

Differenciálegyenletek, basics.

$$f'(x) = F(f, x) \text{ írási fel.}$$

$$x(t) \quad y(x)$$

(pl.)  $x' = 2x$

$$\uparrow x' = 2 \Rightarrow x = 2t + C$$

ez így is.

$x' - 2x = 0$  olyan függvény, amelynek a deriváltja  
egyenlő a függvény kétszeresével.

$$x(t) = \underbrace{e^{2t}}_1 + C \Rightarrow x'(t) = 2e^{2t}.$$

itt ez 0 konstán.

$$x' = 1 - x$$

$\uparrow$  egy minusi saját maga lesz, ha deriválom.

Sétválasztató típusú diff. egyenlet.

$$\frac{dx}{dt} = 1 - x \quad x' = f(x) \cdot \underbrace{g(t)}_1.$$

$$\frac{dx}{dt} = f(x) g(t)$$

$$dx = f(x) g(t) dt$$

$\rightarrow f(x) \neq 0!$

$$\frac{1}{f(x)} dx = g(t) dt$$

$$\int \frac{1}{1-x} dx = \int dt \quad * \quad 1-x \neq 0 \Rightarrow x \neq 1!$$

$$- \ln|1-x| + C = t + C$$

+ de:  $x=1$  megoldás-e! ✓

Megoldás, beírható!

Tehát:

$$- \ln|1-x| = -t + C$$

$$\ln|1-x| = -t + C$$

$C \in \mathbb{R}$  /  $\forall$  fenn.

$$|1-x| = e^{-t} = \underbrace{e^C}_{=C} \cdot e^{-t}$$

$= C$ , de  $C \in \mathbb{R}^+$ ,  $C > 0$ !

$$1-x = \pm C e^{-t}, \quad C \neq 0$$

$$x = 1 - C e^{-t}, \quad C \neq 0.$$

ennyi az egész.

Ezt kapjuk

②

$$x' = -2x + 4$$

$$\frac{dx}{dt} = -2x + 4$$

$$dx = (-2x + 4) dt$$

$$4 - 2x \neq 0$$

$$2x \neq 4$$

$$\boxed{x \neq 2}$$

Ittén meg kell vizsgálni.

$$4 - 2x = C e^{-2t} \quad C \neq 0.$$

$$2x = 4 - C e^{-2t} \quad C \neq 0$$

$$\boxed{x = \frac{4 + C e^{-2t}}{2}}$$

$$-\frac{1}{2} \cdot \ln|4-2x| = t + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

$\Downarrow$

~~$\ln|x-2|$~~

$$\ln|4-2x| = -2t + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

$$\frac{\ln|4-2x|}{e} = \frac{-2t+C}{e}$$

$$|4-2x| = e^{-2t} \cdot \underbrace{e^C}_C$$

~~$C \in \mathbb{R}$~~   $C > 0$

$$4-2x = \pm C e^{-2t}$$

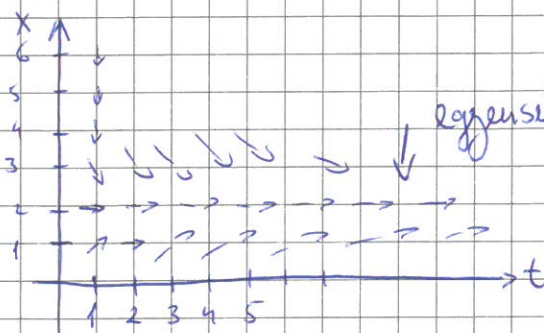
$C \neq 0$

②



Iránymező:

$$x' = -2x + 4$$



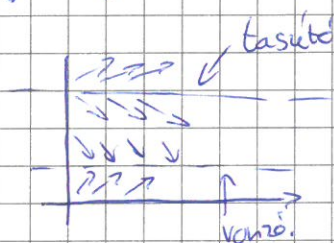
egyensúlyi helyzet!  $x(t) = 0$ .

egy néz ki az iránymezejé.

Ez itt egy vonzó egyensúlyi helyzet.

|         |         |                |
|---------|---------|----------------|
| $t = 1$ | $x = 1$ | $x' = 2$       |
| $t = 2$ | $x = 2$ | $x' = \dots 0$ |

Lehet két egyensúlyi helyzet is.



$$x' = f(x)$$

↑ autonóm  
differenciál.  
t-től független.

$$x' = x(1-x)$$

$$\frac{dx}{dt} = x(1-x)$$

$$\int \frac{1}{x(1-x)} dx = \int dt$$

$$* x(1-x) \neq 0$$

$$\boxed{x \neq 0, x \neq 1} \text{ vizsgálni kell.}$$

$$\frac{1}{x(1-x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{1-x} = \frac{-Ax + A + Bx}{x(1-x)}$$

$$A = 1$$

$$B - A = 0$$

$$B = 1$$

$$\int \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} \right) dx = \ln|x| + \frac{\ln|1-x|}{-1} + C$$

alódi.

$$\ln|x| - \ln|1-x| = t + C \quad \text{lesz.}$$

$$C \in \mathbb{R}.$$

$$\ln \left| \frac{x}{1-x} \right| = t + C$$

$$\left| \frac{x}{1-x} \right| = e^t \cdot e^C = C e^t, \quad C > 0.$$

$$\frac{x}{1-x} = C e^t \quad C \neq 0.$$

$$\frac{1-x}{x} = C e^{-t}$$

$$\frac{1}{x} - 1 = C e^{-t}$$

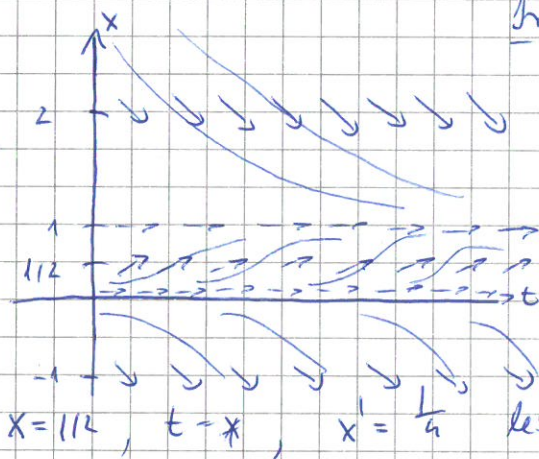
$$\frac{1}{x} = 1 + C e^{-t}$$

$$x = \frac{1}{1 + C e^{-t}}, \quad C \neq 0.$$

és nyilván megoldás a 0 és az 1 is.

Ellenőrizhető.

Iránymező.



ez az úgyszerített vektor-  
~~ábrák~~ iránymezője  
a csúcsnak

$$x = 1/2, \quad t = x, \quad x' = \frac{1}{t} \quad \text{lesz.}$$

Logisztikus típus.

$$x' = x - x^2$$

$$x'' = 1 - 2x$$

Ha ez negatív  $\Rightarrow$  vonzó egyensúlyi helyzet

Ha ez pozitív  $\Rightarrow$  tasúró egyensúlyi helyzet



$\circ \circ \circ \circ \circ \circ \textcircled{2}$   
 $\circ \circ \circ \circ \textcircled{1}$   $\leftarrow$   
 energia és lendület.  
 Az megmarad.  
 egységnyi  
 tömegű golyók  
 $\frac{1}{2}mv^2$   
 vannak.

$m_0, v_0$  kezdeti értékek.

$$\frac{1 \cdot v^2}{2} = \frac{2 \cdot v_1^2}{2} + \frac{1 \cdot v_2^2}{2} \quad \text{energia;}$$

$$1 \cdot v = 2 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 \quad \text{impulzus.}$$

legyen  $v$  az árammi.  $v_2 = v - 2v_1.$

$$v^2 = 2v_1^2 + v_2^2$$

$$v^2 = 2v_1^2 + v^2 - 4vv_1 + 4v_1^2$$

$$0 = 2v_1^2 - 4vv_1 + 4v_1^2$$

$$0 = v_1^2 - 2vv_1 + 2v_1^2$$

$v_1 \neq 0!$  nem lenne realisztikus.

$$0 = v_1 - 2v + 2v_1$$

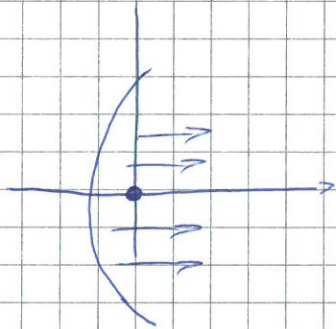
$$0 = 3v_1 - 2v \Rightarrow \boxed{v_1 = \frac{2}{3}v}$$

$$v_2 = v - \frac{4}{3}v = \boxed{-\frac{1}{3}v}$$

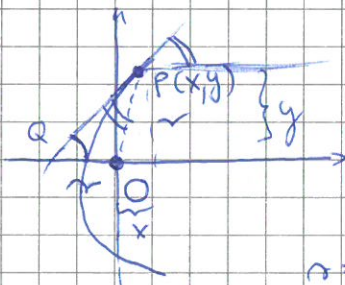
$\textcircled{1} \textcircled{1} \textcircled{1} \textcircled{1} \textcircled{1} \textcircled{1} \textcircled{1} \textcircled{1} \textcircled{1} \textcircled{1}$

$\textcircled{1} \rightarrow ?$  mi történik  
 $\textcircled{1} \rightarrow$  ez egy kis zűrzavar volt

$\textcircled{5}$



miért parabola ez?



$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \tan \alpha$$

$$c \tan \alpha = \frac{\sqrt{x'^2 + y'^2} + x}{y}$$

$$\tan \alpha = \frac{y}{\sqrt{x'^2 + y'^2} + x}$$

$$y' = \frac{y}{\sqrt{x'^2 + y'^2} + x} = \frac{\sqrt{x'^2 + y'^2} - x}{y}$$

$$\frac{1}{2} z'$$

$$\frac{x + y y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} = 1$$

$$z = x'^2 + y'^2 \quad z' = 2x' + 2y'y'$$

$$\frac{\frac{1}{2} z'}{\sqrt{z}} = 1$$

$$\frac{z'}{\sqrt{z}} = 2$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{z}} dz = \int 2 dx$$

megoldható.  $y^2 = z - x^2$ ,  $y^2 = 2C(x + \frac{C}{2})$



példa

temperatura  $\rightarrow$  henger

20 perc alatt  $100^\circ\text{C}$ -ról  $60^\circ\text{C}$ -ra csökken.

levegő hőmérséklete  $25^\circ\text{C}$

Mennyi idő múlva lesz a henger  $30^\circ\text{C}$ -os.

"A változás függ saját magától."

$$T' = (L - T) \cdot k \quad \text{arányosság}$$

$$T' = k(T - L) \quad \text{Lehát fel.}$$

$$T' = k(T - 25)$$

$$\frac{dT}{ds} = k(T - 25)$$

$$\int \frac{1}{T-25} dT = \int k ds \quad T \neq 25$$

$$\ln|T-25| = k \cdot s + C$$

$$|T-25| = e^{ks} \cdot \underbrace{(e^C)}_{\in \mathbb{R}^+}$$

$$T-25 = C e^{ks} \quad C \neq 0$$

$$T = 25 + C e^{ks}$$

$$s=0 \quad T(0)=100$$

$$100 = 25 + C \Rightarrow \boxed{C=75}$$

$$T(s) = 25 + 75 e^{ks}$$

$$s=20 \quad T=60$$

$$60 = 25 + e^{20k} \cdot 75$$

(7)

$$\frac{35}{75} = e^{20z} \rightarrow z = \frac{\log \frac{35}{75}}{20} \quad \text{eg szel}$$

$$\parallel$$

$$\frac{-0,0165}{-}$$

$$T(z) = 25 + 75 e^{-0,0165z}$$

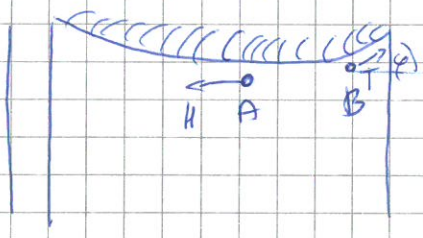
(el kell számolva.)

$$30 = 25 + 75 e^{-0,0165z}$$

$$5 = 75 e^{-0,0165z}$$

$$S = \frac{\ln \frac{5}{75}}{-0,0165} = \underline{71,28} \quad \text{perc.}$$

(2) Határozzuk meg, hogy milyen alakú a Lanchet görbéje.



parabola lesz.  
de miért?

Függőleges erő:  $T \sin \varphi = 2x$

Vízszintes erő:  $T \cos \varphi - H = 0$

$$\frac{dy}{dx} = \tan \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \frac{2x}{H}$$

$$y' = \frac{2}{H} x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{H} x \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{x} dy = \frac{2}{H} x dx$$

$$y = \frac{2}{H} \cdot \frac{x^2}{2} + C$$