+1}, \dots, \underline{x}_{s+s'})$$

$(r+r', s+s')$ -tipusu tenzor.

A definícióból látható, hogy a tenzorszorzás asszociatív és az összeadásra nézve disztributív. Az is könnyen igazolható, hogy az (5.12.10) képletben definiált tenzor

nem más, mint az

$$(5.12.14) \quad \underline{a}_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s} = \underline{a}^{*j_1} \otimes \dots \otimes \underline{a}^{*j_s} \otimes \underline{a}_{i_1} \otimes \dots \otimes \underline{a}_{i_r}$$

tenzor.

Legyen az Ω tisztán kontravariáns vagy tisztán kovariáns komponenseket tartalmazó tenzor. Tehát az Ω vagy $(s, 0)$ - vagy $(0, r)$ - típusu. Az Ω tenzort szimmetrikusnak ill. antiszimmetrikusnak nevezzük, ha bármely két komponensének cseréje esetén nem változik ill. előjelet vált.

A szimmetrikus ill. antiszimmetrikus tenzorok körében bevezethető a szimmetrikus ill. antiszimmetrikus tenzorszor-zás művelete.

Ha az Ω_1 $(0, s)$ -típusu az Ω_2 pedig $(0, s')$ -típusu szimmetrikus tenzor, akkor ezek szimmetrikus tenzor-szorzata az

$$(5.12.15) \quad \Omega_1 \odot \Omega_2 (\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_{s+s'}) = \frac{1}{(s+s')!} \sum_{\sigma} \Omega_1 \otimes \Omega_2 (\underline{x}_{\sigma(1)}, \dots, \dots, \underline{x}_{\sigma(s+s')})$$

$(0, s+s')$ -típusu szimmetrikus tenzor, ahol σ az $1, 2, \dots, \dots, s+s'$ indexek permutációit jelöli, és az összegzés az összes permutációra értendő. Az $(r, 0)$ -típusu szimmetrikus tenzorok szimmetrikus tenzorszorzatát hasonlóan definiáljuk.

A definícióból közvetlenül adódik, hogy a szimmetrikus tenzorszorzás asszociatív, kommutatív és az összeadásra

nézve disztributív.

Ha pedig az Ω_1 (o, s) -tipusu az Ω_2 pedig (o, s') -tipusu antiszimmetrikus tenzor, akkor ezek antiszimmetrikus tenzorszorzata az

$$(5.12.16) \quad \Omega_1 \wedge \Omega_2 (\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_{s+s'}) = \frac{1}{(s+s')!} \sum_{\sigma} \text{sgn} \sigma \Omega_1 \otimes \Omega_2 (\underline{x}_{\sigma(1)}, \dots, \dots, \underline{x}_{\sigma(s+s')})$$

(o, s+s') -tipusu antiszimmetrikus tenzor. Az (r, o) -tipusu antiszimmetrikus tenzorok antiszimmetrikus tenzorszorzatát hasonló módon definiáljuk.

Itt is közvetlenül belátható, hogy az antiszimmetrikus tenzorszorzás asszociatív és az összeadásra nézve disztributív. Az is könnyen megmutatható, hogy az antiszimmetrikus (o, s) ill. (s, o) -tipusu tenzorok $\binom{n}{s}$ -dimenziós vektorteret alkotnak.

Az (r, o) -tipusu antiszimmetrikus tenzorokat r-vektoroknak, a (o, s) -tipusu antiszimmetrikus tenzorokat pedig r-formáknak is nevezik.

A belsőszorzat és a térfogatformák példájából látható, hogy a tenzorok különféle geometriai strukturák definiálására alkalmazhatók.

