

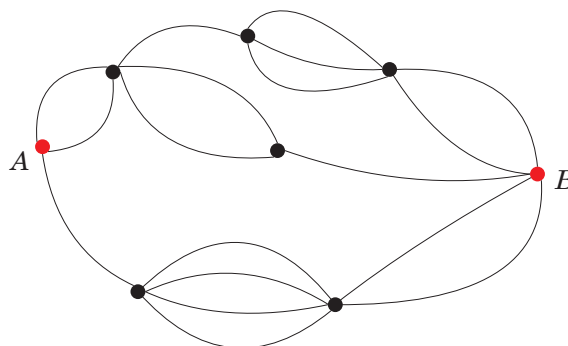
Név: Unger Tamás István

Neptun: FTD1YJ

Web: <http://maxwell.sze.hu/~ungert>

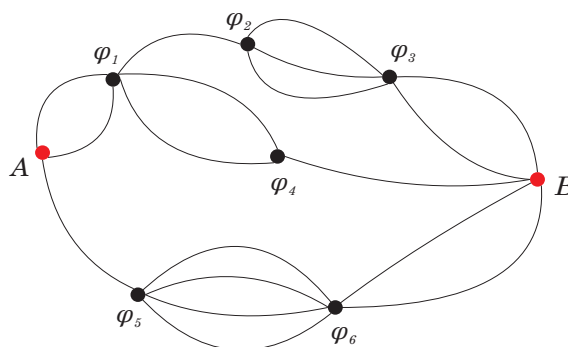
KOMBINATORIKA, ELSŐ HÁZI FELADAT

1. AZ ALÁBBI TÉRKÉPPEL LEÍRT TERÜLETEN A JELZETT UTAKON HALADVA A -BÓL B -BE KELL ELJUTNUNK. HÁNY LEHETŐSÉGÜNK VAN, HA NEM TÉRHETÜNK VISSZA EGY MÁR ELÉRT CSOMÓPONTBA (TEHÁT MINDIG "TÁVOLODUNK" A -TÓL)?



Megoldás:

Címkezzük meg a feladatkiírásban még címkézetlenül álló csomópontokat is az egyszerűség és a követhetőség kedvéért. Nyolc csomópont van, melyek közül hat áll címkézetlenül, legyenek ők rendre $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_6$.



Első közelítésben még ne foglalkozzunk az élekkel, csak azt nézzük meg, hogy a lehetséges utak A és B között milyen csomópontok érintésével épülhetnek fel. Jól láthatóan három olyan csomóponthalmaz van, amely eleget tesz a feladatban támasztott feltételeknek. Ez a három a következő: $A\varphi_1\varphi_2\varphi_3B$, $A\varphi_1\varphi_4B$ és $A\varphi_5\varphi_6B$. Az ezekhez tartozó útvonalakat külön-külön számoljuk össze. A logika a következő:

1. A -ból φ_1 -be kétféleképpen, φ_1 -ből φ_2 -be egyféleképpen, φ_2 -ből φ_3 -ba háromféleképpen, φ_3 -ból B -be pedig kétféleképpen juthatunk el. Ez azt jelenti, hogy rendre az $A\varphi_1\varphi_2\varphi_3B$ csomópontokat követve $2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 = 12$ különböző útvonal van;

2. A -ból φ_1 -be kétféleképpen, φ_1 -ből φ_4 -be kétféleképpen, φ_4 -ből B -be pedig egyféleképpen juthatunk el. Ez azt jelenti, hogy rendre az $A\varphi_1\varphi_4B$ csomópontokat követve $2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$ különböző útvonal van;
3. A -ból φ_5 -be egyféleképpen, φ_5 -ből φ_6 -ba négyféleképpen, φ_6 -ból B -be pedig kétféleképpen juthatunk el. Ez azt jelenti, hogy rendre az $A\varphi_5\varphi_6B$ csomópontokat követve $1 \cdot 4 \cdot 2 = 8$ különböző útvonal van.

Ezzel lefedtük az összes esetet, így az útvonalak száma $12 + 4 + 8 = 24$.

2. AZ $\{1, 2, \dots, 100\}$ HALMAZNAK HÁNY OLYAN RÉSZHALMAZA VAN, AMELYBEN AZ ELEMÉK ÖSSZEGE PÁRATLAN?

Megoldás:

Legyen $[100] = \{1, 2, 3, \dots, 100\}$. Ekkor a tanultak alapján $|[100]| = 100$ és $|\mathcal{P}\{[100]\}| = 2^{100}$. Azt állítom, hogy egy standard n -elemű nemüres halmaznak pontosan ugyanannyi olyan részhalmaza van, melynek elemösszege páros, mint amennyi páratlan elemösszege számú részhalmaza van. Ebben az esetben ez 2^{99} . Az állításommal persze nem érünk semmit sem, amíg be nem látjuk, hogy így van.

Állítsuk párba a páratlan elemösszegű részhalmazokat a páros elemösszegű részhalmazokkal. Tegyük meg ezt úgy, hogy tartozzanak egy párba azok a részhalmazok, melyek csak és kizárólag a karakterisztikus vektor első bitjében térnek el egymástól, a többiben viszont megegyeznek. Ezzel kialakulnak olyan párok, melyek esetében az egyik halmaz nem tartalmazza az "1" elemet, de ha ehhez a halmazhoz hozzátesszük az 1-et, akkor pontosan a másik halmazt, a párját kapjuk.

Nézzünk egy példát, legyen $n = 4$, $[4] = \{1, 2, 3, 4\}$. Ekkor a párok a következőképpen alakulnak:

$$\begin{aligned}
 1\ 0\ 0\ 0 &- 0\ 0\ 0\ 0 \leftrightarrow \{1\} - \{\emptyset\}, \text{ ami páratlan (1) és páros (0);} \\
 1\ 0\ 0\ 1 &- 0\ 0\ 0\ 1 \leftrightarrow \{1, 4\} - \{4\}, \text{ ami páratlan (5) és páros (4);} \\
 1\ 0\ 1\ 0 &- 0\ 0\ 1\ 0 \leftrightarrow \{1, 3\} - \{3\}, \text{ ami páros (4) és páratlan (3);} \\
 1\ 0\ 1\ 1 &- 0\ 0\ 1\ 1 \leftrightarrow \{1, 3, 4\} - \{3, 4\}, \text{ ami páros (8) és páratlan (7);} \\
 1\ 1\ 0\ 0 &- 0\ 1\ 0\ 0 \leftrightarrow \{1, 2\} - \{2\}, \text{ ami páratlan (3) és páros (2);} \\
 1\ 1\ 0\ 1 &- 0\ 1\ 0\ 1 \leftrightarrow \{1, 2, 4\} - \{2, 4\}, \text{ ami páratlan (7) és páros (6);} \\
 1\ 1\ 1\ 0 &- 0\ 1\ 1\ 0 \leftrightarrow \{1, 2, 3\} - \{2, 3\}, \text{ ami páros (6) és páratlan (5);} \\
 1\ 1\ 1\ 1 &- 0\ 1\ 1\ 1 \leftrightarrow \{1, 2, 3, 4\} - \{2, 3, 4\}, \text{ ami páros (10) és páratlan (9).}
 \end{aligned}$$

Az egyik részhalmaz elemösszege tehát mindig páros, a másik pedig mindig páratlan. Így párbaállítottuk a részhalmazokat, lett 2^{n-1} darab párunk, mindegyikben egy páros és egy páratlan elemösszegű részhalmazzal. Gondoljuk bele, hogy miért van így! A válasz egyszerű. Az a részhalmaz, amelyik az "1" elemet nem tartalmazza, az lehet páros vagy lehet páratlan elemösszegű, teljesen mindegy. Ha ez a részhalmaz páros elemösszegű volt, akkor az "1" hozzápakolásával tuti biztos, hogy páratlan elemösszegű részhalmazt kaptunk. Ha ez a részhalmaz viszont páratlan elemösszegű volt, akkor az "1" elem bevitelével teljesen biztos, hogy páros elemösszegű lesz. Ez természetesen nem csak $n = 4$ esetén igaz, hanem $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ esetére is.

3. HOZZUK ZÁRT ALAKRA A KÖVETKEZŐ KIFEJEZÉST:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 4^k (-1)^{n-k}.$$

Megoldás:

A binomiális tételre $((x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k})$ hivatkozva felírható:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 4^k (-1)^{n-k} = (4 + (-1))^n = 3^n.$$

4. AZ ALÁBBI EGYENLETNEK HÁNY MEGOLDÁSA VAN A NEMNEGATÍV EGÉSZÉK KÖRÉBEN?

$$a + b + c + d = 2018.$$

Megoldás:

Ne tévesszen meg minket az algebrai tálalás, a probléma természetesen klasszikusan kombinatorikai gyökerekkel rendelkezik. Közelítsük meg másképpen, hogy egyértelmű legyen.

Egy közismert szegedi borszaküzletben négyféle bor kapható. A kereskedés fennállásának 150. évfordulójára óriási akciót hirdetett, melynek keretei között az a vásárló, aki képes 2018 palack bor egyidejű elszállítására, az mind a 2018 palackot ingyen viheti el. Szomjas Béla ezért egy autókölcsönzőből kibérel egy IFÁ-t, amely alkalmas a pontosan 2018 palack bor egyidejű elszállítására, majd gondosan leparkolja azt a borkereskedés bejárata előtt és gondos pakolásba kezd. Hányféleképpen pakolhatja tele Szomjas Béla a 2018 palack bor elszállítására alkalmas IFA rakodóterét a borszaküzlet négyboros kínálatából?

Van tehát $n = 4$ elemű halmazunk (pl.: {kékfrankos, chardonnay, kadarka, merlot}), efelett a halmaz felett keressük a $k = 2018$ elemű multihalmazok számát. Használjuk az órán tanult tételt:

$$\begin{aligned} \binom{\binom{n}{k}}{\binom{4}{2018}} &= \binom{\binom{4}{2018}}{2018} = \binom{2018+4-1}{2018} = \binom{2021}{2018} = \binom{2021}{3} = \frac{2021!}{3!(2021-3)!} = \\ &= \frac{2021!}{3!2018!} = 1373734330. \end{aligned}$$

5. A BOLYAI KÖZLEKEDÉSI VÁLLALAT (BKV) JEGYEIN AZ ALÁBBI 5×5 -ÖS SZÁMTÁBLÁZAT SZEREPEL:

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

AZ ELŐÍRÁS SZERINT A BUSZON TALÁLHATÓ LYUKASZTÓNAK TÍZ SZÁMOT KELL KILYUKASZTANIA ÚGY, HOGY MINDEN SORBAN PONTOSAN KETTŐ LEGYEN KILYUKASZTVA. HÁNY ILYEN LYUKASZTÁSI MÓD VAN?

Megoldás:

A lyukasztó tehát minden sorban pontosan kettő számot lyukaszt ki. A sorrend természetesen nem számít. Az első kérdés az, hogy a soronként szereplő öt számból hányféleképpen tudunk kiválasztani kettőt úgy, hogy a sorrend nem számít. Ez bizony nem más, mint egy ötelemű halmaz kételemű részhalmazainak száma, ami a tanultak alapján

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 10.$$

A lyukasztó tehát tízféléképpen lyukasztthat ki egyetlen sorban két számot. Mivel a jegyükön öt sor van, ezért ötször kell kiválasztanunk öt számból kettőt, a sorrend mindegy. Ki kell választanunk az első sorból ötöt, és a második sorból ötöt, és a harmadik sorból ötöt, ... és végül az ötödik sorból is ötöt. A megoldás tehát:

$$\binom{5}{2} \cdot \binom{5}{2} \cdot \binom{5}{2} \cdot \binom{5}{2} \cdot \binom{5}{2} = 10^5.$$