

2018.10.05.

1. konzultáció

Az analízis...
(2. oldal)

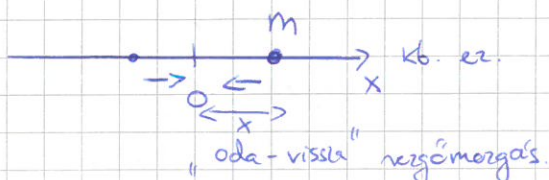
Összó: Tótyi József.

Végén vizsga. Textkérdésekkel majd.

Fizikai alkalmazás:

rezgés, helyszerezés lesz.

gumiszál, golyó.



1.) Ideális eset (nincs súrlódás)

Newton II.

$$x(t) = ?$$

↑ hol van
a golyó? Ezt ly'a le.

$x'(t)$: sebesség

$x''(t)$: gyorsulás.

$$m x''(t) = -c x(t)$$

→: $c x(t)$ alakú lesz.

↑ rugóállandó (gumiszál-állandó :). $c > 0$

- $c x(t)$ lesz a ráható erő (ell. irány)

$$m x''(t) + c x(t) = 0 \quad c > 0 \text{ lesz de inkább:}$$

$$m x''(t) + c x(t) = 0 \quad c > 0. \quad (m > 0, \text{ világos}).$$

DIFFERENCIÁLEGYENLET (másodrendű, lineáris).

megold:

$$x(t) = e^{\lambda t};$$

$$x'(t) = \lambda e^{\lambda t};$$

$$x''(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}.$$

$$m \lambda^2 e^{\lambda t} + c e^{\lambda t} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\lambda^2 = -\frac{c}{m}}$$

$\lambda \in \mathbb{C}$.
világos.

①

$$\lambda = i\sqrt{\frac{c}{m}} \text{ lesz.}$$

$$\text{Legyen } \omega^2 = \frac{c}{m}$$

$$\text{Így: } \lambda = i\omega$$

$$\text{Most: } e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t. \text{ ez lesz, ugye.}$$

Valós megoldás: $\cos \omega t$, $\sin \omega t$ és ezek lin. kombinációja is.
(be lehet látni)

LÁSSUK BE:

$$x(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t :$$

$$x'(t) = -C_1 \omega \sin \omega t + C_2 \omega \cos \omega t$$

$$x''(t) = -C_1 \omega^2 \cos \omega t - C_2 \omega^2 \sin \omega t$$

$$= -\frac{c}{m} (C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t) = -\frac{c}{m} x(t). \text{ Ennyi. } \square$$

$$x(t) = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \left(\frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} \cos \omega t + \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} \sin \omega t \right)$$

$$\sin \alpha = \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} \quad -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

$$\cos \alpha = \frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}$$

$$x(t) = \underbrace{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}_{A > 0} \left(\sin \alpha \cos \omega t + \cos \alpha \sin \omega t \right) \text{ látható fel.}$$

$$x(t) = A \cdot (\sin \alpha \cos \omega t + \cos \alpha \sin \omega t) = A \sin(\omega t + \alpha).$$

↑
attól függ, hogyan
számozjuk az
időt.

Látjuk, hogy $x(t)$ szinuszos. Belátuk a körpálya leírását.

Adjunk neki r ngszerez st is! (Plusz azt f t rn r  i n .)

legyen $F = B \sin(\omega t)$, $B, \omega > 0$ konstansok legyenek.

$$m x''(t) = -c x(t), \Leftrightarrow x''(t) = -\frac{c}{m} x(t)$$

$\Downarrow$

$$x''(t) + \omega^2 x(t) = B \sin(\omega t)$$

$\Uparrow$ itt jelenik meg.

INHOMOG N M SODREND T
KAPTUNK.

Partikul ris megold s:

$$x_p(t) = m \sin(\omega t)$$

$$x_p'(t) = m \omega \cos(\omega t)$$

$$x_p''(t) = -m \omega^2 \sin(\omega t)$$

Beh.: $-m \omega^2 \sin(\omega t) + \omega^2 m \cancel{\cos(\omega t)}^{\sin(\omega t)} = B \sin(\omega t)$

$$-m \omega^2 + m \omega^2 = B$$

$$m(\omega^2 - \omega^2) = B \Leftrightarrow m = \frac{B}{\omega^2 - \omega^2}$$

Inhomogen egyenlet  lt. megold sa:

$$\underline{x(t) = A \sin(\omega t + \alpha) + \frac{B}{\omega^2 - \omega^2} \sin(\omega t).} \quad \text{Ha } \omega \neq \omega.$$

A f r l s nem j r, ha $\omega = \omega$

Ha ω  r l van ω -hoz: $\frac{B}{\omega^2 - \omega^2}$ j  nagy lesz,  gg

$x(t)$ is b r  nagy lesz.

 ) A g n r l   is sz r dhet...

Ez a rezonancia-jelenség ismét a gyakorlatban is, vegye. (lásd a hidas fűzést).

Mi van, ha $\omega = \omega_0$?

$$x_p(t) = m t \sin(\omega t)$$

$$x_p'(t) = m \sin(\omega t) + m t \cos(\omega t) \cdot \omega$$

$$x_p''(t) = m \omega \cos(\omega t) + m \omega \cos(\omega t) - m t \omega^2 \sin(\omega t)$$

Helyettesítsük be!

$$2m\omega \cos(\omega t) - m\omega^2 t \sin(\omega t) + \omega^2 m t \sin(\omega t) = B \sin(\omega t)$$

Ilyen alakú megoldás nincs

Legyen: $x_p(t) = t(m_1 \sin \omega t + m_2 \cos \omega t)$.

$$(m_2 t \cos \omega t)' = m_2 \cos \omega t - m_2 \omega t \sin \omega t$$

$$(m_2 t \cos \omega t)'' = -m_2 \omega \sin \omega t - m_2 \omega \sin \omega t - m_2 \omega t \cos \omega t.$$

2. rész össze:

$$2m_1 \omega \cos(\omega t) - 2m_2 \omega \sin(\omega t) = B \sin(\omega t)$$

$$m_1 = 0$$

$$m_2 = -\frac{B}{2\omega} \quad \text{valószínűleg elírás}$$

$$x(t) = \underbrace{-\frac{B}{2\omega}}_{\text{minusz}} t \cos(\omega t) + A \sin(\omega t).$$

ennyi volt a rezonancia.

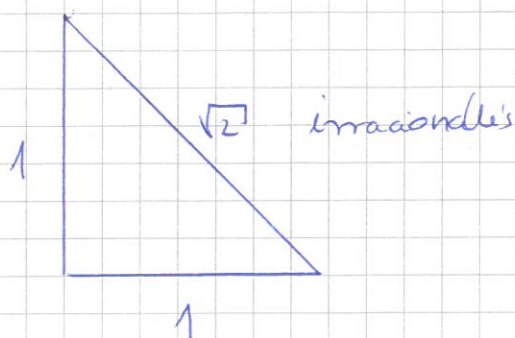
(Basics...)

Bonyolultabb az inga, de arról most nem beszélünk.

Új témakör jön. Számok.

$\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_0$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, ...

Irracionális eset:



$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}, \quad p, q \in \mathbb{Z} \text{ és } \text{lkko}(p, q) = 1.$$

$$2q^2 = p^2 \quad \leftarrow \begin{array}{l} q \text{ ennek is osztója} \\ \text{lesz.} \end{array}$$

$\uparrow$
 q ennek osztója

De relatív prímek, ezért a fenti ellentmondás.

Más: $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}} = ?$ Rac vagy irrac?
Ezt kell eldönteni.

$\parallel$
 $\times$.

$$\begin{aligned} X^3 &= 2+\sqrt{5} + 3\sqrt{(2+\sqrt{5})^2(2-\sqrt{5})} + 3\sqrt{(2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})^2} + 2-\sqrt{5} = \\ &= 4 + 3\sqrt{(2+\sqrt{5})(4-5)} + 3\sqrt{(2-\sqrt{5})(4-5)} = \\ &= 4 - 3\left(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\right) \quad (= X^3) \end{aligned}$$

$$X^3 + 3X - 4 = 0 \quad \text{lesz.}$$

$\uparrow$ X ennek valós gyöke.

$$X = 1 \quad \text{megoldás!}$$

$$(X-1)(\dots) \quad \text{Hogyan?}$$

$$x^3 - x^2 + x^2 - x + 4x - 4 = 0$$

$$(x-1)(x^2 + x + 4) = 0$$

$$\uparrow x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-15}}{2} \quad \text{komplex}$$

Tehát: $\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}} = 1$ lesz.

Más út: $(a + \sqrt{5})^3 = a^3 + 3a^2\sqrt{5} + 3a5 + 5\sqrt{5} =$

$$\underbrace{a^3 + 15a}_{\text{ez legyen } 2} + \underbrace{(3a^2 + 5)\sqrt{5}}_{\text{ez neg 1. Lehet-e?}}$$

ez legyen
2

ez neg 1. Lehet-e?
Hát...

$$(a - \sqrt{5})^3 = a^3 - 3a^2\sqrt{5} + 3a5 - 5\sqrt{5}$$

$$\underbrace{a^3 + 15a}_{\text{ez legyen } 2} + \underbrace{(-3a^2 - 5)\sqrt{5}}_{\text{ez neg 1. Lehet-e?}}$$

ez legyen
2

ez neg 1.

Lehet-e?

Hát...

Legyen $a = \frac{1}{2}$.

$$\frac{1}{8} + \frac{15}{2} \dots \text{Ez rossz lt.}$$

Legyen $a = 2$: $8 + 30 - (12 + 5)\sqrt{5}$.

ez most mire volt jó? Senki sem tudja...

Legyen $\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} + 3 \cdot \frac{1}{4} \frac{\sqrt{5}}{2} + 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{4} + \frac{5\sqrt{5}}{8}$.

$$\underbrace{\frac{15}{8} + \frac{1}{8}}_2 + \frac{1}{3} + \frac{15}{8} \frac{\sqrt{5}}{8} + \frac{5\sqrt{5}}{8} = \underline{\underline{2 + \sqrt{5}}}$$

KIJÖTT!!!

$$\text{Esz: } \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} = 1. \text{ Így is látható.}$$

É így ennyi.

π . Tetszőleges kör kerületének és ~~átmérőjének~~ a fele. (Egység sugarú).

π racionális vagy irracionális? Ez is kérdés lehet.

Prímszámok: 2, 3, 5, 7, 11, ... Végtelen sok prím van.

$$p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$$

Összeszorva és hozzáadva
egyet egyik tényleges sem
osztója. $\hookrightarrow$

Ebben nem volt analízis.

Kutassunk olyat, amiben van!

Biz: Legyen véges sok prím. $(p_1, p_2, \dots, p_n)$

$$\text{Legyen: } \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + \dots \text{ ha } |x| < 1.$$

$$\text{Nyomjuk: } x = \frac{1}{p_1}$$

geom. sor.

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{p_1^k}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p_1^k} \quad k=1, 2, \dots, n. \text{ konvergens.}$$

Abszolút konvergens sorok összeadhatók.

$$\prod_{k=1}^n \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k}} \text{ egy racionális szám, nulla és egy szám esik.}$$

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p_k} \text{ Harmonikus sor, DIVERGENS.}$$

Ez ellentmondás! $\hookrightarrow$

$$\text{Kapjuk: } \frac{z_1 z_2 z_3 \dots z_n}{p_1 p_2 p_3 \dots p_n}$$

π minden term. szám prímtényező's alája
megjelenik itt

Hogyan helyezkednek el a prímszámok?

IKER PRÍMEK:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23
 1 2 2 4 2 4 2 4

Tetszőlegesen nagy hézagok lehetnek a prímszámok között.

~~XXXX~~

$n!+2, n!+3, n!+4, \dots, n!+n$

egyként sem prím!

aránytalanul nagy hézagot tudunk csinálni:

Legyen: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p_k}$ p prím. KONVERGENS? DIVERGENS?

DIVERGENS.

Biz: Tfh $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p_k}$ konvergens valamely pozitív számhoz konvergál.
 indir.
 $p_1, p_2, p_3, \dots$

Cauchy-kritérium: $\frac{1}{2}$ -hez $\exists l$
 $\sum_{k=l+1}^{\infty} \frac{1}{p_k} < \frac{1}{2}$

$p_1, p_2, \dots, p_l$ számok maradékaival vissza.
 prímek.

Legyen $N_l(x)$: x -nél nem nagyobb poz. egész szám,
 amely prímtényezői előállításában csak
 $p_1, p_2, \dots, p_l$ fordul elő.

Becsüljük $N_l(x)$ -et.
 $K = \sum_{m=1}^x \frac{1}{m}$ itt meg egyet kigyeztetünk
 $\uparrow$ páros kiegészítés $p-k$

$$m = p_1^{c_1} p_2^{c_2} \dots p_\ell^{c_\ell}, \text{ ahol } c_1, c_2, \dots, c_\ell = 0 \text{ vagy } 1.$$

m -re 2^ℓ lehetőségünk van.

Adódik: $N_\ell(x) \leq 2^\ell \sqrt{x}$ becslés.

↑
ez szorát magyarázatra,
de mindegy.

$\lfloor x \rfloor - N_\ell(x)$ valós számtól terület

megadja x -nél nem nagyobb ^{egész} számok számát, ahol

$p_{\ell+1}, p_{\ell+2}, \dots$ ferdén él.

$p, 2p, 3p, \dots, kp$

$np \leq x \Rightarrow n \leq \frac{x}{p}$

$\left\lfloor \frac{x}{p} \right\rfloor$

$(n+1)p > x$ legyen.

↑ egész
része

$\left\lfloor \frac{x}{p} \right\rfloor \leq \frac{x}{p}$

Igy: $\lfloor x \rfloor - N_\ell(x) \leq x - N_\ell(x) \leq \frac{x}{p_{\ell+1}} + \frac{x}{p_{\ell+2}} + \dots = x \sum_{k=\ell+1}^{\infty} \frac{1}{p_k} < \frac{x}{2}$

$x - 2^\ell \sqrt{x} \leq x - N_\ell(x) < \frac{x}{2}$

$\frac{x}{2} < 2^\ell \sqrt{x}$

$\sqrt{x} < 2^{\ell+1}$ ^{← rögzített.}

↑
tekintve
valós

Végteles sok $4k-1$ típusú prímszám van.

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} -$$

$\forall$ páratlan szám $(4k+1)$ vagy $(4k-1)$ alakú.

Biz:

$\exists$ véges sok ilyen van. $p_1, p_2, \dots, p_r$

Legyen $4p_1 p_2 \dots p_{r-1}$ új szám.

Ez is az lesz, " $4k-1$ "-alakú.

De ez már összetett. Van " $4k-1$ " osztója.

Nem lehet az se $p_1 p_2 \dots p_{r-1}$. Ez ellátmondás $\hookrightarrow$

Ha $\ln k(a_1 b) = 1$, $\Rightarrow$ az $a_1 b$ alakú számok közül végtelen sok prím van. Ezt nehéz bizonyítani.

Legyen $x \in \mathbb{R}$. $\pi(x)$ az x -nél nem nagyobb prímszámok száma.

$$\exists c_1, c_2 > 0, \text{ hogy } \frac{c_1 x}{\ln x} < \pi(x) < \frac{c_2 x}{\ln x} \quad \text{és}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\ln x}} = 1.$$

Kérdés: π racionális vagy irracionális? (Visszajelt.)

Áll: π irracionális. (Hogyan lehet kiszámolni?)



$$\varphi = \frac{\pi}{4}, \text{ tg } \frac{\pi}{4} = 1.$$

Itt is jelen van.

$\frac{\pi}{4} = \arctg(1)$. $\arctg x$ hatványsora előállítható.

Tfh: $\pi = \frac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{N}$ por. egészek és $\text{lkko}(a, b) = 1$.

Kell egy segédfüggvény: $f(x) = \frac{x^n (a - bx)^n}{n!}$ n egy jól megválaszt. term. szám.

$$f(\pi) = 0. \text{ ez lesz igaz.}$$

$$f(0) = 0. \quad [x(a - bx)]^n$$

$$\frac{bx(a - bx)}{b} \leq \frac{(bx + a - bx)^2}{(2)^2 b} = \frac{a^2}{4b} \text{ becslés.}$$

$0 \leq x \leq \pi$ legyen.

$f(x)$, $f^{(k)}(x)$ a nulla helyen egész számok.

$\frac{C x^{n+j}}{n!}$ alakú polinom, mindegyik tag ilyen

Derivált: $\frac{C(n+j) x^{n+j-1}}{n!}$ lesz. $\dots, \frac{C(n+j)!}{n!}, 0, 0, 0, \dots$
 $n+j$ deriv.
 1. derivált

A polinom is a nulla helyen egy egész szám.

$$f(x) = \frac{b^n x^n (\pi - x)^n}{n!} \quad f(\pi - x) = \frac{b^n (\pi - x)^n x^n}{n!} = f(x)$$

szimmet.

$f(\pi-x)$ és $f(x)$ deriváltján.

$f^{(2k)}(0), f^{(2k)}(\pi)$ egész számok.

$f(x) \leq \frac{a^{2n}}{(4b)^n n!}$ felső becslésünk van.

$$\cancel{f(x)} = \cancel{f(x)} - \cancel{f^{(2)}(x)} + \cancel{f^{(4)}(x)} - \cancel{f^{(6)}(x)} + \dots - \cancel{f^{(2n)}(x)}$$

$$F(x) = f(x) - f^{(2)}(x) + f^{(4)}(x) - f^{(6)}(x) + \dots + (-1)^n f^{(2n)}(x).$$

$$F^{(2)}(x) = f^{(2)}(x) - f^{(4)}(x) + f^{(6)}(x) - \dots + (-1)^{n-1} f^{(2n)}(x)$$

$$F(x) + F^{(2)}(x) = f(x) = (F'(x) \sin x - F(x) \cos x)'$$

$$F(x) \sin x + F^{(2)}(x) \sin x = f(x) \sin x.$$

$$(F(x) \sin x)' = F'(x) \sin x + F(x) \cos x$$

$$(F(x) \sin x)'' = F''(x) \sin x + F'(x) \cos x + F'(x) \cos x - F(x) \sin x$$

Ez helyes, csak nem jó semmi.

$$(F'(x) \sin x - F(x) \cos x)' = F''(x) \sin x + \cancel{F'(x) \cos x} - \cancel{F'(x) \sin x} + F(x) \sin x$$

$$\int_0^\pi f(x) \sin x dx = F'(\pi) \sin \pi - F(\pi) \cdot 0 + F(0) - F(0) = F(\pi) - F(0).$$

↑ az eredmény egy egész szám

↑ mindkettő
egész szám.

$$< \int_0^\pi f(x) \sin x dx \leq \pi \frac{\left(\frac{a^2}{4b}\right)^n}{n!}$$

Tudjuk: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$. Így:

$$0 < \int_0^{\pi} f(x) \sin x dx < \frac{1}{2}$$

↑ nincs ilyen egész! $\Downarrow$ $\square$

II. Átszámolás:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad \text{ha } |x| < 1.$$

$x \rightarrow -x^2$

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \quad |x| < 1$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + c = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \underbrace{\frac{x^{2n+1}}{2n+1}} \quad |x| < 1.$$

$x=1$ helyen konvergens.

Abel-tétel miatt $x=1$ is behelyettesíthető.

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$$

↑ $\arctan(1)$ így számolható ki a $\frac{\pi}{4}$.

és a sor annálgy lassan konvergál.

Algebrai számok: rac. együtthetős polinomok gyökei.

Állítás: Racionális számok $\nsubseteq$ algebrai számok

$$r = \frac{a}{b}$$

$$a - (br) = 0$$

$$a - bx = 0$$

első fokú algebrai számok

$$X = \sqrt{2} \Leftrightarrow X^2 - 2 = 0 \quad \text{másodfokú és az irrac.}$$

$$X = \sqrt{2} + \sqrt{3}.$$

$$X^2 = 2 + 2\sqrt{6} + 3$$

$$X^2 - 5 = 2\sqrt{6}$$

$$\text{és } (X^2 - 5)^2 = 4 \cdot 6 \quad \text{negyedfokú.}$$

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a, b, c \in \mathbb{Z}.$$

$$-b \pm \sqrt{\quad} \leftarrow \text{itt van benne 1 négyzetes szám és nincs több.}$$

$\sqrt[n]{2}$ egy $\mathbb{Q}$ -adfokú algebrai szám.

π az algebrai vagy transzcendens? Ez is kérdés...

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^{n!}} \quad \text{van. és bizony transzcendens.}$$