

2018. 09. 14.

1. konzultáció

Algebra és számelmélet

A felmérés teszt után járunk. Rövid, zűrös ismétléssel.

Kínai maradéktétel:

$$a_1, a_2, \dots, a_m, b_1, b_2, \dots, b_k \in \mathbb{Z}, \quad m_1, \dots, m_k \in \mathbb{N}.$$

$$\text{legyen} \quad a_1 x \equiv b_1 \pmod{m_1}, \quad a_2 x \equiv b_2 \pmod{m_2}, \quad \dots, \quad a_k x \equiv b_k \pmod{m_k}$$

Kongruenciarendszer. Egy ilyen rendszernek mikor van megoldása?

$$\text{Kell: } \text{lko}(a_i, m_i) \mid b_i.$$

Utána:

$$x \equiv c_1 \pmod{m_1}$$

$\vdots$

$$x \equiv c_k \pmod{m_k}.$$

2 = 2-re:

$$x \equiv a_1 \pmod{m_1}$$

$$x = a_1 + m_1 t, \quad t \in \mathbb{Z}$$

$$x \equiv a_2 \pmod{m_2}$$

$$a_1 + m_1 t \equiv a_2 \pmod{m_2}$$

$$m_1 t \equiv a_2 - a_1 \pmod{m_2}$$

Legyen az összes modulus páronként relatív prím.

Ekkor biztosan megoldható.

itt mi a feltétel:

Leképezés: $\varphi: A \rightarrow B$

$$\varphi \subseteq A \times B.$$

$$D_\varphi = \{ a \in A : \exists b \in B, (a, b) \in \varphi \}$$

$$R_\varphi = \{ b \in B : \exists a \in A, (a, b) \in \varphi \}$$

$$1 \leq i, j \leq k$$

$$\text{lko}(m_i, m_j) \mid a_i - a_j$$

Ez.

$$D_\varphi = A, \quad (a_1, b_1), (a_1, b_2)$$

$$\Downarrow \quad b_1 = b_2. \quad \square$$

①

Leleperés:

$$A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C$$

$\varphi\psi$ injektív.



$\mathbb{B} \cap \mathbb{R}_\varphi$ esen injektív φ .



Innen jön az anyag.

$\mathbb{N}$ - természetes számok

$$\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$$

$\mathbb{Z}$ - egész számok

$$(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

$$(c, d) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

$$(a, b) + (c, d) = (a+c, b+d)$$

$(a, b) \cdot (c, d)$ már bonyolultabb.

Reláció:

$$(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow a+d = b+c$$

equivaleciareláció lesi.

equivalecia szerinti faktorhalmaz: egész számok



- racionális számok.

$$(a, b), (c, d) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}).$$

$$(a, b) + (c, d) = (ad+bc, bd)$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac, bd)$$

Itt is egy reláció: $(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow ad = bc$

(mikor egyenlő két tört?)

Határértéket ezzel néz, nem tudunk számokról: ($\sqrt{2}$ például)

$\mathbb{R}$ - valós számok KELL.

$$x^2 + 1 = 0 \text{ megoldása jött elő.}$$

Végül most: $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$:-

$$\left. \begin{aligned} (a, b) + (c, d) &= (a+c, b+d) \\ (a, b) \cdot (c, d) &= (ad-bc, \overbrace{ad+bc}^{ad+bc}) \end{aligned} \right\}$$

$\mathbb{C}$ így test lesz. $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}; +, \cdot)$ így definiálva.

$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ injektív és műveletőrző leképezés.

$$a \rightarrow (a, 0) \text{ lesz.}$$

Zárt az összeadásra és a szorzásra is.

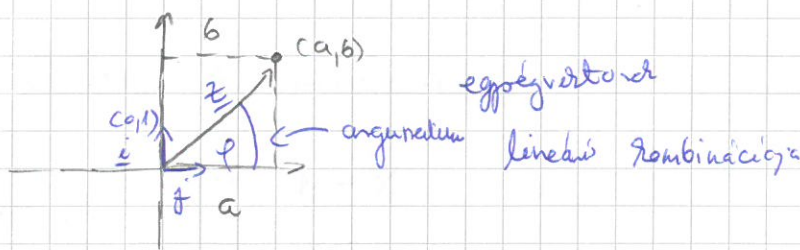
$$-1 \rightarrow (-1, 0) \text{ felel meg.}$$

$$(0, 1)(0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0).$$

$$(0, -1)^2 = (-1, 0) \text{ is teljesül.}$$

Valós számok: a számegyeneseen.

Itt pedig a síkhoz a pontjai jönnek.



$$z = a\mathbf{j} + b\mathbf{i}$$

$$z = i\mathbf{j} \text{ is felírható.}$$

$$(a, b) = \underset{\substack{\uparrow \\ a}}{(a, 0)} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ 1}}{(1, 0)} + \underset{\substack{\uparrow \\ b}}{(0, b)} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ i}}{(0, 1)}$$

↑
kifejezhető fel.

kifejezhető: $a + b\mathbf{i}$ is.

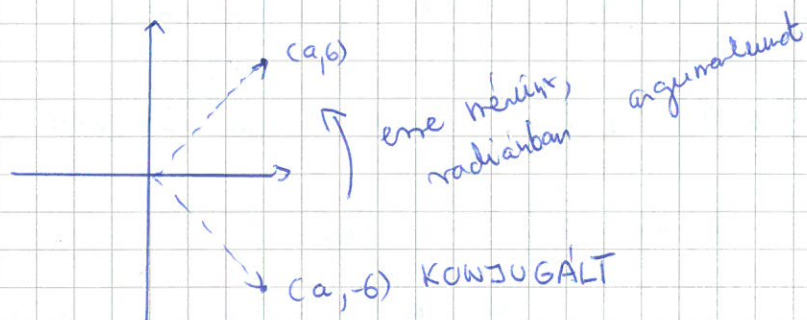
KANONIKUS ALAK.

↑ szimbólum.

Tudni kell még: $i^2 = -1$.

ROSSZ: ~~$i = \sqrt{-1}$~~

Váltsunk szemléletet.



$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{\quad}{c^2+d^2}$$

Komplex számok konjugált képe: BIJEKTIÓ.

$$(x+yi)^2 = \overset{\text{válasz}}{\underset{\text{képlet}}{a+bi}} = z$$

$$\star (x+yi)(x+yi) = x^2 + 2xyi - y^2 = a+bi$$

Kompozíciós egyenlet:

$$\left. \begin{array}{l} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{array} \right\} \text{ ha lehet számolni, van megoldás.}$$

Négyzetgyökös (gy) papíron elvégezhető.

$$z = a+bi = |z| \cdot \cos \varphi + i |z| \sin \varphi = \underbrace{|z|}_r \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\text{legyen } z = r \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

$$u = s \cdot (\cos \psi + i \sin \psi)$$

$$z \cdot u = r \cdot s \cdot (\cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi + i (\cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \cos \psi)) =$$

$$zu = rs (\cos(\varphi + \psi) + i \sin(\varphi + \psi))$$

el adódik.

$$\frac{z}{u} = \frac{r}{s} (\cos(\varphi - \psi) + i \sin(\varphi - \psi)) \quad \text{és}$$

Gyökvonás?

$$z = r (\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad \text{és} \quad n > 1.$$

$$\exists ? \ell = s (\cos \psi + i \sin \psi), \text{ melyre } \ell^n = z \text{ gyökvonás.}$$

$$\ell^n = s^n (\cos n\psi + i \sin n\psi) \quad \text{írtató fel.}$$

$$\parallel$$

$$z = r (\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad \text{Kell:}$$

$$s^n = r \Rightarrow s = \sqrt[n]{r} \quad \text{és rendben van.}$$

$$n\psi = \varphi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\psi_k = \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \quad \text{végtelen sokan vannak.}$$

Kérdés: $\psi_k - \psi_\ell = 2t\pi$?

$$\frac{\varphi + 2k\pi}{n} - \frac{\varphi + 2\ell\pi}{n} = 2t\pi, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

és k fix

φ is konstans

$$k - \ell = tn \quad \text{adódik.}$$

$$\boxed{k \equiv \ell \pmod{n}}$$

$$k = 0, 1, \dots, n-1 \quad \text{adódik.}$$

$$\sqrt{a^2} = |a| \quad \text{eml.}$$

Mik lesznek azok $n \in \mathbb{C}$ $u^n = 1$

$$u = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

$$\cos n\varphi + i \sin n\varphi = \cos 0 + i \sin 0$$

$2\pi k \qquad 2\pi k$

$$\varepsilon_2 = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n} \quad \text{mivel:} \quad \varepsilon_2^n = 1$$

$\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}$ ezek az n -edik egységgyökök.

Ha $u^n = z$, akkor $(u \cdot \varepsilon_2)^n = z$ EGYSEGKÖRÖN VANNA

Második egységgyök: ± 1

Harmadik egységgyök: $1, -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$

Negyedik egységgyök: $\pm 1, \pm i$

$$6: \pm 1, \pm \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Valahányadik hatványa 1 z -nek, akkor az egységgyök.

ε_2 és ε_2 adott.

$$\varepsilon_2^m = \varepsilon_2^l$$

↑

$$\frac{2\pi i}{n} \cdot m - \frac{2\pi i}{n} \cdot l = 2\pi i k$$

$$2\pi m - 2\pi l = 2\pi n k$$

$$2m \equiv 2l \pmod{n}.$$

⑥

Ha $\text{lnko}(z, n) = 1$:

$$m \equiv l \pmod{n}$$

Ha vessük az ilyen z -t, akkor n db különböző hatványa.

Ez az egyszerűített primitív egyenlet.

ALGORITMUS GYÖKVONÁS HOZ

a -ból akarunk gyököt venni.

Kell: a_1^2 , ami közel van a -hoz.

$$a_1 \quad \sqrt{a} \quad \frac{a}{a_1} = b_1$$

Legyen: $a_2 = \frac{a_1 + \frac{a}{a_1}}{2}$ számtani közép

$$b_2 = \frac{a}{a_2}$$

$\vdots$

Ezt kell folytatni

Kell: $\sqrt{2}$ és Legyen $a_1 = \frac{3}{2}$

Itt az a_1 már 10^{-6} pontossággal.

A magasabb fokú dolgozat nem volt szó.

