

Név: Unger Tamás István

Neptun: FTD1YJ

Web: <http://maxwell.sze.hu/~ungert>

ALGEBRA ÉS SZÁMELMÉLET, HARMADIK HÁZI FELADAT

1. OLDJA MEG AZ ALÁBBI EGYENLETET.

$$fu + gv = \text{ln.k.o}(f, g), \quad f = x^6 + \bar{6}, \quad g = x^4 + \bar{5}x + \bar{1} \in \mathbb{Z}_7[x].$$

Haladjunk az euklideszi algoritmus szerint:

$$\begin{array}{l} \frac{f}{g} : (x^6 + \bar{6}) : (x^4 + \bar{5}x + \bar{1}) = x^2 \\ - (x^6 + \bar{5}x^3 + x^2) \\ \hline (\bar{2}x^3 + \bar{6}x^2 + \bar{6}). \end{array}$$

A fentiek alapján: $(x^6 + \bar{6}) = (x^4 + \bar{5}x + \bar{1}) \cdot x^2 + (\bar{2}x^3 + \bar{6}x^2 + \bar{6})$. Tovább folytatva az algoritmust:

$$\begin{array}{l} (x^4 + \bar{5}x + \bar{1}) : (\bar{2}x^3 + \bar{6}x^2 + \bar{6}) = \bar{4}x \\ - (x^4 + \bar{3}x^3 + \bar{3}x) \\ \hline (\bar{4}x^3 + \bar{2}x + \bar{1}) : (\bar{2}x^3 + \bar{6}x^2 + \bar{6}) = \bar{4}x + \bar{2} \\ - (\bar{4}x^3 + \bar{5}x^2 + \bar{5}) \\ \hline (\bar{2}x^2 + \bar{2}x + \bar{3}). \end{array}$$

Ezek alapján: $(x^4 + \bar{5}x + \bar{1}) = (\bar{2}x^3 + \bar{6}x^2 + \bar{6}) (\bar{4}x + \bar{2}) + (\bar{2}x^2 + \bar{2}x + \bar{3})$. Tovább haladva érkezünk az utolsó lépéshez:

$$\begin{array}{l} (\bar{2}x^3 + \bar{6}x^2 + \bar{6}) : (\bar{2}x^2 + \bar{2}x + \bar{3}) = x \\ - (\bar{2}x^3 + \bar{2}x^2 + \bar{3}x) \\ \hline (\bar{4}x^2 + \bar{4}x + \bar{6}) : (\bar{2}x^2 + \bar{2}x + \bar{3}) = x + \bar{2} \\ - (\bar{4}x^2 + \bar{4}x + \bar{6}) \\ \hline 0. \end{array}$$

Ebből pedig következik, hogy $(\bar{2}x^3 + \bar{6}x^2 + \bar{6}) = (\bar{2}x^2 + \bar{2}x + \bar{3}) (x + \bar{2})$, valamint az utolsó nemzéró maradék a legnagyobb közös osztó, azaz $\text{ln.k.o}(f, g) = \bar{2}x^2 + \bar{2}x + \bar{3}$. Most pedig rakjuk össze azt, amit tudunk. Az euklideszi algoritmus utolsó lépéséből:

$$\text{ln.k.o}(f, g) = \bar{2}x^2 + \bar{2}x + \bar{3} = g - (\bar{2}x^3 + \bar{6}x^2 + \bar{6}) (\bar{4}x + \bar{2}).$$

Az algoritmus második lépéséből

$$\bar{2}x^3 + \bar{6}x^2 + \bar{6} = f - (x^2) g$$

adódik, amit visszahelyettesítve

$$\text{ln.k.o}(f, g) = g - (f - (x^2) g) (\bar{4}x + \bar{2}) = g - (\bar{4}x + \bar{2}) f + (\bar{4}x^3 + \bar{2}x^2) g$$

adódik. Elvégezve a beszorzásokat és az összevonásokat:

$$\text{ln.k.o}(f, g) = (\bar{4}x^3 + \bar{2}x^2 + 1)g + (\bar{3}x + \bar{5})f.$$

2. OLDJA MEG AZ ALÁBBI EGYENLETET.

$$fu + gv = \text{ln.k.o}(f, g), \quad f = x^5 + x + \bar{2}, \quad g = x^4 + \bar{2}x^2 + \bar{2}x + \bar{1} \in \mathbb{Z}_3[x].$$

Ismételten az euklideszi algoritmus szerint járunk el, de ezúttal $\mathbb{Z}_3$ felett:

$$\begin{array}{r} \frac{f}{g} : (x^5 + x + \bar{2}) : (x^4 + \bar{2}x^2 + \bar{2}x + \bar{1}) = x \\ - (x^5 + \bar{2}x^3 + \bar{2}x^2 + x) \\ \hline (x^3 + x^2 + \bar{2}). \end{array}$$

Azt kaptuk, hogy $x^5 + x + \bar{2} = (x^4 + \bar{2}x^2 + \bar{2}x + \bar{1})x + (x^3 + x^2 + \bar{2})$. A következő lépés:

$$\begin{array}{r} (x^4 + \bar{2}x^2 + \bar{2}x + \bar{1}) : (x^3 + x^2 + \bar{2}) = x \\ - (x^4 + x^3 + \bar{2}x) \\ \hline (\bar{2}x^3 + \bar{2}x^2 + \bar{1}) : (x^3 + x^2 + \bar{2}) = x + \bar{2} \\ - (\bar{2}x^3 + \bar{2}x^2 + \bar{1}) \\ \hline 0. \end{array}$$

Azt kaptuk, hogy $\text{ln.k.o}(f, g) = x^3 + x^2 + \bar{2}$. Az algoritmus első lépéséből máris látszik, hogy $\text{ln.k.o}(f, g) = f - g(x) = f + g(\bar{2}x)$.

3. OLDJA MEG AZ ALÁBBI EGYENLETET.

$$fu + gv = \text{ln.k.o}(f, g), \quad f = x^4 + x^3 + x + \bar{1}, \quad g = x^3 + \bar{2}x^2 + \bar{2}x + \bar{1} \in \mathbb{Z}_5[x].$$

Az euklideszi algoritmus $\mathbb{Z}_5$ felett:

$$\begin{array}{r} \frac{f}{g} : (x^4 + x^3 + x + \bar{1}) : (x^3 + \bar{2}x^2 + \bar{2}x + \bar{1}) = x \\ - (x^4 + \bar{2}x^3 + \bar{2}x^2 + x) \\ \hline (\bar{4}x^3 + \bar{3}x^2 + \bar{1}) : (x^3 + \bar{2}x^2 + \bar{2}x + \bar{1}) = x + \bar{4} \\ - (\bar{4}x^3 + \bar{3}x^2 + \bar{3}x + \bar{4}) \\ \hline \bar{2}x + \bar{2}. \end{array}$$

Kaptuk: $f = g(x + \bar{4}) + (\bar{2}x + \bar{2})$. Tovább haladva:

$$\begin{array}{r} (x^3 + \bar{2}x^2 + \bar{2}x + \bar{1}) : (\bar{2}x + \bar{2}) = \bar{3}x^2 \\ - (x^3 + x^2) \\ \hline (x^2 + \bar{2}x + \bar{1}) : (\bar{2}x + \bar{2}) = \bar{3}x^2 + \bar{3}x \\ - (x^2 + x) \\ \hline (x + \bar{1}) : (\bar{2}x + \bar{2}) = \bar{3}x^2 + \bar{3}x + \bar{3} \\ - (x + \bar{1}) \\ \hline 0. \end{array}$$

A legnagyobb közös osztó az utolsó nemzéró maradék, tehát $\text{ln.k.o}(f, g) = \bar{2}x + \bar{2}$, az algoritmus első lépéséből pedig:

$$\bar{2}x + \bar{2} = \text{ln.k.o}(f, g) = f - g(x + \bar{4}) = f + g(\bar{4}x + \bar{1}).$$