

2018.12.07.

7. FeladatAlgebraLegyen $f \in T[x]$ polinom és $K \supseteq T$ test. legyen $\alpha \in K$.Ha $f(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha$ zeróhely vagy gyök.

$$x - \alpha \mid f.$$

 $f = (x - \alpha)g + h$ lehet fel, ahol h konstans polinom. $h = f(\alpha)$ lesz. Ez tényleg világos.

Ez a Bézout-tétel. Amellett.

 α r -szeres gyök $\Leftrightarrow (x - \alpha)^2 \mid f$ de $(x - \alpha)^{r+1} \nmid f$.

Ez nagyon szép dolog. De még fel kell fontos.

Legyen f' . Nézzük át. A deriváltat.

$$f = (x - \alpha)^2 g \text{ ahol } g(\alpha) \neq 0.$$

$$f' = 2(x - \alpha)^{2-1} g + (x - \alpha)^2 g' \text{ lesz. Ugye.}$$

$$f' = (x - \alpha)^{2-1} (2g + (x - \alpha)g').$$

de az
más ren.
és osztható

$(x - \alpha) \mid$

A deriváltnak az $\neq \alpha$ $(r-1)$ -szeres gyöke.

①

$$\Rightarrow (x - \alpha)^{r-1} \mid \text{LKO}(f, f').$$

$\Rightarrow$ Ha f és f' relatív prímek, akkor minden többszörös gyökük ugyanaz.

β többszörös gyök $\Leftrightarrow$ gyökre $\text{lmc}(f, f')$.

Kell: $\frac{f}{\text{lmc}(f, f')}$ levalósítja a többszörös gyököket.

Ez nagyon fontos a gyakorlatban.

$$f = a (x - \alpha_1)^{k_1} (x - \alpha_2)^{k_2} \dots (x - \alpha_n)^{k_n}$$

a gyöktengelyes alak, ugye.

VÉGTELEN TESTEK FELETT VAGYUNK. ■

CSOPORTOK: invertálható, egységelemes.

- részcsop.: részhalmaza, amely maga is csop.
- homomorfizmus:
- generálás:

Legyen G és H csop.

$a, b \in G$ és $\varphi: G \rightarrow H$, homomorfizmus,

$$\text{ha } (ab)\varphi = (a\varphi)(b\varphi) \quad \forall a, b \in G.$$

$$\Rightarrow 1_G \varphi = 1_H$$



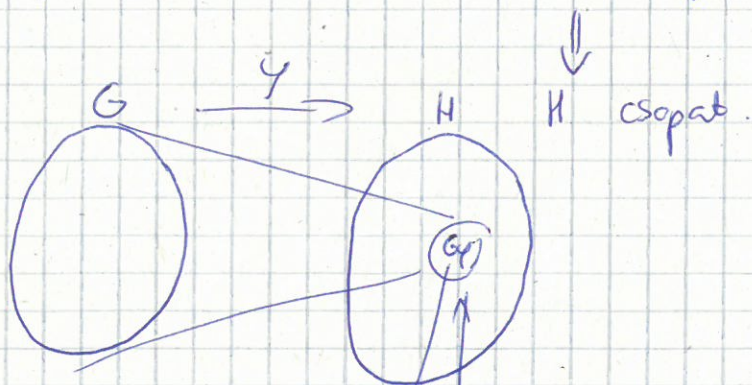
hiszen lehet más is egységelemes.

$$a\varphi = (a1_G)\varphi = (a\varphi)(1_G\varphi)$$

$$1_H = 1_G\varphi. \quad \textcircled{2}$$

Amennyiben H csak grupoid,

$\varphi: G \rightarrow H$ Hom. ami surjektív.



ez itt egy részcsop.

$$h_1, h_2 \in G_\varphi, \quad h_i = g_i \varphi, \quad g_i \in G.$$

$$h_1 h_2 = (g_1 \varphi)(g_2 \varphi) = (g_1 g_2) \varphi$$

$\in G_\varphi$

Csoport rendje

↑
a halmaz
számossága.

Lehet, hogy egy csoport ∞
rendű, de $\forall$ eleme véges
rendű.

Elem rendje

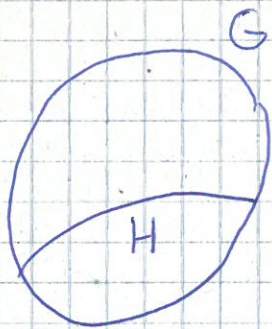
Ha $a \in G$, a rendje n ha

$a^n = 1$ és n a legkisebb ilyen
 $n \in \mathbb{N}$. Ha $n \nexists$, akkor ∞
rendű.

Csoport rendje: $\sigma(G) = |G|$.

G véges csoport, $H \leq G$ legyen Lagrange-tétel: $\sigma(H) \mid \sigma(G)$.

Egy csoportnak nem lehet végtelen sok eleme, nem csoportja. $\in$ jelölget ad.



$g \in G$ tetszőleges.

$$gH = \{ gh : h \in H \} \text{ legye.}$$

H -szerűen belőlük mellékosítanak.

$$|H| = |gH| \text{ megmutatható.}$$

Van korlátos bijekció:

$$h \rightarrow gh \text{ bijekció lesz.}$$

Ez (ha jól meggondoljuk) azt is jelenti, hogy G egy osztályozásra van felbontva.

$$\bigcup (gH_i, g \in G) = G \text{ lesz. Ez igaz.}$$

Ez világos. És még diszjunkt is (ez egybeesik).

Bizs: $a \in (gH \cap g'H) \text{ legyen.}$

$$a = gh_1 = g'h_2$$

$$g \in g' \underbrace{h_2 h_1^{-1}}_{\in H} \Rightarrow g \in g'H$$

$$gH \subseteq g'H$$

$$\forall h \in H - \text{ra } gh = (g'h')h = g'(h'h)$$

A másik irány $(g'H \supseteq gH)$ is megmutatható.

$$G = \underbrace{H \cup g_1 H \cup \dots \cup g_n H}_{\text{diszjunkt.}} \quad (4)$$

Tehát $|G| = 2 |H|$ lss. $\square$

Kongruencia

G



H egy részcsoport

$$(H \leq G)$$

$\uparrow$ részcsoportja jele

Lehet-e:

$$gH \cdot g'H = \{ ghg'h' : h, h' \in H \}$$

oda át lehetne bécserésztés

$$gH = Hg \text{ kell, hogy teljesüljön.}$$

$\uparrow H$ normalizált.

G/H mellékostályok halmaza. és H normalizált,

akkor megint csoportot kapunk.

FAKTOR CSOPORT.



eset nagyon ismétlődő.

bizonyos szinten ismétlődő

Permutációcsoport

A

$S(A)$

S_A

A - feletti permutációk.

$$\{ \varphi : A \rightarrow A \text{ bij} \}$$

$\uparrow$ teljes permutációcsoport

szimmetrikus csoport.



eset permutációkkal lehetetlen

— fagyatás / felgyűrt felvétel

⑤ $(123), (213), (312)$ képe

$(2\ 3), (12), (13)$ is, illetve S_3 volt.

A legkisebb rendű (6) nem alternatív csoport

G egy csoport. $A \leq G$ legyen.

Részcsoportok hálójának részcsoportja.

$$n(H: H \leq G, A \leq H) = [A].$$

$[A]$: A által generált részcsoport

$$\{a_1^{z_1} \cdots a_m^{z_m} : a_i \in A, z_j \in \mathbb{Z}\}$$

$a_1, \dots, a_m$ egy halmaz

$|A| > 1$ ilyenkor mi van

$\uparrow$ n -edik szorzata

$g \in G$ és

$$[g] = G \Rightarrow \underline{\underline{\text{ciklikus csoport}}}$$

$$G = [g] \{g^{-1}, g^0 = 1, g^2, g^3, \dots\} \text{ ige}$$

$\uparrow$ vagy mind különböző

vagy van ismétlődés

Mind különböző: $G \cong (\mathbb{Z}; +)$

$$(\mathbb{Z}; +) \rightarrow G$$

$$z \rightarrow g^z$$

0

bijektív homomorfizmus
 $\Downarrow$
izomorfizmus

$$\text{ist } (\mathbb{Z}; +) \cong G.$$

↑ isomorf.

$$\exists \text{ olyan } k, m \in \mathbb{Z} \quad k \neq m, \quad g^k = g^m.$$

$$\text{t.h. } k > m, \quad g^{k-m} = 1.$$

$$k-m \in \mathbb{N}.$$

$$\text{↙ } n \text{ legkeisebb.}$$

$$g^n = 1$$

$$1 = g^0, g^1, g^2, \dots, g^{n-1}$$

↘
Hilfsbasis

$$G \cong (\mathbb{Z}_n; +)$$

