

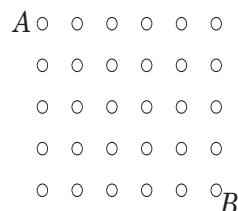
Név: Unger Tamás István

Neptun: FTD1YJ

Web: <http://maxwell.sze.hu/~ungert>

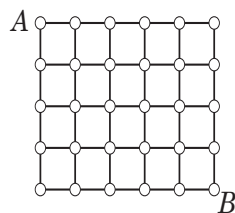
KOMBINATORIKA, NEGYEDIK HÁZI FELADAT

1. AZ ÁBRÁN LÁTHATÓ KARIKÁK EGY TELKEN LÉVŐ GYÜMÖLCSFÁKAT JELÖLIK. AZ A -VAL JELÖLT FÁN EGY CINKE, A B -VEL JELÖLT FÁN EGY RIGÓ ÜL. IDŐEGYSÉGENKÉNT MINDKÉT MADÁR A TŐLE ÉSZAKI, DÉLI, KELETI VAGY NYUGATI IRÁNYBAN ÁLLÓ LEGKÖZELEBBI FÁK EGYIKÉRE REPÜL. LEHETSÉGES-E, HOGY VALAMIKOR MINDKETTEN UGYANAZON A FÁN ÜLNEK?

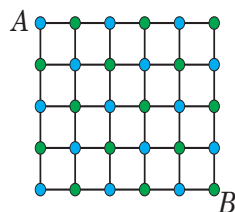


Megoldás:

Először is fordítsuk le a gráfelmélet nyelvére a kérdést. Világos, hogy a feladatban grafikusán csak egy gráf pontjai adottak, a közöttük futó élek nem. Ezeket a feladat szövege alapján húzhatjuk be a pontok között. Mivel a madarak a négy égtáj felé található szomszédos fákra repülhetnek – tehát pl. észak-keleti, dél-nyugati, stb. irányban nem –, mozgásukra a megadott ponthalmazon a következő gráf rajzolható fel:



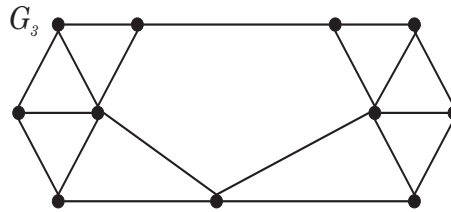
Mivel a gráfunk struktúrája egyszerű, könnyen meg tudunk adni egy jó pontszínezést. Mutassuk meg, hogy a gráf kromatikus száma $\chi(G) = 2$, mert kettő színnel jól színezzük, a szomszédos pontok különböző színűek.



Látjuk, hogy a gráf kromatikus száma $\chi(G) = 2$, ezért a vizsgált gráfunk páros. Azt is látjuk, hogy az A és a B pont, ahonnan a madaraink indulnak, külön osztályba tartoznak. Ebből, valamint a páros gráfokkal kapcsolatos ismereteinkből – élek csak az osztályok között futnak, de osztályon belül nem – következik, hogy az alsó osztályból induló madarunk a következő időlépésben a felső osztályba jut, majd onnan megint az alsóba és így tovább. Hasonlóképpen: a felső osztályból induló madár a második időlépésben az alsó osztályba jut, majd onnan vissza a felsőbe és így tovább.

A páros gráf tulajdonságai miatt nem fordulhat elő, hogy egy madár a k -adik és a $k + 1$ -edik időlépésben is ugyanabban az osztályban van. Ebből következik, hogy nem következhet be, hogy a két madár azonos osztályban tartózkodik, ez pedig kizárja azt is, hogy azonos csomóponton – fán – tartózkodjanak. A válaszunk tehát nemleges. ■

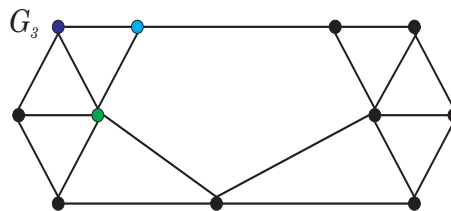
2. HATÁROZZUK MEG AZ ÁBRÁN LÁTHATÓ GRÁF KROMATIKUS SZÁMÁT:



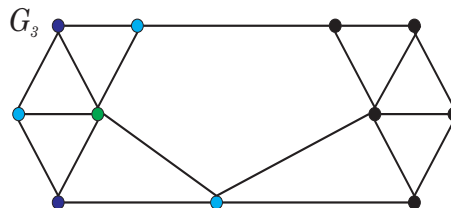
Megoldás:

Azt ránézésre is látjuk, hogy a gráf tartalmaz páratlan hosszú kört – hivatkozhatunk bármelyik hármas klikkre –, ezért biztos, hogy nem páros, tehát kettő szín biztosan kevés lesz a jó színezéshez, azaz $\chi(G_3) \geq 3$. Első közelítésben próbáljuk meg három színnel kiszínezni a gráfunkat és nézzük meg, hogy sikerrel járunk-e.

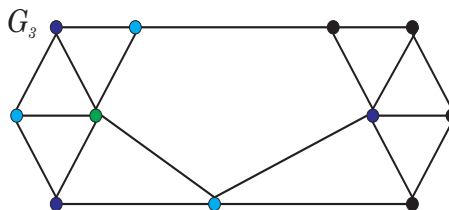
A színezést egy hármas klikkkel kezdjük, ehhez világos, hogy három különböző színre lesz szükségünk.



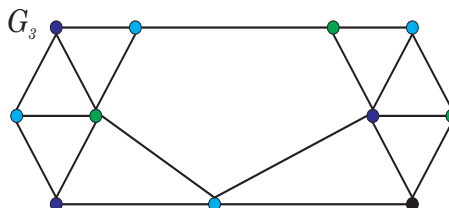
Amennyiben jó színezést szeretnénk, úgy a fenti klikkszínezés kényszeríti a következő pontok színezését is. Nincsen választásunk, hogy milyen színűek lesznek, csak egyféle megoldás van.



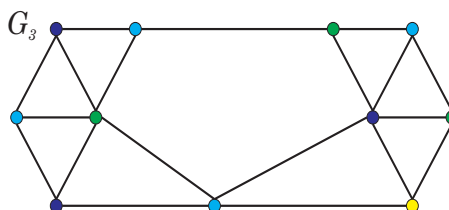
A következő lépésben ismét szabadon dönthetünk egy pont színéről: világoskék nem lehet, csak sötétkék vagy zöld. Színezzük sötétkékre, majd vizsgáljuk meg, hogy a döntésünk milyen következményekkel jár a színválasztási szabadságunk tekintetében.



Látjuk, hogy az előző döntésünk ismét kényszeríti bizonyos pontok színeit ahhoz, hogy az elvárásnak megfelelő, jó színezést kapjunk. Színezzük be a kényszerített pontokat:

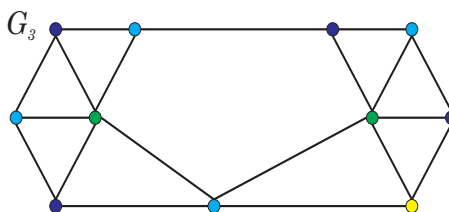


Látjuk, hogy az utolsó, még nem színezett pontunk három olyan ponttal szomszédos, melyek az eddigi színezésünk mindhárom színével ki vannak színezve. Amennyiben jó színezést szeretnénk, az utolsó pontunkat egy negyedik színnel (citromsárga) kell kiszíneznünk.



Úgy tűnik tehát, hogy a gráfunk nem színezhető három színnel, csak négygel. A biztonság kedvéért térjünk vissza arra a pontra, ahol volt választási lehetőségünk két szín között, és vizsgáljuk meg, mi történik, ha sötétkék helyett zöldre színezzük azt.

Látni fogjuk, hogy ez a döntésünk ismét kényszeríti az előző esetben is kényszerített pontok színét, így az utolsó csomópont színe nem kerülhet ki az addig használt palettából, tehát a jó színezéshez a palettát háromról négyre szükséges bővíteni:



A fentiekből következik, hogy a kromatikus szám 4, $\chi(G_3) = 4$. ■

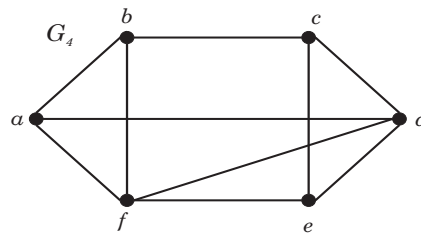
3. SÍKGRÁF-E AZ ÓRÁN MEGADOTT GRÁF?

Megoldás:

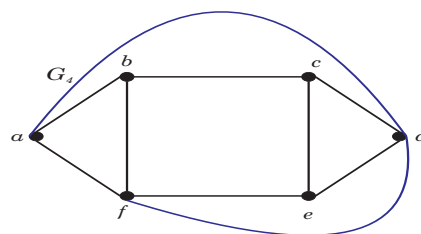
Tudjuk, hogy egy G gráfot síkgráfnak nevezünk, ha lerajzolható úgy a síkra, hogy az élgörbék nem metszik egymást. Világos, hogyha tudunk mutatni egy olyan lerajzolását a

gráfnak, amely teljesíti ezt a feltételt, akkor további vizsgálatok nélkül is kijelenthetjük, hogy a gráfunk síkgráf.

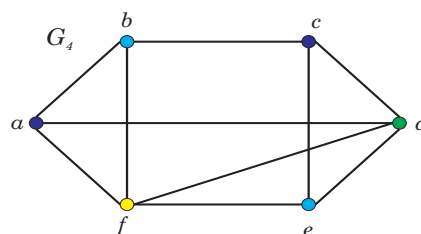
Az előadáson felrajzolt gráfot a következő ábra mutatja.



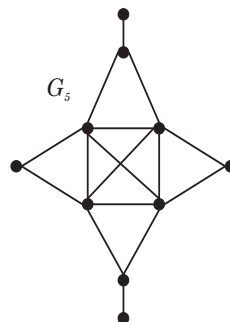
Világos, hogy a megadott lerajzolásban a problémát az a és a d pontok, valamint az f és a d pontok között futó élek megadott lerajzolása jelenti. Szerencsére meg tudunk adni olyan lerajzolást, amely eleget tesz a síkgráf definíciójában megadott feltételeknek. Egy ilyet mutat a következő ábra.



A megadott lerajzolás eleget tesz a feltételeknek, ezért G_4 síkgráf. Mellékszál: mivel síkgráf, a négyszín-tétel értelmében jól színezhető egy legfeljebb 4 széles palettával. Példát a következő ábra mutat.



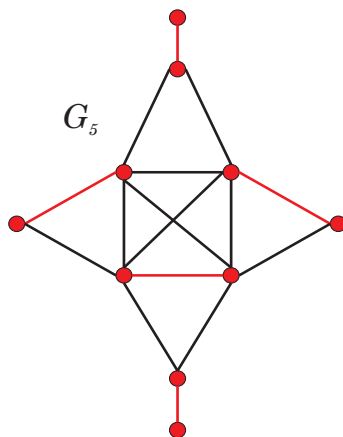
4. VAN-E TELJES PÁROSÍTÁS AZ ÓRÁN MEGADOTT GRÁFBAN?



Megoldás:

Megtanultuk, hogy az $M \subseteq E(G)$ élhalmaz egy párosítás a G gráfban, ha M -ben nincsen hurokél és semmelyik két M -beli élnek sincsen közös pontja. Ezt a párosítást teljes párosításnak nevezzük, ha $V(M) = V(G)$, tehát M az eredeti G gráf minden pontját párosítja.

A megadott G_5 gráfban van ilyen teljes párosítás. Igazoljuk a létezését úgy, hogy megadunk egy ilyen. Ezt mutatja a következő ábra, melyen pirossal szerepelnek azok az élek és pontok, amelyek a teljes párosítást alkotják. Világos, hogy ha a párosítás teljes, akkor nem maradhat feketén pont.



Látjuk, hogy a megadott M_5 teljes párosításban 5 él és 10 pont szerepel, az élek végpontjainak halmazai diszjunktak, a párosításban szereplő pontok száma pedig megegyezik az eredeti G_5 gráf pontjaival és a pontjainak számával. Készen vagyunk.