

Név: Unger Tamás István

Neptun: FTD1YJ

Web: <http://maxwell.sze.hu/~ungert>

ALGEBRA ÉS SZÁMELMÉLET, ELSŐ HÁZI FELADAT

1. SZÁMÍTSA KI TRIGONOMETRIKUS ÉS KANONIKUS ALAKBAN IS.

$$\begin{aligned} \text{a.) } \frac{1 + \sqrt{3}i}{1 + i} &= \frac{\sqrt{4}(\cos \arctan \sqrt{3} + i \sin \arctan \sqrt{3})}{\sqrt{2}(\cos \arctan 1 + i \sin \arctan 1)} = \sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) + \right. \\ &+ i \sin \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) \Big) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right) = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} + i \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \right) = \\ &= \frac{1 + \sqrt{3}}{2} + i \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b.) } \frac{(-1 - i)(\sqrt{3} + i)}{(-1 + i)(-\sqrt{3} + i)} &= \frac{\sqrt{2}(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4}) 2(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6})}{\sqrt{2}(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}) 2(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6})} = \\ &= \left(\cos \frac{2\pi}{4} + i \sin \frac{2\pi}{4} \right) \left(\cos \frac{-4\pi}{6} + i \sin \frac{-4\pi}{6} \right) = \cos \frac{-\pi}{6} + i \sin \frac{-\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c.) } (-1 - i)(\sqrt{3} + i) &= \sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right) 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = \\ &= 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{17\pi}{12} + i \sin \frac{17\pi}{12} \right) = 2\sqrt{2} \left(\frac{-\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} + i \frac{-\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \right) = \\ &= (1 - \sqrt{3}) + (-1 - \sqrt{3}i). \end{aligned}$$

$$\text{d.) } (\sqrt{3} - i)(2 + 2\sqrt{3}i) = 2\sqrt{3} + 6i - 2i + 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3} + 4i = 8 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right).$$

$$\begin{aligned} \text{e.) } \frac{1 - i}{1 + i} &= \frac{\sqrt{2}(\cos \frac{-\pi}{4} + i \sin \frac{-\pi}{4})}{\sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})} = \cos \frac{-\pi}{2} + i \sin \frac{-\pi}{2} = \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} = \\ &= \cos \frac{3 \cdot 2\pi}{4} + i \sin \frac{3 \cdot 2\pi}{4} = -i \text{ negyedik primitív egységgyök.} \end{aligned}$$

2. DÖNTSE EL, HOGY IGAZAK-E AZ ALÁBBI ÁLLÍTÁSOK. A VÁLASZT MINDEN ESETBEN INDOKOLNI KELL!

a.) Van olyan z komplex szám, amelyre $\Re(z) = 1$ és $|z - i| = 3$.Mutassuk meg, hogy az állítás **igaz**. Világos, hogy $z = 1 + bi$, ahol $b \in \mathbb{R}$. Ekkor

$$|z - i| = |1 + (b - 1)i| = \sqrt{1 + (b - 1)^2} = 3,$$

ami b -re egy másodfokú egyenletet ad:

$$b^2 - 2b - 7 = 0, b_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 4 \cdot 7}}{2} = 1 \pm 2\sqrt{2},$$

így a

$$z_1 = 1 + (1 + 2\sqrt{2})i \text{ és } z_2 = 1 + (1 - 2\sqrt{2})i$$

komplex számok eleget tesznek a feltételeknek.

b.) Bmely $z \in \mathbb{C}$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén ha $\sqrt[n]{z}$ értékei között van valós szám, akkor z is valós.

Mutassuk meg, hogy az állítás **igaz**. Legyen $z = a + bi = \sqrt{a^2 + b^2} (\cos \varphi + i \sin \varphi)$. Ekkor

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{a^2 + b^2} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right),$$

ahol $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$. Világos, hogy a fenti kifejezés akkor és csak akkor lesz valós, ha $\frac{\varphi + 2k\pi}{n} = l\pi$. Ha $\varphi = 0$, akkor z valós. Ha $\varphi \neq 0$, akkor a bal oldali hányados csak akkor lehetne π egész számú többszöröse, ha φ is π egész számú többszöröse lenne, márpedig z ebben az esetben is valós szám. Ebből következik, hogy z csak valós lehet.

c.) Tetszőleges $z \in \mathbb{C}$ esetén ha z^2 harmadik egységgyök, akkor z is harmadik egységgyök.

Világos, hogy az állítás **hamis**. Amennyiben z^2 harmadik egységgyök, úgy $z^2 = \cos \frac{2k\pi}{3} + i \sin \frac{2k\pi}{3}$, $k = 0, 1, 2$. Ekkor $z = \cos \frac{2k\pi + 2l\pi}{6} + i \sin \frac{2k\pi + 2l\pi}{6}$, ami $k = 1$ és $l = 0$ esetén egy hatodik primitív egységgyököt jelent: $\cos \frac{2\pi}{6} + i \sin \frac{2\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

d.) Tetszőleges $z, w \in \mathbb{C}$ esetén $|z + w| = |z| + |w|$.

Az állítás **hamis**, általánosan csak a háromszög-egyenlőtlenséget lehet alkalmazni. Most viszont adjunk ellenpéldát! Legyen $z = 3 + 4i$ és $w = -3 + 4i$. Ekkor $|z| = |w| = 5$, de $|z + w| = |8i| = 8 < 5 + 5$.

e.) Van olyan z komplex szám, amelyre $\Re(z) = 2$ és $|z| = 1$.

Világos, hogy nincs ilyen komplex szám, az állítás **hamis**. Legyen $z = 2 + bi$, ekkor $|z| = \sqrt{4 + b^2}$, ahol $b \in \mathbb{R}$. Az állítás szerint $4 + b^2 = 1$, így $b^2 = -3$, amely egyenletnek nincsen megoldása a valós számok körében. Ez ellentmondás.

3. SZÁMÍTSA KI A GYÖK ÖSSZES ÉRTÉKÉT TRIGONOMETRIKUS ALAKBAN, MAJD ADJA MEG A VÉGEREDMÉNYT KANONIKUS ALAKBAN IS.

$$\text{a.) } \sqrt[3]{i} = \sqrt[3]{\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}} = \sqrt[3]{1} \left(\cos \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} \right), \quad k = 0, 1, 2.$$

$$k = 0 : \quad \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2},$$

$$k = 1 : \quad \cos \frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi}{3} = \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2},$$

$$k = 2 : \quad \cos \frac{\frac{\pi}{2} + 4\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{\pi}{2} + 4\pi}{3} = \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} = -i.$$

$$\text{b.) } \sqrt[4]{-1 - \sqrt{3}i} = \sqrt[4]{2 \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right)} = \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{\frac{4\pi}{3} + 2k\pi}{4} + i \sin \frac{\frac{4\pi}{3} + 2k\pi}{4} \right),$$

$$k = 0, 1, 2, 3.$$

$$k = 0 : \quad \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = \sqrt[4]{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right),$$

$$\begin{aligned} k = 1 : \quad \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{\frac{4\pi}{3} + 2\pi}{4} + i \sin \frac{\frac{4\pi}{3} + 2\pi}{4} \right) &= \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right) = \\ &= \sqrt[4]{2} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k = 2 : \quad \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{\frac{4\pi}{3} + 4\pi}{4} + i \sin \frac{\frac{4\pi}{3} + 4\pi}{4} \right) &= \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right) = \\ &= \sqrt[4]{2} \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k = 3 : \quad \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{\frac{4\pi}{3} + 6\pi}{4} + i \sin \frac{\frac{4\pi}{3} + 6\pi}{4} \right) &= \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6} \right) = \\ &= \sqrt[4]{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right). \end{aligned}$$

$$\text{c.) } \sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{64(\cos 0 + i \sin 0)} = \sqrt[6]{64} \left(\cos \frac{0 + 2k\pi}{6} + i \sin \frac{0 + 2k\pi}{6} \right), \quad k = 0, 1, \dots, 5.$$

$$k = 0 : \quad \sqrt[6]{64} (\cos 0 + i \sin 0) = 2,$$

$$k = 1 : \quad \sqrt[6]{64} \left(\cos \frac{2\pi}{6} + i \sin \frac{2\pi}{6} \right) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = 1 + \sqrt{3}i,$$

$$k = 2 : \quad \sqrt[6]{64} \left(\cos \frac{4\pi}{6} + i \sin \frac{4\pi}{6} \right) = 2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) = -1 + \sqrt{3}i,$$

$$k = 3 : \quad \sqrt[6]{64} \left(\cos \frac{6\pi}{6} + i \sin \frac{6\pi}{6} \right) = 2 (\cos \pi + i \sin \pi) = -2,$$

$$k = 4 : \quad \sqrt[6]{64} \left(\cos \frac{8\pi}{6} + i \sin \frac{8\pi}{6} \right) = 2 \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right) = -1 - \sqrt{3}i,$$

$$k = 5 : \quad \sqrt[6]{64} \left(\cos \frac{10\pi}{6} + i \sin \frac{10\pi}{6} \right) = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right) = 1 - \sqrt{3}i.$$

$$\text{d.) } \sqrt[4]{-16} = \sqrt[4]{16(\cos \pi + i \sin \pi)} = \sqrt[4]{16} \left(\cos \frac{\pi + 2k\pi}{4} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{4} \right), \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

$$k = 0 : \quad 2 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} + \sqrt{2}i,$$

$$k = 1 : \quad 2 \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i,$$

$$k = 2 : \quad 2 \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right) = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i,$$

$$k = 3 : \quad 2 \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right) = \sqrt{2} - \sqrt{2}i.$$

$$\text{e.) } \sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{8(\cos \pi + i \sin \pi)} = \sqrt[3]{8} \left(\cos \frac{\pi + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{3} \right), \quad k = 0, 1, 2.$$

$$k = 0 : \quad 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = 1 + \sqrt{3}i,$$

$$k = 1 : \quad 2 \left(\cos \frac{3\pi}{3} + i \sin \frac{3\pi}{3} \right) = -2,$$

$$k = 2 : \quad 2 \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right) = 1 - \sqrt{3}i.$$

4. DÖNTSE EL, HOGY GYŰRŰT, INTEGRITÁSTARTOMÁNYT, ILLETVE TESTET ALKOTNAK-E AZ ALÁBBI SZÁMHALMAZOK A SZOKÁSOS ÖSSZEADÁS ÉS SZORZÁS MŰVELETEKKEL.

a.) $\mathbb{Q}(i) = \{a + bi : a, b \in \mathbb{Q}\}$. Először vizsgáljuk meg, hogy $(\mathbb{Q}; +)$ Abel-csoportot alkot-e.

1. $(\mathbb{Q}; +)$ kommutatív, mert $(a + bi) + (c + di) = (c + di) + (a + bi) = (a + c) + (b + d)i \quad \forall a, b, c, d \in \mathbb{Q}$.
2. $(\mathbb{Q}; +)$ asszociatív, mert $((a + bi) + (c + di)) + (e + fi) = (a + bi) + ((c + di) + (e + fi)) = (a + c + e) + (b + d + f)i \quad \forall a, b, c, d, e, f \in \mathbb{Q}$.
3. $(\mathbb{Q}; +)$ egységelemes, mert $(\exists e \in \mathbb{Q}(i)) (\forall l \in \mathbb{Q}(i)) (e + l = l + e = l)$. Világos, hogy ez az elem az $e = 0 + 0i$.
4. $(\mathbb{Q}; +)$ -ben $(\forall l \in \mathbb{Q}(i)) (\exists l' \in \mathbb{Q}(i)) (l' + l = l + l' = e)$. Minden elemnek van tehát inverze, ez pedig $l = a + bi$ esetén $l' = -a - bi$.

A fentiek alapján $(\mathbb{Q}; +)$ Abel-csoport. Most vizsgáljuk meg, hogy $(\mathbb{Q}; \cdot)$ félcsoporth-e. Ehhez a szorzásra nézve teljesülnie kell az asszociativitásnak, azaz

$$((a + bi)(c + di))(e + fi) = (a + bi)((c + di)(e + fi)), \quad \forall a, b, c, d, e, f \in \mathbb{Q}.$$

Ennek belátása egy hosszadalmas, de kihívást nem jelentő ujjgyakorlat lenne, így részletezés nélkül – hivatkozva a komplex számtestre – állítom, hogy teljesül az asszociativitás, azaz $(\mathbb{Q}; \cdot)$ félcsoporth. Szintén hasonló indoklással élhetünk akkor, amikor azt állítjuk, hogy a $\cdot$ művelet disztributív az $+$ műveletre. A megadott $\mathbb{Q}(i)$ tehát gyűrű.

Világos, hogy a vizsgált gyűrű egységelemes ($1 + 0i$), kommutatív és zérusosztómentes, ezért integritástartomány is. Kérdés, hogy testet alkot-e. Ehhez az kell, hogy $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}; \cdot)$ Abel-csoport legyen. Ehhez minden elemnek kell, hogy legyen inverze, azaz

$$(\forall l \in \mathbb{Q}(i)) (\exists l' \in \mathbb{Q}(i)) (l' \cdot l = l \cdot l' = 1 + 0i).$$

Felírva a kifejezést

$$(a + bi)(e_1 + e_2i) = 1 + 0i \Leftrightarrow (ae_1 - be_2) + (ae_2 + be_1)i = 1 + 0i$$

adódik. Külön vizsgálva a valós és képzetes részeket az

$$\begin{cases} ae_1 - be_2 = 1, \\ ae_2 + be_1 = 0 \end{cases}$$

egyenletrendszer adódik. Átrendezve, behelyettesítve és $a \neq 0$ esetén $e_1 = \frac{1+be_2}{a}$, valamint $e_2 = \frac{-b}{a^2+b^2}$ írható fel, és a kifejezések alapján e_1 és e_2 racionális. Vizsgáljuk meg, hogy mi a helyzet, ha $a = 0$, erről ugyanis még nem állítottunk semmit. Ebben az esetben a

$$\begin{cases} -be_2 = 1, \\ be_1 = 0 \end{cases}$$

egyenletrendszer írható fel, ahol $b \neq 0$. Világos, hogy $e_1 = 0$ és $e_2 = \frac{1}{-b}$ adódik, mindkettő racionális. Minden elemnek van tehát inverze a multiplikatív zéruselemen kívül, $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}; \cdot)$ tehát Abel-csoport, így $\mathbb{Q}(i)$ test.

b.) $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Z}\}$. Az eddigiek alapján világos, hogy $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ nemcsak gyűrű, de integritástartomány is, hiszen zárt az összeadásra és a szorzásra, ahogy azt az előbb részletesen beláttuk. Vegyük észre viszont, hogy az inverzkeresésnél problémába ütköznénk, az ugyanis kivetne az egész számok köréből. Így $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ sajnos nem lehet test.

5. OLDJA MEG AZ ALÁBBI NEGYEDFOKÚ EGYENLETET.

$$x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 2x - 1 = 0$$

Legyen $f = x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 2x - 1$ és $g = x^2 + \frac{a}{2}x + \alpha$, $\alpha \in \mathbb{C}$, ahol $a = -4$. Ebben az esetben tehát $g = x^2 - 2x + \alpha$ valamely $\alpha \in \mathbb{C}$. Írjuk fel a következőt:

$$\begin{aligned} f - g^2 &= x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 2x - 1 - (x^2 - 2x + \alpha)(x^2 - 2x + \alpha) = \\ &= x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 2x - 1 - (x^4 - 2x^3 + \alpha x^2 - 2x^3 + 4x^2 - 2\alpha x + \\ &\quad + \alpha x^2 - 2\alpha x + \alpha^2) = (-1 - 2\alpha)x^2 + (2 + 4\alpha)x + (-\alpha^2 - 1). \end{aligned}$$

Legyen most

$$f = g^2 - (g^2 - f) = (x^2 - 2x + \alpha)^2 - ((2\alpha + 1)x^2 + (-4\alpha - 2)x + (1 + \alpha^2)).$$

Kell:

$$D = b^2 - 4ac = (-4\alpha - 2)^2 - 4(2\alpha + 1)(1 + \alpha^2) = -8\alpha^3 + 12\alpha^2 + 8\alpha = 0.$$

Egyből látjuk, hogy $\alpha = 0$ megoldás, ezért

$$f = (x^2 - 2x)^2 - (x^2 - 2x + 1) = (x^2 - 2x)^2 - (x - 1)^2 = (x^2 - 3x + 1)(x^2 - x - 1).$$

A szorzat nyilvánvalóan akkor zéró, ha valamelyik tényező zéró. A két tényező zéróhelyeinek megállapításához a másodfokú megoldóképletet alkalmazzuk:

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \text{ és } x_{3,4} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$