

Név: Unger Tamás István

Neptun: FTD1YJ

Web: <http://maxwell.sze.hu/~ungert>

ALGEBRA ÉS SZÁMELMÉLET, MÁSODIK HÁZI FELADAT

1. TRIGONOMETRIKUS ALAKBAN SZÁMOLVA SZÁMÍTSA KI AZ ALÁBBI KOMPLEX SZÁM ÉRTÉKÉT. A VÉGEREDMÉNYT ADJA MEG KANONIKUS ALAKBAN IS. (14.)

$$\frac{(-1+i)^{2422}}{(\sqrt{3}+i)^{1208}}.$$

$$-1+i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right), \quad \sqrt{3}+i = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right).$$

$$\begin{aligned} \text{Így: } \frac{(-1+i)^{2422}}{(\sqrt{3}+i)^{1208}} &= \frac{(\sqrt{2})^{2422} \left(\cos \frac{3 \cdot 2422\pi}{4} + i \sin \frac{3 \cdot 2422\pi}{4} \right)}{2^{1208} \left(\cos \frac{1208\pi}{6} + i \sin \frac{1208\pi}{6} \right)} = \\ &= \frac{2^{1211} \left(\cos \frac{3 \cdot 2422\pi}{4} + i \sin \frac{3 \cdot 2422\pi}{4} \right)}{2^{1208} \left(\cos \frac{1208\pi}{6} + i \sin \frac{1208\pi}{6} \right)} = 2^3 \frac{\left(\cos \frac{2 \cdot 3633\pi}{4} + i \sin \frac{2 \cdot 3633\pi}{4} \right)}{\left(\cos \frac{2 \cdot 604\pi}{6} + i \sin \frac{2 \cdot 604\pi}{6} \right)}. \end{aligned}$$

A számlálóban negyedik egységgyök szerepel. Világos, hogy az egyszerűsítéséhez az

$$x \equiv 3633 \pmod{4}$$

kongruenciát vizsgáljuk. Világos, hogy $4|3600$ és az is, hogy $4|32$, tehát $4|3632$ és $3633 - 3632 = 1$, így

$$x \equiv 3633 \equiv 1 \pmod{4},$$

ezért

$$\cos \frac{2 \cdot 3633\pi}{4} + i \sin \frac{2 \cdot 3633\pi}{4} = \cos \frac{2\pi}{4} + i \sin \frac{2\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}.$$

A nevezőben a hatodik egységgyök jelent meg. Szintén világos, hogy ezúttal az

$$x \equiv 604 \pmod{6}$$

kongruencia az érdekes számunkra, amely az

$$x \equiv 604 \equiv 4 \pmod{6}$$

módon egyszerűsíthető, tehát

$$\cos \frac{2 \cdot 604\pi}{6} + i \sin \frac{2 \cdot 604\pi}{6} = \cos \frac{2 \cdot 4\pi}{6} + i \sin \frac{2 \cdot 4\pi}{6} = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3}$$

adódik. Innen a feladat már könnyen befejezhető:

$$8 \cdot \frac{\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)}{\left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right)} = 8 \left(\cos \frac{-5\pi}{6} + i \sin \frac{-5\pi}{6} \right) = 8 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} \right) = -4\sqrt{3} - 4i.$$

2. OLDJA MEG AZ ALÁBBI KONGRUENCIARENDSZERT.

$$4x \equiv 7 \pmod{9}, \quad 10x \equiv 4 \pmod{12}.$$

A kongruenciák külön-külön megoldhatók, hiszen $\text{ln.k.o}(4, 9) = 1$ és $\text{ln.k.o}(12, 10) = 2$, valamint $1 \nmid 7$ és $2 \nmid 4$. Megoldható a kongruenciarendszer is, hiszen $\text{ln.k.o}(12, 9) = 3$ és $3 \mid 7 - 4 = 3$. Hozzuk őket egyszerűsített alakra:

$$4x \equiv 7 \equiv 16 \pmod{9} \Leftrightarrow x \equiv 4 \pmod{9}, \quad 10x \equiv 4 \equiv 40 \pmod{12} \Leftrightarrow x \equiv 4 \pmod{6}.$$

Az első kongruenciából $x = 9k + 4$ írható fel, $k \in \mathbb{Z}$. Ezt beírva a második kongruenciába

$$9k + 4 \equiv 4 \pmod{6} \Leftrightarrow 9k \equiv 0 \pmod{6}$$

adódik, amelyből $k \equiv 0 \pmod{\frac{6}{\text{ln.k.o}(9, 6)} = 2}$. Innen $k = 2l$ adódik, $l \in \mathbb{Z}$. Visszahe-lyettesítve:

$$x = 9k + 4 = 18l + 4 \Leftrightarrow x \equiv 4 \pmod{18}.$$

3. OLDJA MEG AZ ALÁBBI DIOFANTOSZI EGYENLETET.

$$78x + 30y = 12.$$

Először is $\text{ln.k.o}(78, 30) = 6$ az euklideszi algoritmus szerint:

$$78 = 2 \cdot 30 + 18,$$

$$30 = 1 \cdot 18 + 12,$$

$$18 = 1 \cdot 12 + 6,$$

$$12 = 2 \cdot 6 + 0.$$

Mivel $\text{ln.k.o}(78, 30) = 6 \mid 12$, így az egyenletnek van megoldása az egész számok körében. Járjunk el a következőképpen:

$$18 = 1 \cdot 12 + 6 \Leftrightarrow 6 = 18 - 12.$$

$$30 = 1 \cdot 18 + 12 \Leftrightarrow 12 = 30 - 18, \text{ ezért } 6 = 18 - (30 - 18) = -30 + 2 \cdot 18.$$

$$78 = 2 \cdot 30 + 18 \Leftrightarrow 18 = 78 - 2 \cdot 30, \text{ ezért } 6 = -30 + 2 \cdot (78 - 2 \cdot 30) \text{ amelyből}$$

$$6 = 78 \cdot 2 + 30 \cdot (-5) \text{ adódik.}$$

Ebből $x_0 = 2$ és $y_0 = -5$ olvasható le, melyekből a diofantoszi egyenlet összes megoldása:

$$x = 2 + \frac{30}{6}t = 2 + 5t, \quad y = -5 - \frac{78}{6}t = -5 - 13t, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

4. ADJA MEG A KÖVETKEZŐ LEGENDRE-SZIMBÓLUM ÉRTÉKÉT.

$$\left(\frac{103}{151} \right).$$

Mivel 103 és 151 különböző páratlan prímek, így a négyzetes reciprocitás tételét alkalmazva:

$$\left(\frac{103}{151} \right) \left(\frac{151}{103} \right) = (-1)^{\frac{102}{2} \frac{150}{2}} = \left((-1)^{51} \right)^{75} = (-1)^{75} = -1.$$

Ebből következik, hogy

$$\left(\frac{103}{151} \right) = - \left(\frac{151}{103} \right).$$

Mivel $151 \equiv 151 - 103 = 48 \pmod{103}$, ezért:

$$\left(\frac{103}{151}\right) = -\left(\frac{151}{103}\right) = -\left(\frac{48}{103}\right).$$

Mivel 103 páratlan prím:

$$\left(\frac{2}{103}\right) = 1, \text{ mert } 103 \equiv 7 \pmod{8}.$$

Tovább haladva:

$$\begin{aligned} \left(\frac{103}{151}\right) &= -\left(\frac{151}{103}\right) = -\left(\frac{48}{103}\right) = -\left(\frac{2}{103}\right)\left(\frac{24}{103}\right) = -\left(\frac{2}{103}\right)\left(\frac{12}{103}\right) = \\ &= -\left(\frac{2}{103}\right)\left(\frac{6}{103}\right) = -\left(\frac{2}{103}\right)\left(\frac{3}{103}\right) = -\left(\frac{3}{103}\right). \end{aligned}$$

Ismét van két páratlan prímszámunk, használható a négyzetes reciprocitás tétele:

$$-\left(\frac{3}{103}\right)\left(\frac{103}{3}\right) = -(-1)^{\frac{2}{2}\frac{102}{2}} = -1 \cdot -1 = 1,$$

ezért

$$\left(\frac{103}{151}\right) = -\left(\frac{3}{103}\right) = \left(\frac{103}{3}\right).$$

Mivel

$$103 \equiv 1 \pmod{3},$$

$$\left(\frac{103}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1^2}{3}\right) = 1.$$

5. ADJA MEG A KÖVETKEZŐ LEGENDRE-SZIMBÓLUM ÉRTÉKÉT.

$$\left(\frac{173}{181}\right).$$

A négyzetes reciprocitás tételének értelmében

$$\left(\frac{173}{181}\right)\left(\frac{181}{173}\right) = (-1)^{90 \cdot 86} = \left((-1)^{90}\right)^{86} = 1.$$

Tehát $\left(\frac{173}{181}\right) = \left(\frac{181}{173}\right)$. Tovább vizsgálva:

$$\left(\frac{181}{173}\right) = \left(\frac{8}{173}\right), \text{ mert } 181 \equiv 181 - 173 = 8 \pmod{173}.$$

Tovább vizsgálva:

$$\left(\frac{8}{173}\right) = \left(\frac{2^2}{173}\right)\left(\frac{2}{173}\right) = \left(\frac{2}{173}\right) = -1, \text{ mert } 173 \equiv 5 \pmod{8}.$$

6. HATÁROZZUK MEG f ÉS g POLIMOMOK LEGNAGYOBB KÖZÖS OSZTÓJÁT $\mathbb{Q}$ FELETT.

$$f = x^5 + x^4 - 15x^3 + 25x^2 + 2x - 3, \quad g = x^2 + 4x - 5.$$

Végezzünk maradékos osztást:

$$\begin{aligned}
 & \frac{f}{g} : (x^5 + x^4 - 15x^3 + 25x^2 + 2x - 3) : (x^2 + 4x - 5) = x^3 \\
 & \quad - (x^5 + 4x^4 - 5x^3) \\
 & \quad \quad (-3x^4 - 10x^3 + 25x^2 + 2x - 3) : (x^2 + 4x - 5) = x^3 - 3x^2 \\
 & \quad \quad - (-3x^4 - 12x^3 + 15x^2) \\
 & \quad \quad \quad (2x^3 + 10x^2 + 2x - 3) : (x^2 + 4x - 5) = x^3 - 3x^2 + 2x \\
 & \quad \quad \quad - (2x^3 + 8x^2 - 10x) \\
 & \quad \quad \quad \quad (2x^2 + 12x - 3) : (x^2 + 4x - 5) = x^3 - 3x^2 + 2x + 2. \\
 & \quad \quad \quad \quad - (2x^2 + 8x - 10) \\
 & \quad \quad \quad \quad \quad (4x + 7).
 \end{aligned}$$

Tehát $x^5 + x^4 - 15x^3 + 25x^2 + 2x - 3 = (x^3 - 3x^2 + 2x + 2)(x^2 + 4x - 5) + (4x + 7)$.
Folytatva az euklideszi algoritmust:

$$\begin{aligned}
 & (x^2 + 4x - 5) : (4x + 7) = \frac{1}{4}x \\
 & \quad - \left(x^2 + \frac{7}{4}x\right) \\
 & \quad \quad \left(\frac{9}{4}x - 5\right) : (4x + 7) = \frac{1}{4}x + \frac{9}{16} \\
 & \quad \quad - \left(\frac{9}{4}x + \frac{63}{16}\right) \\
 & \quad \quad \quad - \frac{143}{16}.
 \end{aligned}$$

Tehát $x^2 + 4x - 5 = \left(\frac{1}{4}x + \frac{9}{16}\right)(4x + 7) - \frac{143}{16}$. Ezúttal a $(4x + 7)$ polinomot kell osztanunk $-\frac{143}{16}$ -tal:

$$\begin{aligned}
 & (4x + 7) : \left(-\frac{143}{16}\right) = -\frac{64}{143}x \\
 & \quad - (4x) \\
 & \quad \quad 7 : \left(-\frac{143}{16}\right) = -\frac{64}{143}x - \frac{112}{143} \\
 & \quad \quad - (7) \\
 & \quad \quad \quad 0.
 \end{aligned}$$

Látjuk tehát, hogy f és g közös osztója az utolsó nemzéró maradék, azaz $-\frac{143}{16}$.

7. HATÁROZZUK MEG f ÉS g POLIMOMOK LEGNAGYOBB KÖZÖS OSZTÓJÁT.
(11/(B))

$$f = x^4 + x^3 + x, \quad g = x^4 + x^2 + x, \quad f, g \in \mathbb{Z}_2[x].$$

Maradékos osztásokat végzünk $\mathbb{Z}_2$ felett a 6. feladatban ismertetett módon:

$$\begin{aligned}
 & \frac{f}{g} : (x^4 + x^3 + x) : (x^4 + x^2 + x) = \bar{1} \\
 & \quad - (x^4 + x^2 + x) \\
 & \quad \quad (x^3 + x^2).
 \end{aligned}$$

Folytatva az euklideszi algoritmust:

$$\begin{array}{r}
 (x^4 + x^2 + x) : (x^3 + x^2) = x \\
 \underline{-(x^4 + x^3)} \\
 (x^3 + x^2 + x) : (x^3 + x^2) = x + \bar{1} \\
 \underline{-(x^3 + x^2)} \\
 x.
 \end{array}$$

A következő lépés:

$$\begin{array}{r}
 (x^3 + x^2) : x = x^2 \\
 \underline{-(x^3)} \\
 x^2 : x = x^2 + x \\
 \underline{-x^2} \\
 0.
 \end{array}$$

A legnagyobb közös osztó az utolsó nemzéró maradék, azaz $\text{ln.k.o}(f, g) = x$.