

2018.10.27

2. konstans

Az analízis...

Számelméleti alkalmazás

α algebrai szám. Van olyan $P(x)$ polinom, melyre

$$P(\alpha) = 0. \quad \text{Ezt algebrai.}$$

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$$

α is algebrai szám lesz.

$$P(x) = P\left(\frac{x}{\alpha}\right) = \frac{a_0}{\alpha^n} x^n + \frac{a_1}{\alpha^{n-1}} x^{n-1} + \dots + a_n$$

De: $i\alpha$ is algebrai szám lesz.

eml: $P(-ix) = P(\alpha)$ lesz éppen.

$$i^0 = 1$$

$$i^1 = i$$

$$i^2 = -1$$

$$i^3 = -i$$

$$i^4 = 1$$

$\vdots$

páros hatvány valós

páratlan $-i$ komplex.

$$P(x) = p_1(x) + x p_2(x)$$

p_1, p_2 páros polinom

↑
rac
egészíthető

$p_1(x) - x p_2(x)$ is legyen még.

$$P(x) = (p_1(x) + x p_2(x)) (p_1(x) - x p_2(x)) = (p_1(x))^2 - x^2 (p_2(x))^2$$

ide írjuk be.

$$P_{ij}(-ix) = P_{ij}(x)$$

$$P_{ij}(i\alpha) = P(\alpha) = 0. \quad \text{Tehát az } i\alpha \text{ is algebrai szám.}$$

legyen α algebrai szám és vegyük az összes olyan polinomból melyek α gyöke.

Vizsgáljuk a legkisebb fokszámúakat.

Van ilyen f a fokok $P(x)$.

(1)

$$p(x) = a_0 x^d + a_1 x^{d-1} + \dots + a_d$$

$$a_0 \neq 0$$

$$a_d \neq 0$$

$\alpha \neq 0$ (ne legyen triviális)

Legyen még egy: $q(x) = b_0 x^d + b_1 x^{d-1} + \dots + b_d$. Ennek is gyöke α .

Legyen: $b_0 p(x) - a_0 q(x) = (d-1)$ -ed fokú polinom lesz így.
 Ennek is gyöke α .

$$\Rightarrow b_0 p(x) - a_0 q(x) \equiv 0$$

$$p(x) = \frac{a_0}{b_0} q(x)$$

$\uparrow$ csak egy racionálisban térhet el egymástól.

Ily módon lehet beszélni minimálpolinomról.

Ennyit kell tudni ahhoz, hogy vizsgálódni tudjunk arról, hogy egy szám algebrai vagy transzcendens-e.

Liouville -féle szám: beállthat, hogy transzcendens.

$$0 < L_0 = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{10^{j!}} \text{ volt ez. } \varepsilon_2 \text{ ugye konvergencia. (Absz.)}$$

Biz: Tfh nem transzcendens.

$$n\text{-ed fokú: } p(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$$

$$p(L_0) = 0$$

$$p(x) = (x - L_0) p_1(x)$$

$\uparrow$ $(n-1)$ -ed fokú polinom.

$$L_0 = \underbrace{\frac{1}{10} + \frac{1}{10^{2!}} + \frac{1}{10^{3!}} + \dots + \frac{1}{10^{m!}}}_{S_m} + \frac{1}{10^{(m+1)!}} + \frac{1}{10^{(m+2)!}} + \dots \text{ kható fel}$$

(2)

$$S_m = \frac{A}{10^m!} \quad A \in \mathbb{Z}. \quad \text{maradék tag: } \frac{1}{10^{(m+1)!}} + \dots$$

$$|S_m - L_0| \leq \frac{1}{10^{(m+1)!}} \left(1 + \frac{1}{10^{m+2}} + \frac{1}{10^{(m+2)(m+3)}} + \frac{1}{10^{(m+2)(m+3)(m+4)}} + \dots \right)$$

$$\leq \frac{1}{10^{(m+1)!}} \left(1 + \frac{1}{10^{m+2}} + \frac{1}{10^{2(m+2)}} + \frac{1}{10^{3(m+2)}} + \dots \right)$$

$$1 + \frac{1}{10^{m+2}} + \frac{1}{(10^{m+2})^2} + \frac{1}{(10^{m+2})^3} + \dots$$

geometriai sor.

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{10^{m+2}}} = \frac{10^{m+2}}{10^{m+2} - 1}$$

$$\leq \frac{2}{10^{(m+1)!}}$$

Legyen $P(x) \Big|_{x=S_m}$, ahol m elég nagy.

$$S_m \rightarrow L_0$$

$$\exists N \quad \forall m > N \quad S_m \in [L_0 - 1, L_0 + 1]$$

$$|P_1(x)| \leq K \quad \forall x \in [L_0 - 1, L_0 + 1]$$

$$0 \leq |P(S_m)| \leq |S_m - L_0| K \leq \frac{2K}{10^{(m+1)!}}$$

$$\frac{2K}{10^{(m+1)!}} < \frac{1}{2} \quad \text{ez így még sem jó.}$$

Kell még $\left| \binom{m!}{10^m} \cdot P(S_m) \right| \leq \frac{(10^m!)^n 2K}{10^{(m+1)!}}$ ← ennek is mellékes feltevése tartania.
 $0 \leq \uparrow$ egészen igazolható a $P(x)$. még ez sem jó becslés

$$\frac{1}{10^{(m+1)!}} \left(1 + \frac{1}{10^{(m+2)}} + \frac{1}{10^{(m+2)(m+3)}} + \dots \right)$$

Vagy mégis jó az eredeti becslés?

$$\frac{(10^{m!})^n \cdot 2K}{10^{(m+1)!}} = \frac{10^{m! \cdot n} \cdot 2K}{10^{m! \cdot n} \cdot 10^{m+1-n}} = \frac{2K}{10^{m-n+1}} \rightarrow 0 \quad \blacksquare$$

Következő: π is transzcendens szám.

Legyen $f(x) := m$ -edfokú polinom. (egész együtthatós).

$$\begin{aligned} I(t) &= \int_0^t e^{t-u} f(u) du = \left[-e^{t-u} f(u) \right]_0^t - \int_0^t -e^{t-u} f'(u) du = \\ &= -f(t) + e^t f(0) + \int_0^t e^{t-u} f'(u) du = \\ &= -f(t) + e^t f(0) - f'(t) + e^t f'(0) + \int_0^t e^{t-u} f''(u) du \\ &= \dots \end{aligned}$$

$$I(t) = e^t \sum_{j=0}^m f^{(j)}(0) - \sum_{j=0}^m f^{(j)}(t)$$

$$|I(t)| \leq t e^t \bar{f}(t)$$

$$f(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_m$$

$$\bar{f}(x) := |a_0| x^m + |a_1| x^{m-1} + \dots + |a_m|$$

$$e := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n, \quad \left(1 + \frac{2}{n} \right)^n \rightarrow e^2$$

$$\left(1 + \frac{x}{n} \right)^n \rightarrow e^x \quad \text{v. ldgós.}$$

e^x folytonos, diffható, $(e^x)' = e^x$.

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{másfelé.}$$

Komplex számra: $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$

ismert: $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ (Euler-alak)

Tudjuk, hogy π a π -t.

Biz: Tfh. π algebrai szám. $\Rightarrow i\pi$ is algebrai.

$\alpha = i\pi$. Vegyük az egész együtthatós minimálpolinom.

$$p(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n \quad a_0, a_1, \dots \neq 0$$

$$a_j \in \mathbb{Z}.$$

minimálpolinom.

$p(x)$ -nek n -dből gyöke van.

$$\alpha = \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n.$$

$$(1 + e^{\alpha_1})(1 + e^{\alpha_2}) \dots (1 + e^{\alpha_n}) = 0 \quad \text{mert}$$

$$e^{\alpha_1} = e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = 0i - 1$$

$$e^{c_1 \alpha_1 + c_2 \alpha_2 + \dots + c_n \alpha_n}$$

c -k vagy 0 -k, vagy 1 -ek
ilyen tagokból áll.

Legyen d a 0 -k száma.

$$d + e^{\alpha_1} + e^{\alpha_2} + \dots + e^{\alpha_n} = 0.$$

$p(x)$ -ből (egész)

$$f(x) := (x - \alpha_1)^p (x - \alpha_2)^p \dots (x - \alpha_n)^p \cdot a_0^p$$

még egy dolog: Ha t komplex:

$$|I(t)| \leq |t| e^{|t|} f(|t|).$$

$$|I(t)| \leq a_0^{kp} (|t| + |x_1|)^p \dots (|t| + |x_n|)^p \quad \text{kp faszárma}$$

$\parallel$
 m

$$I = I(x_1) + I(x_2) + \dots + I(x_n).$$

$$I(x_k) = e^{\sum_{j=0}^m f^{(j)}(0) x_k^j} - \sum_{j=0}^m f^{(j)}(x_k) x_k^j. \quad \text{teljes egész 2-ra.}$$

$$I = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m e^{x_k} f^{(j)}(0) - \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^n f^{(j)}(x_k)$$

$$kp + p - 1 = m.$$

$$\text{Ha } j < (p-1) \Rightarrow f^{(j)}(0) = 0.$$

$$j = p-1.$$

$$f^{(j)}(0) = (p-1)! a_0^{kp} (x_1 x_2 \dots x_n)^p$$

és $(p-1)!$ - el osztható.

Ha $j > (p-1)$, akkor már $p!$ -vel is osztható lesz.

I egészen $(p-1)!$ -el osztható, de $p!$ -vel már nem.
Ezt tudjuk.

$$(p-1)! \leq |I| \leq B^p \quad \text{az egy becslés}$$

$$|I(x_k)| \leq a_0^{kp} C^{kp}$$

$$B > 0.$$

minden nagy p -re teljesül.

$$1 \leq B \frac{B^{p-1}}{(p-1)!} \rightarrow 0 \quad \text{emiat } \pi \text{ transzcendens}$$

Beszámít még az e számból.

Az e irracionális. Ezt lássuk be at first.

$$e = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \quad \text{Tfh. } e \text{ racionális}$$

$$e = \frac{p}{q}, \quad \ln q(p, q) = 1, \quad p, q > 0$$

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots + \frac{1}{(n+1)!} + \dots$$

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots = \frac{A}{n!} \quad A \in \mathbb{Z}$$

$$\text{egész: } n!q \left(\frac{p}{q} - \frac{A}{n!} \right) = n! \left(p - \frac{Aq}{n!} \right) \leq q \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \dots + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right)$$

$$\leq q \frac{1}{n+1} \left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots \right) = q \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}} =$$

geom. sor.

$$= q \frac{1}{n+1} \frac{n+1}{n} = \frac{q}{n} < 1$$

e nem is algebrai szám. Ez is belátható.

Biz:

$$\text{Kell: } I(t) = \int_0^t e^{t-u} f(u) du = e^t \sum_{j=0}^m f^{(j)}(0) - \sum_{j=0}^m f^{(j)}(t).$$

$$|I(t)| \leq t e^t \bar{f}(t), \quad t > 0 \quad \text{becslés kell.}$$

Tfh e algebrai szám.

$$p(x) = q_0 + q_1 x + \dots + q_n x^n. \quad \text{Ennek gyöke.}$$

$$p(e) = 0.$$

(7)

$$f(x) = x^{p-1} (x-1)^p (x-2)^p \dots (x-n)^p$$

$$f = g_0 I(0) + g_1 I(1) + \dots + g_n I(n)$$

$$m = np + p - 1$$

$$f = \sum_{j=0}^n \left(g_j e^{\lambda_j} \sum_{l=0}^m f^{(l)}(0) \right) - \sum_{j=0}^n g_j \sum_{l=0}^m f^{(l)}(j) \quad \text{ennyi}$$

$$\sum_{j=0}^n g_j e^{\lambda_j} \sum_{l=0}^m f^{(l)}(0)$$

o $f(x) = e^{-bx}$

$$f = - \sum_{j=0}^n g_j \sum_{l=0}^m f^{(l)}(j)$$

A g számok egészei.

$$f^{(l)}(j) = ?$$

$$f^{(l)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{amíg } l < p-1 \\ (p-1)!(n!)^p & l = p-1 \\ p!A & l > p-1 \end{cases} \quad A \in \mathbb{Z}$$

$$f^{(l)}(j) = \begin{cases} 0 & \text{ha } l < p \\ p! j^{p-1} (j-1)(j-2) \dots (j-n) & \text{ha } l = p \\ p!B & \end{cases} \quad B \in \mathbb{Z}$$

$$(p-1)! \leq |f| \leq \sum_{j=1}^n j e^{\lambda_j} C^p = K C^p$$

$$K e^{\frac{C^{p-1}}{(p-1)!}} \rightarrow 0 \quad \downarrow$$

$$|I(j)| \leq j e^{\lambda_j} n^p (2n)^p$$

$$\sum_{j=1}^n (j e^{\lambda_j}) C^p$$

$$C = 2n^2$$

(8)

$$\frac{1}{e} : e^{\uparrow \text{tr}} = 1 \quad \uparrow \text{alg.}$$

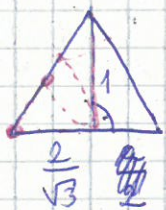
ilyen simán lehet. Például.

Geometria:



π területű kör.

Van-e kisebb, ahol az egységnyi szögben megforgatható?



ebben meg lehet forgatni?
meg.

$\frac{\sqrt{3}}{3}$ a területe.

$\pi > 3,14$

$\frac{\sqrt{3}}{3} < 1$.

ennyi. Van-e még kisebb?

Ez lesz közvetlen alddommal.

még 1 dolog: $\sqrt{m^2 + 1}$

$m^2 + 1$ négyzetes szám kell, hogy legyen.

Azra lehet racionális

$$X = \sqrt{m^2 + 1}$$

$$X^2 = m^2 + 1$$

$X^2 - m^2 - 1 = 0$ polinom, ennek gyöke lesz

Tehát algebrai szám.

Ha α algebrai $\rightarrow \alpha^i$ algebrai-e?

$p(\alpha) = 0$ ez tuti. Ebből kell gyantani.

$$p(x) = (p_1(x) + x p_2(x)) \underset{9}{(p_1(x) - x p_2(x))} \text{ lesz...}$$

$$\sqrt{a} = \frac{p}{q}$$

$$a q^2 = p^2 \quad \square$$