

Név: Unger Tamás István

Összpontszám: 11/10

Algebra és számelmélet

1. zárthelyi

(2018. 10. 26.)

feladás végig:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi.$$

1. Feladat. (4 pont)

(A) Igaz-e, hogy tetszőleges $z \in \mathbb{C}$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén abból, hogy $\sqrt[n]{z}$ -nek van valós értéke következik az, hogy z is valós? Ha igen, akkor egy mondatban indokolja, ha nem, akkor adjon ellenpéldát.

(B) Igaz-e, hogy tetszőleges $z \in \mathbb{C}$ -re, ha z^2 hatodik egységgyök, akkor z is hatodik egységgyök. Igazolja röviden, vagy adjon ellenpéldát.

(C) Az $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ gyűrű zérusosztómentes. Ha az állítás igaz, akkor röviden bizonyítsa, míg ha nem, adjon meg egy zérusosztópárt (két olyan 2×2 típusú nemzéró mátrixot, amelyek szorzata a zérómátrix).

(D) Igaz-e, hogy minden egységelemes gyűrűben $1 + 1 + 1 \neq 0$? (Itt 1 a gyűrű multiplikatív-, míg 0 az additív egységelemét jelöli.) Ha igaz, akkor röviden igazolja, ha nem, akkor adjon meg egy ellenpéldát.

2. Feladat. (4 pont)

Adja meg kanonikus alakban a következő gyökvonások eredményét:

$$\sqrt[3]{2+2i}$$

$$\sqrt[6]{-27}.$$

3. Feladat. (4 pont)

(A) Legyen $z \in \mathbb{C}$. Mutassa meg, hogy ha $|z| < \frac{1}{2}$, akkor

$$|(1+i)z^3 + iz| < \frac{3}{4}.$$

(B) Adja meg trigonometrikus és kanonikus alakban az

$$\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i} \right)^{20}$$

komplex számot.

4. Feladat. (4 pont)

Oldja meg az alábbi egyenletet.

$$x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 6x - 15 = 0.$$

5. Feladat. (4 pont)

Az alábbi halmazok közül melyek alkotnak gyűrűt, integritástartományt, ill. testet:

Jelölés: ~~cis~~

$$\text{cis } \varphi = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

2

Q

(A) $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$ a valós számok azokásos műveleteivel;

(B) $\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : \det(A) \neq 0\}$ a szokásos mátrixműveletekkel;

(C) $\mathbb{Z}[\alpha] = \{a + b\alpha : a, b \in \mathbb{Z}, \alpha^3 = 1, \alpha \neq 1\}$ a komplex számok szokásos műveleteivel;

(D) az összes komplex egységgyökök halmaza, a komplex számok szokásos műveleteivel.

Megoldási idő 60 perc

$$\textcircled{2} \quad \sqrt[3]{2+2i} = \sqrt[3]{2\sqrt{2} \text{ cis } \frac{\pi}{4}} = \underbrace{\sqrt[3]{2\sqrt{2}}}_{\sqrt{2}} \text{ cis } \frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{3} = \sqrt{2} \text{ cis } \frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{3}$$

$|z| = \sqrt{2^2 + 2^2}$
 $\arg z = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$
 $k = 0, 1, 2.$

$$k=0: \quad \sqrt{2} \text{ cis } \frac{\pi}{12} = \frac{1+\sqrt{3}}{2} + i \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$$

$$k=1: \quad \sqrt{2} \text{ cis } \frac{\frac{\pi}{4} + 2\pi}{3} = \sqrt{2} \text{ cis } \frac{\frac{\pi}{4} + 8\pi}{3} = \sqrt{2} \text{ cis } \frac{9\pi}{12} = -1 + i$$

$$k=2: \quad \sqrt{2} \text{ cis } \frac{\frac{\pi}{4} + 4\pi}{3} = \sqrt{2} \text{ cis } \frac{\frac{\pi}{4} + 16\pi}{3} = \sqrt{2} \text{ cis } \frac{17\pi}{12} = \frac{1-\sqrt{3}}{2} + i \frac{-1-\sqrt{3}}{2}$$

$$\sqrt[6]{-27} = \sqrt[6]{27 \text{ cis } \pi} = \underbrace{\sqrt[6]{27}}_{\sqrt{3} \text{ ksz.}} \text{ cis } \frac{\pi + 2k\pi}{6}$$

$k = 0, 1, 2, \dots, 5.$

hogy lehet? 2.2

fo. 1. 2. 3. 4. 5. 6.

$$k=0: \quad \sqrt{3} \text{ cis } \frac{\pi}{6} = \frac{3}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$k=1: \quad \sqrt{3} \text{ cis } \frac{3\pi}{6} = \sqrt{3} \text{ cis } \frac{\pi}{2} = i\sqrt{3}$$

$$k=2: \quad \sqrt{3} \text{ cis } \frac{5\pi}{6} = -\frac{3}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$k=3: \quad \sqrt{3} \text{ cis } \frac{7\pi}{6} = -\frac{3}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$k=4: \quad \sqrt{3} \text{ cis } \frac{9\pi}{6} = -\sqrt{3} i$$

$$k=5: \quad \sqrt{3} \text{ cis } \frac{11\pi}{6} = \frac{3}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$$



4.

$$\underbrace{x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 6x - 15 = 0}_f$$

$$g = x^2 + \frac{a}{2}x + d, \quad d \in \mathbb{C} \quad g = x^2 + x + d.$$

$$\begin{aligned} f - g^2 &= x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 6x - 15 - (x^2 + x + d)(x^2 + x + d) = \\ &= x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 6x - 15 - (x^4 + x^3 + dx^2 + x^3 + x^2 + dx + dx^2 + dx + d^2) = \\ &= \cancel{x^4} + \cancel{2x^3} - \cancel{2x^2} + \cancel{6x} - \cancel{15} - \cancel{x^4} - \cancel{x^3} - \cancel{dx^2} - \cancel{x^3} - \cancel{x^2} - \cancel{dx} - \cancel{dx^2} - \cancel{dx} - \cancel{d^2}. \end{aligned}$$

$$f - g^2 = \underbrace{(-2 - d - 1 - d)}_{-3 - 2d} x^2 + \underbrace{(6 - d - d)}_{6 - 2d} x + \underbrace{(-15 - d^2)}_{-15 - d^2}.$$

$$f = g^2 - (g^2 - f) = (x^2 + x + d)^2 - \left(\underbrace{(2d + 3)}_a x^2 + \underbrace{(2d - 6)}_b x + \underbrace{(15 + d^2)}_c \right).$$

$$D = b^2 - 4ac = (2d - 6)^2 - 4(2d + 3)(15 + d^2) =$$

$$\begin{aligned} &= (4d^2 - 24d + 36) - 4(30d + 2d^3 + 45 + 3d^2) = \\ &= \cancel{4d^2} - \cancel{24d} + \cancel{36} - \cancel{120d} - \cancel{8d^3} - \cancel{180} - \cancel{12d^2}. \end{aligned}$$

$$D = -8d^3 - 8d^2 - 144d - 144 \quad /: (-8)$$

$$D = d^3 + d^2 + 18d + 18$$

$\boxed{d = -1}$ megoldás. trivialisan.

Így: $f = (x^2 + x - 1)^2 - (x^2 - 8x + 16) =$

$$= (x^2 + x - 1)^2 - (x - 4)^2 = (x^2 + x - 1 - x + 4)(x^2 + x - 1 + x - 4) =$$

$$= (x^2 + 3)(x^2 + 2x - 5)$$

$$\uparrow$$

$$x^2 = -3$$

$$x_1 = \sqrt{3}i$$

$$x_2 = -\sqrt{3}i$$

$$x_{3,4} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4 \cdot 5}}{2}$$

$$\frac{-2 + \sqrt{24}}{2} \quad \sqrt{24}$$

$$\uparrow$$

$$x_3$$

$$\frac{-2 - \sqrt{24}}{2} \quad \sqrt{24}$$

$$\uparrow$$

$$x_4$$

3/B

$$\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20} = \left(\frac{2 \operatorname{cis} \frac{\pi}{3}}{\sqrt{2} \operatorname{cis}(-\frac{\pi}{4})}\right)^{20} = \left(\frac{2}{\sqrt{2}} \operatorname{cis} \frac{7\pi}{12}\right)^{20}$$

$$\arg(1-i) = -\arctan(1) = -\frac{\pi}{4} \quad \left(\frac{2}{\sqrt{2}} \operatorname{cis} \frac{7\pi}{12}\right)^{20} =$$

$$= \left(\sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{7\pi}{12}\right)^{20} =$$

$$= 2^{10} \operatorname{cis} \frac{7 \cdot 20\pi}{12} =$$

$$= 2^{10} \operatorname{cis} \frac{2 \cdot 70\pi}{12} = 2^{10} \operatorname{cis} \frac{2 \cdot 10\pi}{12} =$$

$$70 \equiv 10 \pmod{12}$$

$$\parallel$$

$$2^{10} \operatorname{cis} \frac{10\pi}{12} =$$

$$= 2^{10} \operatorname{cis} \frac{5\pi}{3}$$

$$\parallel$$

$$2^{10} \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right)$$

$$\parallel$$

$$2^{10} \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i \right)$$

1/A Igaz, mert 12 zart a szorzosna. ✓

1/B Legyen z^2 hatodik egységgyök.

$$z^2 = \cos \frac{2\pi}{6} + i \sin \frac{2\pi}{6}$$

$$z = \cos \frac{\frac{2\pi}{6} + 2k\pi}{2} + i \sin \frac{\frac{2\pi}{6} + 2k\pi}{2} \quad \text{lesz.}$$

Tehát ha z^2 6. primitív egységgyök:

$$z^2 = \cos \frac{2\pi}{6} + i \sin \frac{2\pi}{6}$$

$$\text{akkor } z = \cos \frac{\frac{2\pi}{6} + 2k\pi}{2} + i \sin \frac{\frac{2\pi}{6} + 2k\pi}{2} = \quad \checkmark k=0$$

$$= \cos \frac{2\pi}{12} + i \sin \frac{2\pi}{12}$$

ami bizonyítottan primitív egységgyök.

Az állítás így hamis. ✓

1/D Hamis, $\mathbb{Z}_3$ -ban ugyanis $1+1+1 = \bar{0}$. ($\mathbb{Z}_3$ test, mert 3 prim.) ✓

11C) Hamis, tartalmaz ugyanis zérusosztót. *például?*

Kellene egy példa:

~~$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$~~

E_2 nem lesz jó.

~~$$\begin{aligned} a &= 0 \\ c &= 0 \end{aligned}$$~~

~~$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$~~

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$a + c = 0$$

$$b + d = 0$$

$$\begin{pmatrix} 0=0 \\ 0=0 \end{pmatrix}$$

Tehát

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

már jó!

51C) Integritástartomány, mert zárt az összeadásra és a szorzásra.

Az összeadásra való zártság triviális, a szorzásra pedig azért, mert $\mathbb{Z}$ 3. egységeket is győzte az $(x^2 + x + 1)^0$ egyenletnek, azaz

$$\mathbb{Z}^2 + \mathbb{Z} + 1 = 0 \Leftrightarrow \mathbb{Z}^2 = -\mathbb{Z} - 1.$$

51A) Test, zárt az összeadásra és a szorzásra.

Er lehet, csak a prímszámú polinomokból

51B) A szorzásra való zártság a determinánsok szorzástétel miatt adódik.

Az összeadásra akkor nem lenne zárt, ha belevennénk a $\mathbb{Z}$ -mátrixot is, de az most nem áll fenn, így test.

met $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

1D) Még csak nem is győzi, hiszen nem zárt az összeadásra

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

sem! Példa: $1+1=2$, de $|2| \neq 1$ így az már triviálisan nem egységeket...

Más példa: $i+i=2i \dots$

3/A

$$|(1+i)z^3 + iz| < \frac{3}{4}$$



$$|z^3 + iz^3 + iz| < \frac{3}{4}$$

Ha $|z| < \frac{1}{2}$, also $|z^3| < \frac{1}{8}$

$$z = a+bi = \sqrt{a^2+b^2} \operatorname{cis} \varphi.$$

$$\sqrt{a^2+b^2} < \frac{1}{2}.$$

$$z = a+bi \Rightarrow |z| = \sqrt{a^2+b^2},$$

$$zi = a-bi \Rightarrow |zi| = \sqrt{(a-b)^2} =$$

$$iz^3 =$$

...

$$= \sqrt{a^2 - 2ab + b^2}$$

↑
es a tag coefficient

lgg