

MATEMATIKAI MODELLEK, I. KISPROJEKT
GIBBS-JELENSÉG VISELKEDÉSÉNEK VIZSGÁLATA
EGYSZERŰ NÉGYSZÖGJEL ESETÉN

Unger Tamás István

B.Sc. szakos matematikus hallgató

ungert@maxwell.sze.hu, <http://maxwell.sze.hu/~ungert>

KIVONAT. A Matematikai modellek c. kurzus első projektfeladatának keretei között bemutatom, hogy minden periodikus, a periódusának zárt intervallumán Riemann-integrálható függvény Fourier-sorba fejthető, azaz felírható elemi szinuszos és koszinuszos függvények összegeként. Ismeretem egy általános négyszögjel felírását és Fourier-sorának meghatározását. Bemutatom a közelítés során a jel szakadási helyein fellépő úgynevezett túllövési jelenséget, a Gibbs-effektust. Ismertetem a σ -approximációt, amely egy közismert módszer a Gibbs-jelenség hatásainak csökkentésére, kiküszöbölésére. Röviden vázolom azt is, hogy mindezt hogyan tervezem megvalósítani a Wolfram Mathematica szoftver keretei között.

1. Bevezetés

A Fourier-sorok jel- és rendszeranalízisben betöltött szerepe kiemelt jelentőségű. Mérnöki tanulmányaink során elsajátítottuk a lineáris, időinvariáns rendszerek leírását tisztán szinuszos (koszinuszos) gerjesztések esetén. Megtanultuk, hogy a komplex számok algebrájával az ilyen rendszerek viszonylag könnyen kezelhetők, a válaszjel a komplex számokon végzett elemi matematikai műveletek segítségével meghatározható, a két mennyiség hányadosa pedig már megadja a rendszer jellemzésére alkalmas átviteli függvényt [1] is.

A Fourier-sorok segítségével az ilyen típusú lineáris rendszerek esetén ez a vizsgálódás kiterjeszthető összetettebb gerjesztések esetére is, amennyiben a gerjesztés periodikus és Riemann-integrálható időfüggvény formájában adódik. Ebben az esetben a gerjesztést annak Fourier-sorával közelítjük, így visszavezetjük a problémát elemi szinuszos és koszinuszos jelekre, majd azokra külön-külön elvégezve a számításokat a válaszjel az egyes komponensek szuperpozíciójaként előállítható.

Ebben a projekt munkában bemutatom, hogy milyen módon fejthető Fourier-sorba egy egyszerű négyszögjel. Bemutatom a közelítés hibájaként adódó Gibbs-jelenséget a függvény szakadási helyeinél és ismertetek egy módszert – a σ -approximációt – a jelenség hatásának csökkentésére is. A dokumentum utolsó részében pedig vázlatos leírást adok arról, hogy miként tervezem az itt bemutatott elméletet demonstrálni a Wolfram Mathematica szoftver segítségével.

2. A Fourier-sor

Vizsgáljunk egy általános $s(t)$ függvényt, amely T periódusidővel periodikus és a periódusának zárt intervallumán Riemann-integrálható is. Közelítsük ezt a függvényt

$$s(t) \approx s_n(t) = S_0 + \sum_{k=1}^n \left[S_k^A \cos \frac{k2\pi}{T}t + S_k^B \sin \frac{k2\pi}{T}t \right] \quad (1)$$

függvénysor segítségével. Ha bizonyos t értékekre $n \rightarrow \infty$ esetén az $s_n(t)$ függvény egy meghatározott $s(t)$ határértékhez tart, akkor azt mondjuk, hogy az adott függvénynek ezekre a t értékekre konvergens függvénysor-közelítése van [3]. Az S_0 , S_k^A és S_k^B konstansok definíció szerint a következőképpen határozhatók meg [2]:

$$S_0 = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) dt, \quad (2)$$

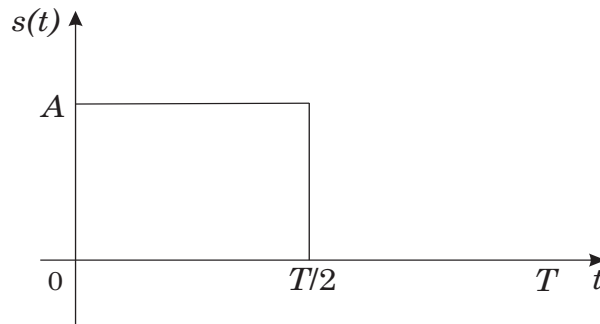
$$S_k^A = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \cdot \cos \frac{k2\pi}{T}t dt \quad \text{és} \quad (3)$$

$$S_k^B = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \cdot \sin \frac{k2\pi}{T}t dt. \quad (4)$$

Ezt a függvénysort nevezzük az $s(t)$ függvény Fourier-sorának.

3. Egyszerű négyszögjel vizsgálata

Tekintsük az 1. ábrán látható A magasságú, T periódusidejű egyszerű négyszögjelet. A függvénynek jól láthatóan $t = 0$ -ban és $t = \frac{T}{2}$ -ben elsőfajú szakadása van. A függvény egyetlen periódusa felírható a Heaviside-féle $\varepsilon(t)$ egységugrás-



1. ábra. Az egyszerű négyszögjel egyetlen periódusa

függvények lineáris kombinációjaként az

$$s(t) = A \left[\varepsilon(t) - \varepsilon\left(t - \frac{T}{2}\right) \right], \quad t \in (0, T] \quad (5)$$

alakban. A munkám során egy ilyen típusú négyszögjelet szeretnék majd vizsgálni, ezért valamilyen módon elő kellene állítani a Fourier-sorát. Ehhez meg kell határozni az S_0 , S_k^A és S_k^B konstansokat. Az egyszerűség kedvéért A értékét 1-nek választom. Vágjunk bele!

3.1. S_0 meghatározása

$$\begin{aligned} S_0 &= \frac{1}{T} \int_0^T s(t) dt = \frac{1}{T} \left(\lim_{\Delta \rightarrow 0^+} \int_{0+\Delta}^{\frac{T}{2}-\Delta} 1 dt + \lim_{\Delta \rightarrow 0^+} \int_{\frac{T}{2}+\Delta}^T 0 dt \right) = \\ &= \frac{1}{T} \left(\lim_{\Delta \rightarrow 0^+} \int_{0+\Delta}^{\frac{T}{2}-\Delta} 1 dt \right) = \frac{1}{T} \left(\lim_{\Delta \rightarrow 0^+} [t]_{0+\Delta}^{\frac{T}{2}-\Delta} \right) = \frac{1}{T} \left(\frac{T}{2} - 0 \right) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

3.2. S_k^A meghatározása

$$\begin{aligned} S_k^A &= \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \cdot \cos \frac{k2\pi}{T} t dt = \\ &= \frac{2}{T} \left(\lim_{\Delta \rightarrow 0^+} \int_{0+\Delta}^{\frac{T}{2}-\Delta} \cos k \frac{2\pi}{T} t dt + \lim_{\Delta \rightarrow 0^+} \int_{\frac{T}{2}+\Delta}^T 0 \cdot \cos k \frac{2\pi}{T} t dt \right) = \\ &= \frac{2}{T} \lim_{\Delta \rightarrow 0^+} \int_{0+\Delta}^{\frac{T}{2}-\Delta} \cos k \frac{2\pi}{T} t dt = \frac{2}{T} \left[\frac{\sin k \frac{2\pi}{T} t}{k \frac{2\pi}{T}} \right]_{0+\Delta}^{\frac{T}{2}-\Delta} = \\ &= \frac{2}{T} \left(\frac{T \left(\sin k \frac{2\pi}{T} \frac{T}{2} - \sin 0 \right)}{k2\pi} \right) = \frac{\sin k\pi - \sin 0}{k\pi} = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}^+, \text{ hiszen} \\ &\sin k\pi = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}^+. \end{aligned}$$

3.3. S_k^B meghatározása

$$\begin{aligned} S_k^B &= \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \cdot \sin \frac{k2\pi}{T} t dt = \\ &= \frac{2}{T} \left(\lim_{\Delta \rightarrow 0^+} \int_{0+\Delta}^{\frac{T}{2}-\Delta} \sin k \frac{2\pi}{T} t dt + \lim_{\Delta \rightarrow 0^+} \int_{\frac{T}{2}+\Delta}^T 0 \cdot \sin k \frac{2\pi}{T} t dt \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{T} \lim_{\Delta \rightarrow 0^+} \int_{0+\Delta}^{\frac{T}{2}-\Delta} \sin k \frac{2\pi}{T} t \, dt = \frac{2}{T} \left[\frac{-\cos k \frac{2\pi}{T} t}{k \frac{2\pi}{T}} \right]_{0+\Delta}^{\frac{T}{2}-\Delta} = \\
&= \left(\frac{-\cos k \frac{2\pi}{T} \frac{T}{2} + \cos 0}{k\pi} \right) = \frac{1 - \cos k\pi}{k\pi}.
\end{aligned}$$

Ismert, hogy

$$\cos k\pi = \begin{cases} 1, & \text{ha } k \text{ páros,} \\ -1, & \text{ha } k \text{ páratlan,} \end{cases}$$

melyből

$$S_k^B = \begin{cases} 0, & \text{ha } k \text{ páros,} \\ \frac{2}{k\pi}, & \text{ha } k \text{ páratlan.} \end{cases}$$

3.4. Mit kaptunk?

Az talán válasz a kérdésre, ha összedobjuk az eredményeket és felírjuk a jel Fourier-sorát is, legalább kétféleképpen. Az van tehát, hogy

$$S_0 = \frac{1}{2}, \quad (6)$$

$$S_k^A = 0, \quad (7)$$

$$S_k^B = \begin{cases} 0, & \text{ha } k \text{ páros,} \\ \frac{2}{k\pi}, & \text{ha } k \text{ páratlan.} \end{cases} \quad (8)$$

Ebből a Fourier-sor egyik alakja az

$$s_n(t) = \frac{1}{2} + 2 \left(\frac{\sin \frac{2\pi}{T} t}{\pi} + \frac{\sin 3 \frac{2\pi}{T} t}{3\pi} + \frac{\sin 5 \frac{2\pi}{T} t}{5\pi} + \dots + \frac{\sin(2l+1) \frac{2\pi}{T} t}{(2l+1)\pi} \right) \quad (9)$$

alakban adódik, de felírható az

$$s_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_k \frac{2}{k\pi} \sin k \frac{2\pi}{T} t, \quad k = 1, 3, 5, 7, \dots, (2l+1). \quad (10)$$

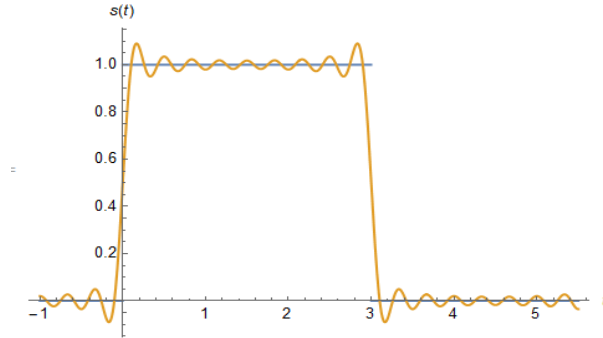
összefüggés is, ahol $l \in \mathbb{N}$. Megjegyzés, hogy a $\frac{2\pi}{T}$ kifejezést körfrekvenciának hívjuk és rendszerint ω jelöléssel látjuk el. Látjuk tehát, hogy a tárgyalt négyszögjelet kizárólag szinuszos komponensek alkotják, és azokból is csak a páratlanok szerepelnek a végtelen sorban. A $k = 1$ -hez tartozó komponenst a jel alapharmonikusának, a $k = 2, 3, \dots, (2l+1)$ komponenseket pedig a jel felharmonikusainak szokás nevezni a gyakorlatban.

4. A Gibbs-jelenség

Kezdjük el közelíteni az eredeti négyszögjelünket véges számú komponens segítségével és nézzük meg, hogy mi történik. Azt fogjuk látni, hogy a közelítés

egyre pontosabb és pontosabb eredményt ad, de az eredeti függvény szakadási helyein úgynevezett "túllövési" hibát fogunk tapasztalni.

Hiába közelítjük egyre több és több komponenssel az eredeti jelet, a közelítés a szakadási helyeken mindig túlnő az eredeti függvényen. Ezt a jelenséget nevezzük Gibbs-effektusnak, erre mutat példát a 2. ábra is, melyen az eredeti négyszögjel kilenckomponensű közelítése látható. A cél ennek a hibának a kikü-



2. ábra. Gibbs-jelenség $t = 0$ és $t = 3$ környezetében

szöbölése, melyre léteznek hatékony technikák. Az egyik ilyen a σ -approximáció, amelyet a projekt keretei között bemutatok.

5. A σ -approximáció

A σ -approximáció pontosan az ilyen, szakadási pontoknál fellépő Gibbs-jelenség kiküszöbölésére alkalmazható hatékonyan [4]. A technika Lánczos Kornél, egy kiváló huszadik századi zsidó származású magyar matematikus nevéhez fűződik. Lényege egy úgynevezett σ -faktor, másik nevén Lánczos-faktor alkalmazása, amely a

$$\sigma_n = \frac{\sin \frac{k\pi}{n}}{\frac{k\pi}{n}} \quad (11)$$

alakban írható fel [5]. A módosított Fourier-sor képlete az

$$s(t) \approx s_n(t) = S_0 + \sum_{k=1}^n \sigma_n \left[S_k^A \cos \frac{k2\pi}{T} t + S_k^B \sin \frac{k2\pi}{T} t \right] \quad (12)$$

alakban adódik [5], melynek alkalmazásával a Gibbs-effektus hatása jelentősen csökkenthető.

6. És akkor mindezt hogyan?

Az elmélet szép és fontos, de mindezt valahogy meg is kellene valósítani a Wolfram Mathematica keretei között. Első közelítésben meg fogom mutatni, hogy mi az a Heaviside-féle egységugrás és egy manipulálható Plot segítségével bemutatom, hogyan pakolható össze egy ilyen egyszerű négyszögjel két egységugrás lineáris kombinációjaként. Ezek után bemutatom az itt levezetett összefüggéseket a konkrét négyszögjel Fourier-sorára, majd előállítom azt a függvényt

általános képletének és a Wolfram Mathematica program `Sum` parancsának segítségével. Az eredményt ábrázolom külön, valamint az eredeti jellel együtt is. A programban a felhasználó számára észszerű keretek között a `Manipulate` segítségével lehetővé teszem, hogy maga válassza meg, hány komponenssel szeretné látni a közelítést.

Ezek után ugyanezt meg fogom tenni a Lánczos-faktorral korrigált összefüggéssel is. Az eredményt feltüntetem külön koordináta-rendszerben, de láthatóvá fogom tenni őket együtt is, hogy szemléletes legyen, hogyan korrigálja a Lánczos-faktor a szakadási helyeknél fellépő túllövést.

Hivatkozások

- [1] Kuczmann M. *Jelek és rendszerek*. Universitas-Győr, Győr, 2005.
- [2] Fodor Gy. *Hálózatok és rendszerek analízise I-II*. Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2000.
- [3] Bronstein I. N., Szemengyaljev K.A. *Matematikai kézikönyv*. TypoTeXkiadó, Budapest, 2009.
- [4] https://en.wikipedia.org/wiki/Sigma_approximation (utolsó látogatás: 2018. február 15.)
- [5] <https://www.muszeroldal.hu/assistance/gibbs.html> (utolsó látogatás: 2018. február 15.)