

Név: Unger Tamás István

Neptun: FTD1YJ

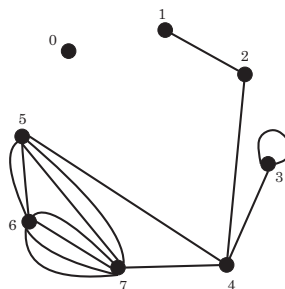
Web: <http://maxwell.sze.hu/~ungert>

KOMBINATORIKA, HARMADIK HÁZI FELADAT

1. RAJZOLJUNK LE EGY OLYAN (8 PONTÚ) GRÁFOT, AMELYNEK FOKSZÁMSOROZATA: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. VAN-E ILYEN EGYSZERŰ GRÁF?

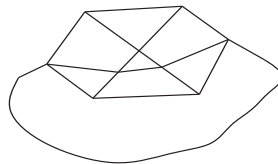
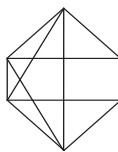
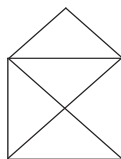
Megoldás:

Látjuk, hogy $\sum_{i=0}^7 i = 28$, és tudjuk, hogy tetszőleges G gráf esetén $\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2 \cdot |E(G)|$, azaz a fokszámösszeg az élek számának kétszeresével egyenlő, ezért célunk egy olyan általános gráf felrajzolása, melyben összesen 14 él fut, valamint eleget tesz a feladatban előírt fokszámsorozat-feltételnek. Az ábra egy lehetséges megoldást mutat.



A kérdés, amely szerint létezik-e olyan egyszerű gráf, amely eleget tesz ennek a feltételnek, a válaszuk nemleges. Itt elegendő hivatkozni a konzultáción tárgyalt és bizonyított tételre, amely szerint minden legalább 2-pontú egyszerű gráfban van két azonos fokszámú csúcs. Mivel a kért fokszámsorozat-feltétel nem tartalmaz két azonos fokszámot, nem rajzolható ilyen egyszerű gráf.

2. AZ ALÁBBI HÁROM ALAKZAT KÖZÜL MELYEK RAJZOLHATÓK LE A CERUZA FELEMELÉSE NÉLKÜL ÚGY, HOGY MINDEN VONALAT EGYSZER ÉS CSAK EGYSZER HÚZUNK MEG?



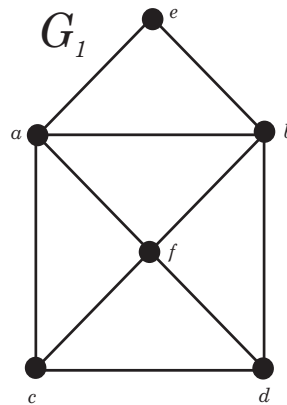
Megoldás:

Először is formalizáljuk a feladatot, majd a gráfelmélet nyelvén fogalmazzuk meg, hogy mi is a kérdés. Az alakzatok helyett vegyünk fel gráfokat úgy, hogy a gráfok élei megegyezzenek az alakzatban szereplő vonalakkal. Pongyolán fogalmazva olyan gráfokat kell felvennünk, melyekre rávetítve az eredeti alakzatunkat az teljesen fedni fogja a felvett gráfot.

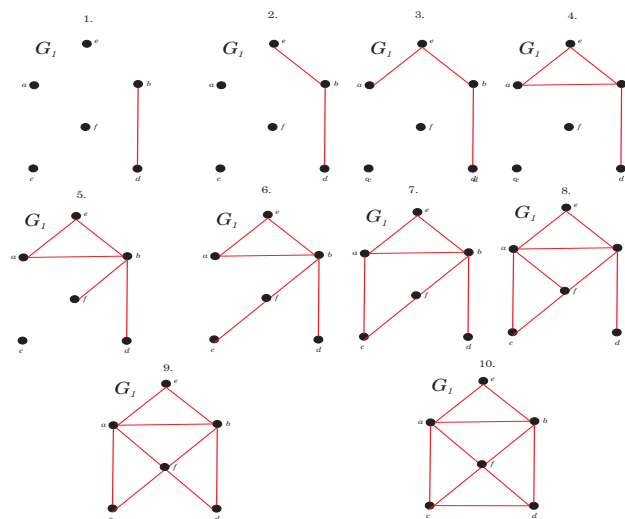
Megtanultuk, hogy egy G gráfban ν vonal egy Euler-vonal, ha ν minden élen (pontosan) egyszer halad át, továbbá minden csúcsot meglátogat. Tudjuk, hogy ez az Euler-vonal egy ceruzafelemelés nélküli lerajzolását jelenti ennek a G gráfnak.

A feladat tehát az, hogy ezeket a gráfokat vizsgáljuk meg abból a szempontból, hogy van-e bennük (nyílt vagy zárt) Euler-vonal. Ha van bennük Euler-vonal, akkor értelem-szerűen az eredeti alakzatok lerajzolható ceruzafelemelés nélkül. Amennyiben nem tartalmaznak Euler-vonalat, a válaszuk nemleges.

Vizsgáljuk az első alakzatot, vegyünk fel egy megfelelő G_1 gráfot:

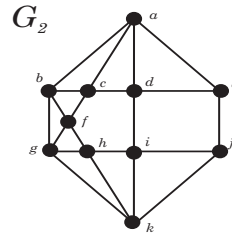


Látjuk, hogy G_1 összefüggő, mert bármely két pontja között létezik séta. A gráf pontjainak fokszáma: $\{a, b, c, d, e, f\} \rightarrow \{4, 4, 3, 3, 2, 4\}$. Mivel G_1 összefüggő, valamint pontosan két páratlan fokú pontja van (c és d), ezért G_1 -ben van nyílt Euler-vonal, tehát az eredeti alakzat lerajzolható ceruzafelemelés nélkül. Adjunk is meg egy nyílt Euler-vonalat. Tudjuk, hogy ebben az esetben a vonal az egyik páratlan foksámú pontból indul, valamint a másikban végződik:



Az Euler-vonal tehát az érintett pontok sorrendjében: $dbeabfcdfdc$, ez kész, ezzel rendben vagyunk.

Vizsgáljuk meg a második alakzatot, adjunk meg egy megfelelő G_2 gráfot:

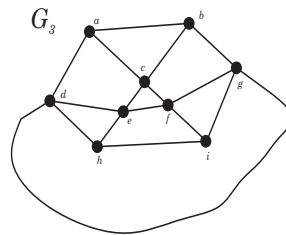


A gráf pontjainak fokszáma:

$$\{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k\} \rightarrow \{4, 4, 4, 4, 3, 4, 4, 4, 3, 4\},$$

ismét két páratlan fokszámú pontunk van tehát, továbbá ismét összefüggő a gráfunk, ezért létezik a gráfban nyílt Euler-vonal, az eredeti alakzatunk tehát lerajzolható ceruzafelemelés nélkül. Az Euler-vonal kezdő és végpontjai ezúttal az e és j pontok lesznek.

Végül vizsgáljuk meg az utolsó, harmadik alakzatunkat. Adjunk meg egy megfelelő G_3 gráfot:

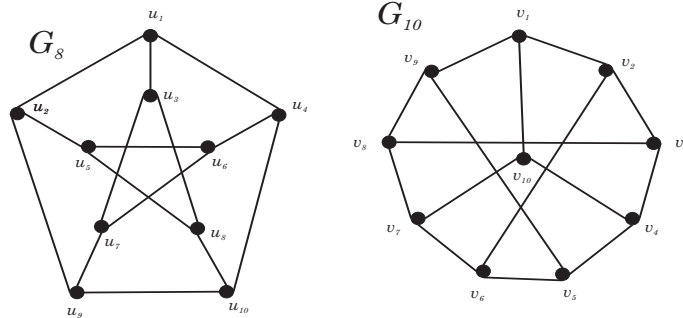


Látjuk, hogy a gráf pontjainak fokszáma

$$\{a, b, c, d, e, f, g, h, i\} \rightarrow \{3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 3, 3\},$$

tehát a páratlan fokszámú pontok száma kettőnél több (négy), így a gráfelmélet Euler-tételének értelmében a gráfban nem létezik Euler-vonal. Következtetés: az eredeti ábra nem rajzolható le ceruzafelemelés nélkül.

3. HA LEHETSÉGES, ADJUNK MEG GRÁFIZOMORFIZMUST G_8 ÉS G_{10} KÖZÖTT!



Megoldás:

Látjuk, hogy a csúcsok száma mindkét gráf esetén $n = 10$, valamint azt is látjuk, hogy minden csúcs fokszáma mindkét gráf esetén 3. Jelen esetben mindkettő szükséges feltétele annak, hogy létezzen gráfizomorfizmus G_8 és G_{10} között, amely egy bijektív és struktúrátartó leképezés úgy, hogy mind a leképezés, mind pedig az inverze egyaránt szomszédos csúcsokra képezze le a szomszédos csúcsokat.

Azt sejtjük tehát, hogy G_8 és G_{10} izomorfak, ezért próbáljunk meg megadni egy ilyen $\varphi : U \rightarrow V$ bijekciót, ahol $U = \{u_1, u_2, \dots, u_{10}\}$ és $V = \{v_1, v_2, \dots, v_{10}\}$ halmazok G_8 és G_{10} gráfok ponthalmazai. Ugyan φ meghatározására nem tanultunk konkrét algoritmust, a feladat mégsem nehéz, csupán arra kell figyelni, hogy a fokszámok megtartása mellett az egyes pontos közötti szomszédsági viszony ne sérüljön. Induljunk el a következőképpen:

$$\varphi = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ v_1 & v_2 & v_{10} & v_9 \end{pmatrix},$$

hiszen ha lerögzítjük, hogy u_1 -hez v_1 -et szeretnénk rendelni, látjuk, hogy u_1 -től 1 távolságra az u_2, u_3 és u_4 pontok vannak G_8 -ban, így φ -nek olyan pontokat kell hozzájuk rendelnie, amelyek G_{10} -ben v_1 -től szintén 1-1 távolságra vannak. Világos, hogy három ilyen pont van, ezeket tetszőlegesen szétoszthatjuk u_2, u_3 és u_4 között. Haladjunk tovább:

$$\varphi = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 \\ v_1 & v_2 & v_{10} & v_9 & v_3 \end{pmatrix},$$

hiszen látjuk, hogy u_5 1 távolságra van u_2 -től, u_6 -tól és u_8 -tól, és mivel u_2 -höz v_2 -öt rendeltük, így u_5 -höz már csak olyan pontot rendelhetünk, amelynek szomszédja v_2 . A v_3 éppen ilyen pont. Lépünk még egyet:

$$\varphi = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 \\ v_1 & v_2 & v_{10} & v_9 & v_3 & v_8 \end{pmatrix},$$

mert u_6 szomszédai: u_7, u_4 és u_5 , ebből az utóbbi kettőhöz rendre a v_9 és v_3 pontokat rendeltük, így olyan pontot kell keresnünk, amely mindkettő szomszédja, ez pedig a v_8 . A következő lépés:

$$\varphi = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 & u_7 \\ v_1 & v_2 & v_{10} & v_9 & v_3 & v_8 & v_7 \end{pmatrix},$$

mert u_7 szomszédai: u_9, u_6 és u_3 , ebből az utóbbi kettőhöz rendre a v_8 és v_{10} pontokat rendeltük, így olyan pontra van szükségünk, amely mindkettőnek szomszédja. Ez a v_7 . Újabb lépés következik:

$$\varphi = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 & u_7 & u_8 \\ v_1 & v_2 & v_{10} & v_9 & v_3 & v_8 & v_7 & v_4 \end{pmatrix},$$

hiszen u_8 szomszédai: u_{10}, u_3 és u_5 , ebből az utóbbi kettőhöz pedig rendre a v_{10} és v_3 pontokat rendeltük. Kell tehát egy olyan pont, amely mindkettőnek szomszédja. Ez a v_4 . Az utolsó előtti lépés:

$$\varphi = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 & u_7 & u_8 & u_9 \\ v_1 & v_2 & v_{10} & v_9 & v_3 & v_8 & v_7 & v_4 & v_6 \end{pmatrix},$$

hiszen u_9 szomszédai: u_{10}, u_2 és u_7 , utóbbi kettőhöz pedig rendre v_2 és v_7 pontokat rendeltük. Éppen ezért olyan pont kell, amely mindkettőnek szomszédja, ez lesz a v_6 . Az utolsó lépés:

$$\varphi = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 & u_7 & u_8 & u_9 & u_{10} \\ v_1 & v_2 & v_{10} & v_9 & v_3 & v_8 & v_7 & v_4 & v_6 & v_5 \end{pmatrix},$$

hiszen u_{10} szomszédai: u_4 , u_8 és u_9 , ezekhez pedig rendre v_9 , v_4 és v_6 pontokat rendeltük. Éppen ezért olyan pont kell, amely mindháromnak szomszédja, ez lesz a v_5 . Végeztünk, látjuk, hogy φ bijekció a két ponthalmaz között, így a két gráf izomorf, $G_8 \cong G_{10}$.

4. A $KG(16, 3)$ KNESER-GRÁF CSÚCSHALMAZA $\binom{[16]}{3}$, ÉS KÉT CSÚCS (RÉSZHALMAZ) PONTOSAN ÖSSZEKÖTÖTT, HA DISZJUNKTAK. MUTASSUK MEG, HOGY $KG(16, 3)$ -BAN VAN HAMILTON-KÖR.

Megoldás:

A Dirac-tétel szerint ha egy n -pontú G egyszerű gráfban minden csúcs foka legalább a csúcsszám fele ($\frac{n}{2}$), valamint $n \geq 3$, akkor G -ben van Hamilton-kör. Ezt kell vizsgálnunk speciálisan $KG(16, 3)$ esetére.

Tudjuk, hogy $KG(16, 3)$ egyszerű gráf, hiszen nincsen benne párhuzamos él, mivel a részhalmazok közötti diszjunk-tulajdonságot csak egyszeresen értelmezzük. Azt mondjuk, hogy ha A és B diszjunkt, akkor van közöttük él (egyetlen), ha nem diszjunktak, akkor nincs közöttük él. Ez a definíció kizárja a párhuzamos éleket. Tudjuk továbbá, hogy $KG(16, 3)$ -ban nincsen hurokél sem, hiszen egy halmaz nem lehet diszjunkt önmagával.

Azt is tudjuk, hogy a gráf csúcsai a standard 16-elemű halmaz 3-elemű részhalmazai, amiből következik, hogy a gráf ponthalmaza $\binom{16}{3}$ elemű. Egyszerűbben fogalmazva a gráfot $n = \binom{16}{3} = 560$ pont alkotja.

Két halmaz diszjunkt, ha metszetük az üres halmaz. Világos, hogy a standard 16-elemű halmaz minden 3-elemű részhalmaza azon részhalmazoktól diszjunkt, amelyek pont azt a három elemet nem tartalmazzák, amelyet ők maguk tartalmaznak. Ebből pedig $\binom{16-3}{3} = \binom{13}{3}$ darab van, hiszen ki kell venni az alaphalmazból azt a három elemet, amelyet a vizsgált részhalmaz tartalmaz. Ezzel beláttuk, hogy a gráf minden pontjának fokszáma $\binom{13}{3} = 286$. Nem kérdés, hogy $n \geq 3$, valamint a csúcsszám fele $\frac{1}{2} \cdot 560 = 280$, aminél minden csúcs fokszáma pontosan hattal több, ebből következik, hogy $KG(16, 3)$ -ban van Hamilton-kör. ■

5. MUTASSUK MEG, HOGY HA EGY GRÁFBAN PONTOSAN KÉT PÁRATLAN FOKÚ CSÚCS VAN, AKKOR VEZET KÖZÖTTÜK ÚT.

Megoldás:

Először is tegyük fel, hogy a gráfunk összefüggő. Ebben az esetben az állítás triviális módon teljesül, hiszen a gráf egyetlen komponensből áll, a két páratlan fokszámú csúcs között biztosan vezet út, készen vagyunk.

Az izgalmasabb kérdés az állítást belátni akkor, ha a gráfunk nem összefüggő. Tegyük fel tehát, hogy a gráfunk nem összefüggő. Ebben az esetben a gráf legalább két komponensre bomlik fel, amelyek csúcsdiszjunktak egymással. Az világos, hogy ha egy gráfban pontosan kettő darab páratlan fokszámú csúcs van, akkor a gráf fokszámösszege páros. Bizonyítsunk indirekt módon, tehát tegyük fel, hogy a két páratlan fokszámú csúcs között nem vezet út. Ha nem vezet közöttük út, akkor ez azt jelenti, hogy az eredeti gráfunk felbontható két komponensre úgy, hogy a páratlan fokszámú csúcsok külön komponensbe kerülnek. Ebben az esetben a két komponens fokszámösszege külön-külön vizsgálva biztosan páratlan lesz.

Létrejött tehát két olyan komponens, amelyek külön-külön páratlan fokszámösszeggel rendelkeznek, mint (rész)gráf. Tudjuk, hogy a gráfok fokszámösszeg-képletének értelmében

egy gráf fokszámösszege az élek számának kétszerese:

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2 \cdot |E(G)|.$$

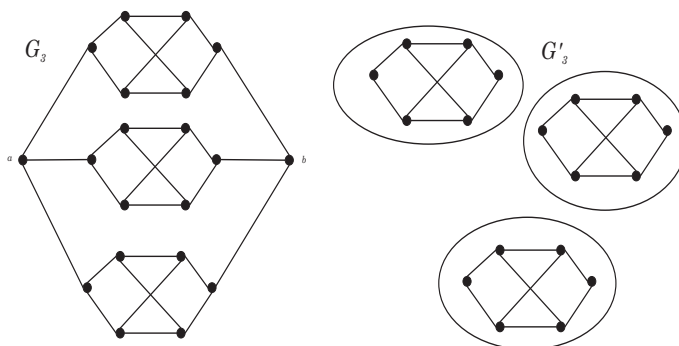
Feltételezésünk szerint olyan részgráfjaink jöttek létre, melyek esetén a fenti egyenlet bal oldalán elhelyezkedő foksámösszeg páratlan. Világos, hogy egy gráfban az élek száma csak páros és páratlan lehet. A fenti képlet alapján mindegy, hogy páros vagy páratlan az élek száma, a foksámösszeg szükségszerűen páros lesz. (Gondoljuk meg, hogy tetszőleges páratlan szám kétszeres páros, valamint tetszőleges páros szám kétszerese is páros lesz.)

Ebből következik, hogy minden véges irányítatlan gráf páros darab páratlan foksámú csúccsal kell, hogy rendelkezzen. Ez azt jelenti, hogy az eredeti gráfunk, amelyben pontosan kettő páratlan foksámú csúcs van, nem bontható fel olyan komponensekre, hogy a páratlan foksámú csúcsok külön komponensbe kerülnek, hiszen a fenti okok miatt ezeket a részgráfokat nem tudnánk realizálni, ezek a gráfok a foksámösszeg-képlet következményeként nem létezhetnek.

A két páratlan foksámú csúcs tehát közös komponensbe kell, hogy tartozzon. Ebben az esetben vezet közöttük út, ami ellentmondás. A két páratlan foksámú csúcs között tehát biztosan vezet út. ■

(Megj.: A bizonyításhoz használt fenti gondolatmenet az úgynevezett kézfogás-lemma, amely a gráfelmélet híres lemmája, a foksámösszeg-képletből következik.)

6. DÖNTSÜK EL, HOGY G_3 GRÁFBAN VAN-E HAMILTON-ÚT, HAMILTON-KÖR.



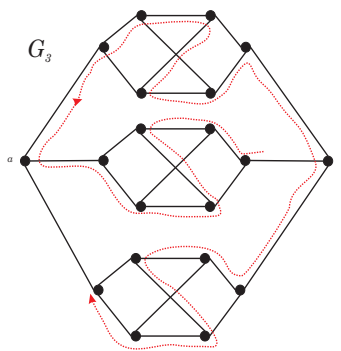
Megoldás:

Azt ránézésre is meg tudjuk mondani, hogy a gráfot $n = 20$ pont alkotja, és mivel a Dirac-tétel nem akkor és csak akkor típusú állítást fogalmaz meg, ezért ebben az esetben nem alkalmazható. Konzultáción tárgyalt állítás: ha egy tetszőleges G gráfból el lehet hagyni k darab pontot úgy, hogy az elhagyás után kapott gráfnak legalább $(k + 1)$ komponense lesz, akkor ebben a G gráfban nincsen Hamilton-kör.

Legyen $k = 2$ és hagyjuk el a és b pontokat. Ekkor a gráf pontosan $(k + 1) = 3$ komponensre esik szét a fenti ábrán látható módon (G'_3) . A gráfban tehát nincs Hamilton-kör.

A Hamilton-út létezésére ehhez hasonló receptet nem tudunk adni, de ha találunk egyet, azzal értelemszerűen igazoljuk a létezését is.

Belátható, hogy a vizsgált gráfban megadható olyan út, amely a gráf minden pontját pontosan egyszer érinti. Egy ilyen utat mutat a következő ábra. Kijelenthetjük tehát, hogy a gráf tartalmaz Hamilton-utat.



7. EGY 210 PONTÚ FÁBAN MINDEN CSÚCS FOKA 1 VAGY 3. HÁNY LEVELE VAN A FÁNAK?

Megoldás:

Világos, hogy egy $n = 210$ pontú fa összesen $n - 1 = 209$ élet tartalmaz. Tudjuk, hogy egy gráf fokszámösszege az élszám kétszeresével lesz egyenlő, tehát ennek a 210 pontú fának a fokszámösszege $2 \cdot 209 = 418$. Jelölje k azon pontok számát a gráfban, amelyek fokszáma 1, és jelölje l azon pontok számát a gráfunkban, amelyek fokszáma 3. Egyrészt tudjuk, hogy

$$k + l = 210,$$

hiszen a gráfban lévő pontok fokszáma vagy 1, vagy 3, és tudjuk, hogy 210 pont van a gráfban. Felírható még:

$$418 = 1 \cdot k + 3 \cdot l,$$

hiszen a fokszámösszeg úgy áll össze, hogy megszorozzuk az 1-fokú csúcsok számát 1-gyel, és hozzáadjuk a 3-fokú csúcsok számának háromszorosát. Van két egyenletünk és két ismeretlenünk, oldjuk meg az egyenletrendszert:

$$k + l = 210 \Leftrightarrow k = 210 - l, \quad 418 = 210 - l + 3l \Leftrightarrow 208 = 2l \Leftrightarrow l = 104 \text{ és } k = 106.$$

Mivel definíció szerint levélnek nevezzük a fa 1-fokú pontjait, így k pontosan a levelek számát adja meg. A fa tehát 106 levelet tartalmaz, készen is vagyunk.