2013. 11. 23. 3. konzultáció Az analízis

S. Kakeya: 1917-ben tárgyalta a problémát.

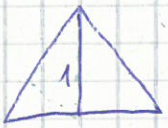
360° meg lehet benne forgatni.

$T = \pi \approx 3,14.$

Egyszerűbb:

2x forgatva 360° $T = \frac{\pi}{4} \approx 0,78.$

Más:



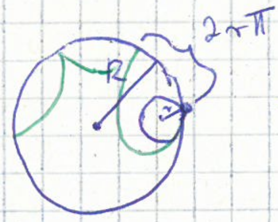
ebben is megforgatható.

$T = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0,58.$

Pál Gyula matematikus: 1881–1947.

1921-ben belátta, hogy a konvex tartományok közül és a legkisebb Kakeya-halmazok (K-halmazok).

Még kisebb, de nem konvex:



HIPOCIKLOIS.

Ha $\frac{R}{r}$ irracionális, sosem találkoznak a töréspontok.

$\frac{2R\pi}{2r\pi} = k \in \mathbb{Z}.$

$\frac{R}{r} = k^* \in \mathbb{Z}$

Ekkor csatlakozik.

Ha három részre bomlik:

$\frac{R}{r} = 3$ esetén

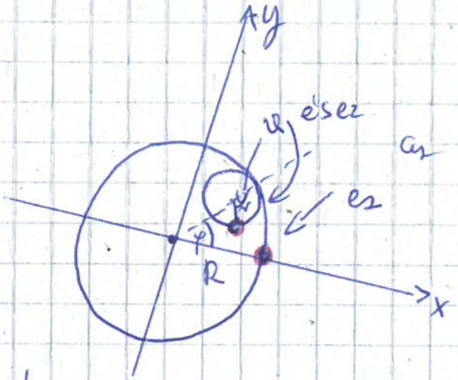
Ha $R = \frac{3}{4}$, $\rightarrow$ ebben is megforgatható. $T = \frac{\pi}{8} \approx 0,39$

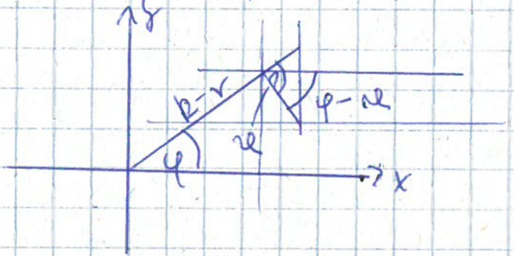
Ez a legkisebb K-halmaz? Nem tudni.

Abram Samojovič Besikovič (1891 - 1970).

jött, az orosz matematikus. Ő csinált valamit.

<u>Hipociklois egyenlete:</u>





$$(R-r)\cos\varphi + r\cos(\varphi-\vartheta)$$

$$r\vartheta = R\varphi$$

$$\boxed{\vartheta = \frac{R}{r}\varphi}$$

$$x(\varphi) = (R-r)\cos\varphi + r\cos(\varphi-\vartheta) = (R-r)\cos\varphi + r\cos\left(\frac{r-R}{r}\varphi\right).$$

$$y(\varphi) = (R-r)\sin\varphi + r\sin(\varphi-\vartheta) = (R-r)\sin\varphi + r\sin\left(\frac{r-R}{r}\varphi\right).$$

ez lesz az egyenlete.

$R = \frac{3}{4}$ $\quad r = \frac{1}{4}$ lesz ebben az esetben.

$$x(\varphi) = \frac{1}{2}\cos\varphi + \frac{1}{4}\cos(\varphi-\vartheta) =$$

$$= \frac{1}{2}\cos\varphi + \frac{1}{4}\cos(2\varphi)$$

$$y(\varphi) = \frac{1}{2}\sin\varphi - \frac{1}{4}\sin(2\varphi) \quad \blacksquare$$

A területét is lehet számolni.

$$X(\pi) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$$

$$y(\pi) = 0. \qquad T = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\Big(y(\varphi)x'(\varphi) + x(\varphi)y'(\varphi)\Big)\,d\varphi$$

$$x'(\varphi) = -\frac{1}{2}\sin\varphi - \frac{1}{4}2\sin 2\varphi = -\frac{1}{2}\left(\sin\varphi + \sin 2\varphi\right)$$

$$y'(\varphi) = \frac{1}{2}\cos\varphi - \frac{1}{2}\cos(2\varphi)$$

$$x(\varphi)y'(\varphi) = \frac{1}{4}\cos^2\varphi + \frac{1}{8}\cos\varphi\cos 2\varphi - \frac{1}{4}\cos\varphi\cos 2\varphi - \frac{1}{8}\cos^2(2\varphi)$$

$$x'(\varphi)y(\varphi) = -\frac{1}{4}\sin^2\varphi + \frac{1}{8}\sin\varphi\sin 2\varphi - \frac{1}{4}\sin\varphi\sin 2\varphi + \frac{1}{8}\sin^2(2\varphi)$$

<u>összeadva:</u>

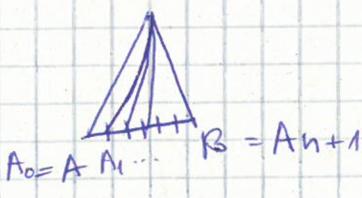
$$+\frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\Big(\cos(3\varphi)\Big) - \frac{1}{4}\Big(\cos(3\varphi)\Big)$$

$\vdots$

$$T = \frac{\pi}{8}. \quad \blacksquare$$

Vissza Samoljovičhoz. Mi van vele:

Van egy tetszőleges Δ. $\forall\, \varepsilon > 0$-hoz $\exists\, n$, hogy

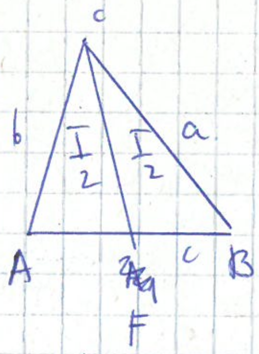


Kapjuk $AA_1C\,\Delta$

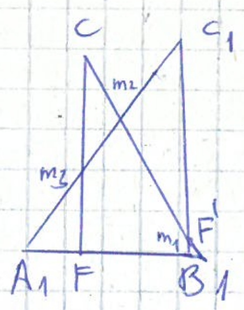
$A_1A_2C\,\Delta$

$A_{n-1}A_nC\,\Delta$

közös terület kisebb, mint ε.



$\Rightarrow$ eltolás



$$\begin{cases} A_1FM_3\triangle = T_1 \quad (\text{tanult}) \\ FBC\triangle = \frac{T}{2} \\ M_1C_1M_2\triangle = T_2 \end{cases}$$

A2 $\quad A_1FM_3\triangle \sim AFC\triangle. \qquad \dfrac{T_1}{\frac{T}{2}} = \left(\dfrac{c-s}{c}\right)^2$

$$\Updownarrow$$

hossz$(\overline{AA_1}) = s \qquad T_1 = \frac{T}{2}\left(\frac{c-s}{c}\right)^2.$

$M_2M_1C_1\triangle \sim \cancel{M_1M_8C}\triangle$ és lesz

$C\,O\,M_8\triangle$

$\frac{T}{2}$ lesz $\qquad \dfrac{\frac{T}{2}}{T} = \left(\dfrac{\quad}{a}\right)^2$

hossz$(\overline{M_1M_2}) = ?$ (itt elakadás van.)

hossz$(\overline{F'B}) = \frac{c}{2} - s$

$$\frac{\text{hossz}(\overline{M_1B})}{\frac{c}{2}-s} = \frac{a}{\frac{c}{2}} = \frac{2a}{c}.$$

$A_1B\cancel{C}^{M_2}\triangle \sim ABC\triangle$

$$\frac{\text{hossz}(\overline{M_1\cancel{M_2}B})}{\text{hossz}(\overline{A_1B})} = \frac{a}{c}$$

$$\text{hossz}(M_2,B) = \frac{(c-s)a}{c}.$$

$$\text{hossz}(M_2,B) - \text{hossz}(M_1B) = \frac{(c-s)a}{c} - \left(\frac{2a}{c}\cdot\frac{c}{2}-s\right) =$$

$$= \frac{2as}{2c} = \frac{as}{c}.$$

$$\frac{T_2}{T} = \left(\frac{\frac{as}{c}}{a}\right)^2$$ lesz.

$$\frac{T}{2}\left(\frac{\left(\frac{c}{2}-s\right)^2}{\frac{c^2}{2}}\right)^2 + \frac{T}{2} + T\cdot\frac{s^2}{c^2}$$ így néz ki, a függvény.

$$f(s) = \frac{T}{2}\,\frac{(c-s)^2}{c^2} + \frac{T}{2} + T\,\frac{s^2}{c^2} =$$

$$= \frac{T}{2c^2}\left((s-c)^2 + c^2 + 2s^2\right) =$$

elrontottuk..

$$f(s) = \frac{T}{2}\,\frac{(c-2s)^2}{c^2} + \frac{T}{2} + T\,\frac{s^2}{c^2}$$

$$f'(s) = \frac{T}{2c^2}\left(2(2s-c)\cdot 2 + 4s\right) = 0$$

$$8s - 4c + 4s = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$12s = 4c$$

$$\boxed{s = \frac{c}{3}}$$

$$\cancel{\frac{T}{2sc}} \qquad \frac{T}{2c^2}\left(\frac{c^2}{9} + c^2 + \frac{2c^2}{9}\right) = \frac{T}{18}(1+9+2) =$$

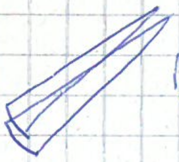
$$= \frac{2}{3}T \quad \blacksquare$$

Brezsikovič-féle állítás volt ez

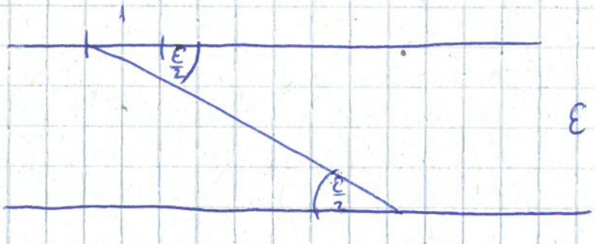
Van egy körlap:

el lehet tolgatni a KÖRCIKKEKET is.

Az is ε alatt marad.



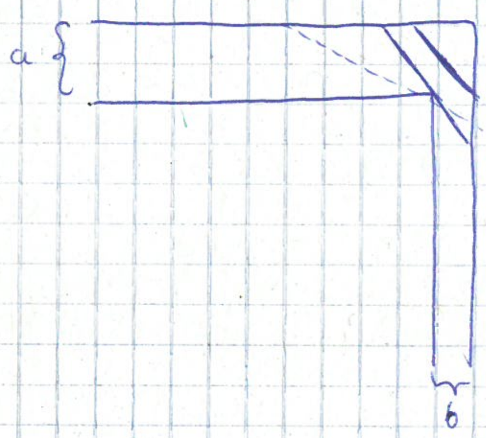
Így összetologatjuk



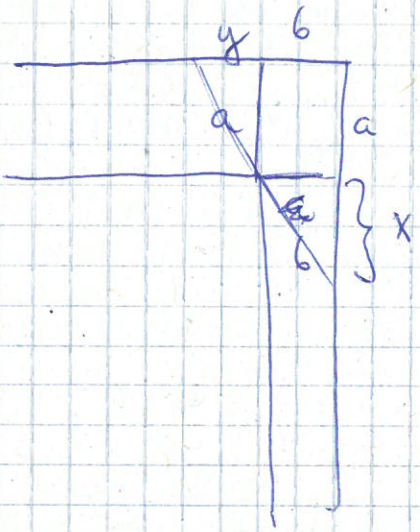
ε nagyságú területet [illegible]

$$\frac{\varepsilon}{8n}$$

Más



mekkora az a gerenda, amit ezen a folyón le lehet úsztatni?



$$\frac{b}{x} = \frac{y}{a}$$

$$y = \frac{ab}{x}$$

$$\sqrt{x^2+b^2} + \sqrt{y^2+a^2} =$$

$$= \sqrt{x^2+b^2} + \sqrt{a^2 + \frac{a^2b^2}{x^2}} \Rightarrow$$ ezt kell minimalizálni

$$f(x) = \sqrt{x^2+b^2} + \sqrt{a^2 + \frac{(ab)^2}{x^2}}$$

$0 < x < \infty$.

$$f'(x) = \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+b^2}} + \frac{1\left(-2\frac{(ab)^2}{x^3}\right)}{\cancel{2}\sqrt{a^2+\frac{(ab)^2}{x^2}}}$$

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+b^2}} - \frac{ab^2}{x^2\sqrt{x^2+b^2}} = 0$$

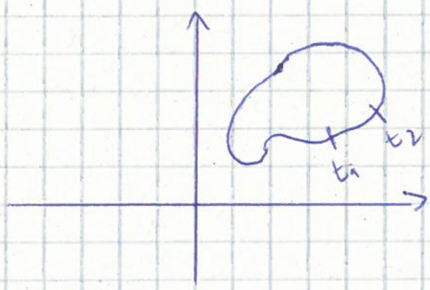
$$x^3 = ab^2 \iff x = \sqrt[3]{ab^2}$$

$$\sqrt{\sqrt[3]{a^2b^4}+b^2}\left(1+\frac{a}{a^2}\right. \ldots$$

$$\sqrt{b}\sqrt{\sqrt[3]{a^2b}+b}\left(1+\sqrt[3]{\frac{a^2}{b^2}}\right). \quad \boxtimes$$

Síkbeli görbék adott kerülettel. Melyik a ~~legkisebb~~ legnagyobb területű?

A kör. Ezt kell bizonyítani



zárt, rektifikálható görbe

$x(t)$, $y(t)$

Adott kerület: K.

Ívhossz: s $\quad (0 \le s \le K)$

$t = \frac{2\pi}{K} s$ legyen

$0 \le t \le 2\pi$ lesz.

$$x(0) = x(2\pi)$$
$$y(0) = y(2\pi).$$

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{(x'(\alpha))^2+(y'(\alpha))^2}\, d\alpha \qquad |s'(t)|^2 = (x'(\alpha))^2 + (y'(\alpha))^2.$$

$$s(t) = \frac{K}{2\pi} t$$

$$\frac{K^2}{4\pi^2} = (x'(t))^2 + (y'(t))^2 \quad \text{kapter.}$$

$$\cancel{\frac{K^2}{4\pi^2}}$$

$$K = 2\pi \int_0^{2\pi} \left((x'(t))^2 + (y'(t))^2 \right) dt$$

Fourier - sorfejtés:
$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos kt + b_k \sin kt \right)$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos kt \, dt$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{4\pi} f(t) \sin kt \, dt.$$

$$f'(t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} k \left(b_k \cos kt - a_k \sin kt \right)$$

$\cancel{g(t)}$ $\cancel{y(t)}$ $x(t)$ a_0, a_k, b_k

$y(t)$ A_0, A_k, B_k.

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(t) y(t) dt = \frac{a_0 A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k A_k + b_k B_k) \quad \text{(Parseval-tétel)}$$

$$x'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k \left(b_k \cos kt - a_k \sin kt \right)$$

$$y'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k \left(B_k \cos kt - A_k \sin kt \right).$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(x'(t)\right)^2 dt + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(y'(t)\right)^2 dt = \frac{K^2}{4\pi^2}\cdot\frac{1}{\pi}\cdot 2\pi = \frac{K^2}{2\pi^2} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} k^2\left(b_k^2 + a_k^2 + B_k^2 + A_k^2\right) =$$

$$= \cdot$$

$$T = \int_0^{2\pi} y(t)\, x'(t)\, dt \underset{\text{Parseval}}{=} \pi\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(k b_k A_k - k a_k B_k\right)\right)$$

$$K^2 - 4\pi T = 2\pi^2 \sum_{k=1}^{\infty}\Big(k^2 b_k^2 + k^2 a_k^2 + k^2 B_k^2 + k^2 A_k^2 - 2k b_k A_k + 2k a_k B_k\Big)$$

$$\cancel{= 2\pi^2 \sum \left(b_1^2 + a_1^2 + b_1^2\right)}$$

$$= 2\pi^2\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(k^2 b_k^2 - 2k b_k A_k + A_k^2\right) \ldots\right.$$

kapjuk.

$$T \le \frac{K^2}{4\pi}$$

$$y(t) = \frac{A_0}{2} + b_1 \cos t - a_1 \sin t$$

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos t + b_1 \sin t$$

kijön: $\left(x(t) - \frac{a_0}{2}\right)^2 + \left(y(t) - \frac{A_0}{2}\right)^2 = a_1^2 + b_1^2 \Rightarrow$

KÖR!

övé a győzelem