

Név: Unger Tamás István

Neptun: FTD1YJ

Web: <http://maxwell.sze.hu/~ungert>

KOMBINATORIKA, MÁSODIK HÁZI FELADAT

1. HÁNYFÉLEKÉPPEN LEHET LEÍRNI A KOMBINATORIKA SZÓ BETŰIT ÚGY, HOGY A B ÉS M BETŰK NE KERÜLJENEK EGYMÁS MELLÉ?

Megoldás:

Világos, hogy egy multihalmaz sorbaállítására kérdez rá a feladat, tehát ismétléses permutációról van szó. Próbáljuk meg hiba és elírás nélkül formalizálni a példát. A vizsgált alaphalmazunkat a KOMBINATORIKA szó betűi alkotják, ezen alaphalmaz felett értelmezzük azt a multihalmazt, melynek multiplicitásvektora megadja, hogy az egyes szóalkotó betűkből hány darab található a vizsgált szavunkban:

$$H = \{K, O, M, B, I, N, A, T, R\}, \quad M(H) = (2, 2, 1, 1, 2, 1, 2, 1, 1).$$

Először meghatározzuk a kiindulási, $k = 9$ elemű H feletti $|M| = 13$ elemű M multihalmaz sorbaállításainak számát:

$$|\Omega| = \frac{|M|!}{M(h_1)! \cdot M(h_2)! \cdot \dots \cdot M(h_n)!} = \frac{13!}{2! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1!} = \frac{13!}{2! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2!}.$$

Ebből az Ω összes esetet tartalmazó halmazból kellene kipakolnunk azokat az eseteket, ahol a B és M betűk egymás mellett állnak, ezeket az eseteket kivonva az összes eset számából kapjuk a választ a feladat kérdésére. Határozzuk meg ezeket az eseteket!

Módosítsuk az alaphalmazunkat úgy, hogy a B és M betűk egy alaphalmazbeli elemet képeznek (MB). Így a módosított alaphalmazunk és a módosított multihalmazunk új multiplicitásvektora:

$$H' = \{K, O, MB, I, N, A, T, R\}, \quad M^*(H') = (2, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 1).$$

A módosított, $k = 8$ elemű H feletti $|M| = 12$ elemű M multihalmaz sorbaállításainak száma:

$$|A_1| = \frac{|M|!}{M(h_1)! \cdot M(h_2)! \cdot \dots \cdot M(h_n)!} = \frac{12!}{2! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1!} = \frac{12!}{2! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2!}.$$

Vegyük észre, hogy a B és M betűk nem csak MB-sorrendben, hanem BM-sorrendben is állhatnak egymás mellett, ezekkel az esetekkel is számolnunk kell. Ehhez ismét tartozozik egy módosított alaphalmaz és egy multihalmaz is:

$$H'' = \{K, O, BM, I, N, A, T, R\}, \quad M^{**}(H'') = (2, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 1),$$

mely multihalmaz sorbaállításainak száma megegyezik az előbb vizsgált multihalmaz sorbaállításainak számával, azaz

$$|A_2| = |A_1| = \frac{12!}{2! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2!}.$$

Mivel A_1 és A_2 diszjunkt esethalmazok, ezért a válasz:

$$|\Omega| - |A_1| - |A_2| = \frac{13!}{2! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2!} - 2 \cdot \frac{12!}{2! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2!} = 329313600.$$

2. MENNYI AZ $x^{10}y^{70}z^{20}$ MONOM EGYÜTTHATÓJA AZ $(x + y + z)^{100}$ POLINOMBAN? ÉS AZ $x^{10}y^{20}z^{30}$ MONOMÉ?

Megoldás:

Megtanultuk, hogy

$$(x + y + z)^n = \sum_{i+j+k=n} \frac{n!}{i! \cdot j! \cdot k!} x^i y^j z^k, \quad \forall i, j, k \in \mathbb{N},$$

a feladat tulajdonképpen csak ennek a képletnek az egyszerű használatát várja el tőlünk. Látjuk, hogy az $x^{10}y^{70}z^{20}$ esetben $i = 10$, $j = 70$ és $k = 20$, ami $n = 100$ mellett egyrészt lehetséges, hiszen $i + j + k = n$ fennáll, másrészt pedig behelyettesítve

$$\frac{n!}{i! \cdot j! \cdot k!} x^i y^j z^k = \frac{100!}{10! \cdot 70! \cdot 20!} x^{10} y^{70} z^{20}$$

adódik, tehát a kérdéses monom együtthatója

$$\frac{100!}{10! \cdot 70! \cdot 20!} \quad (\approx 8,8249 \cdot 10^{32}).$$

A feladat második kérdésnek ne dőlünk be, inkább használjuk az eszünket. Látjuk, hogy $x^{10}y^{20}z^{30}$ esetén $i + j + k \neq n$, így tehát a monom kizárólag nulla együtthatóval szerepelhet az összegben.

3. HÁNYFÉLEKÉPPEN LEHET 10 LAPOT KIVÁLASZTANI AZ 52 LAPOS FRANCIA KÁRTYA CSOMAGBÓL ÚGY, HOGY A KIVÁLASZTOTT LAPOK KÖZÖTT MIND A NÉGY SZÍN ELŐFORDULJON?

Megoldás:

Keveset kártyázó hallgatóknak talán kevésbé egyértelmű, mivel állunk szemben. A feladatban hivatkozott pakliban négy szín (kör, káró, treff és pikk) van, és minden színből tizenhárom különböző lapunk van ($4 \cdot 13 = 52$). Mivel elég bonyolult és kifejezetten hosszadalmas feladat lenne minden esetet direkt úton összeszámolni, ezért a gyanakvó hallgatóban felmerül, hogy a logikai szita használatára van szükség.

Fontos, hogy a feladat nem említ semmit sem arról, hogy mikor számít különbözőnek két kiválasztás. Én a feladat megoldása során feltettem, hogy számít a sorrend, tehát nem mindegy, hogy a tízlapos kiválasztási eljárás során először választom ki a kör ász és utána a káró ötöst, vagy éppen fordítva.

Legyen Ω az összes lehetséges kiválasztás halmaza. Ekkor

$$|\Omega| = 52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44 \cdot 43 = \frac{52!}{42!}.$$

Definiáljunk négy halmazt:

- A_1 : Azon kiválasztások halmaza, melyekből hiányzik a kör;

- A_2 : Azon kiválasztások halmaza, melyekből hiányzik a káró;
- A_3 : Azon kiválasztások halmaza, melyekből hiányzik a treff;
- A_4 : Azon kiválasztások halmaza, melyekből hiányzik a pikk.

Nézzük végig az egyes halmazok elemszámait:

$$|A_1| = |A_2| = |A_3| = |A_4| = 39 \cdot 38 \cdot 37 \cdot 36 \cdot 35 \cdot 34 \cdot 33 \cdot 32 \cdot 31 \cdot 30 = \frac{39!}{29!},$$

hiszen ezekben az esetekben mindig ki kell venni egy-egy színt – tehát 13 lapot – a lehetséges lapok közül. Természetesen $\binom{4}{1} = 4$ ilyen eset van. Nézzük a kettes metszeteket:

$$|A_1 \cap A_2| = |A_1 \cap A_3| = |A_1 \cap A_4| = |A_2 \cap A_3| = |A_2 \cap A_4| = |A_3 \cap A_4| = \frac{26!}{16!},$$

hiszen ezekben az esetekben már két-két színt – tehát 26 lapot – kell kivenni a lehetséges lapok közül. Ilyen metszetből $\binom{4}{2} = 6$ darab van. Nézzük a hármas metszeteket:

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = |A_1 \cap A_2 \cap A_4| = |A_1 \cap A_3 \cap A_4| = |A_2 \cap A_3 \cap A_4| = \frac{13!}{3!},$$

ezekben az esetekben ugyanis már három-három színt – tehát 39 lapot – kell kivenni a lehetséges lapok közül. Ilyen metszetből $\binom{4}{3} = 4$ darab van. Triviális továbbá, hogy

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 0$$

hiszen ha egyik színből sem húzunk lapot, akkor egyáltalán nem húzunk lapot, olyan pedig nem lehet.

Írjuk fel a logikai szitát:

$$\begin{aligned} |\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4}| &= |\Omega| - |A_1| - |A_2| - \dots - |A_4| + \\ &\quad + |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + \dots + |A_3 \cap A_4| - \\ &\quad - |A_1 \cap A_2 \cap A_3| - |A_1 \cap A_2 \cap A_4| - \dots - |A_2 \cap A_3 \cap A_4| + \\ &\quad + |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|. \end{aligned}$$

Konkretizáljuk erre a példára:

$$|\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4}| = \frac{52!}{42!} - \binom{4}{1} \cdot \frac{39!}{29!} + \binom{4}{2} \cdot \frac{26!}{16!} - \binom{4}{3} \cdot \frac{13!}{3!} + \binom{4}{4} \cdot 0 \approx 4,83 \cdot 10^{16}.$$

Nem szükséges magyarázni, ez pont azon eseteknek a száma, amelyeknél mind a négy szín előfordul.

Megjegyzés: természetesen ugyanígy megoldható a feladatnak az a verziója is, amikor a sorrend nem számít. Ebben az esetben $|\Omega| = \binom{52}{10}$, az egyes halmazok elemszáma külön-külön $\binom{39}{10}$, a kettes metszeteké külön-külön $\binom{26}{10}$, a hármas metszeteké $\binom{13}{10}$, és a négyes metszet ismét üres. A rend kedvéért írjuk fel így is a szitaformulát, ha már idáig eljutottunk:

$$\binom{52}{10} - \binom{4}{1} \cdot \binom{39}{10} + \binom{4}{2} \cdot \binom{26}{10} - \binom{4}{3} \cdot \binom{13}{10} + \binom{4}{4} \cdot 0 \approx 1,33 \cdot 10^{10}.$$

4. OLDJUK MEG A KÖVETKEZŐ MÁSODRENDŰ LINEÁRIS REKURZIÓT!

$$a_0 = 1, a_1 = 1, a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}.$$

Megoldás:

Először hagyjuk figyelmen kívül a kezdeti feltételeket és vizsgáljuk meg azt, hogy mely $a_n = q^n$ mértani sorozatokra teljesül a feladatban előírt

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$$

rekurzív feltétel ($q \neq 0$). Keressük tehát azokat a q számokat, melyekre fennáll, hogy

$$q^n = q^{n-1} + 2q^{n-2}$$

minden $n \geq 2$ esetén. Osszuk le az egyenlet mindkét oldalát q^{n-2} -vel és rendezzük az egészet nullára:

$$q^2 - q - 2 = 0.$$

A másodfokú egyenlet megoldása két valós gyököt eredményez:

$$q = 2 \text{ és } q = -1,$$

tehát azt kaptuk, hogy az

$$\tilde{a}_n = 2^n \text{ és a } \hat{a}_n = (-1)^n$$

sorozatok kielégítik a rekurzív összefüggésünket. Tudjuk továbbá, hogy ezen sorozatok lineáris kombinációi is ki fogják elégíteni a rekurzív összefüggésünket, azaz

$$a_n = \alpha \cdot 2^n + \beta \cdot (-1)^n$$

írható fel. Keressük meg azokat az α és β számokat, amelyek kielégítik a kezdeti feltételeinket, azaz teljesül, hogy

$$a_0 = 1 = \alpha \cdot 2^0 + \beta \cdot (-1)^0 \text{ és } a_1 = 1 = \alpha \cdot 2^1 + \beta \cdot (-1)^1.$$

Az α és β ismeretlenekere felírható egyenletrendszer tehát:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1, \\ 2\alpha - \beta = 1. \end{cases}$$

Az egyenletrendszer megoldása a rendelkezésre álló lineáris algebrai tudásunkkal nem okoz gondot. A megoldások: $\alpha = \frac{2}{3}$, $\beta = \frac{1}{3}$. Így az a_n sorozat keresett explicit alakja:

$$a_n = \frac{2}{3} \cdot 2^n + \frac{1}{3} \cdot (-1)^n. \quad \blacksquare$$