

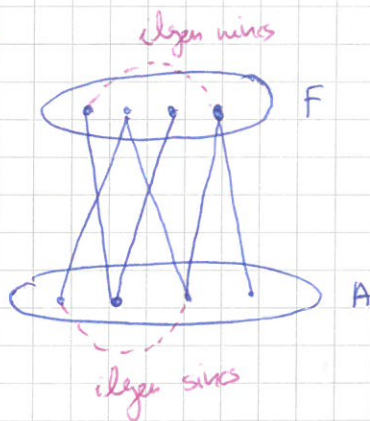
2018. 05. 05.

## 5. konzultáció

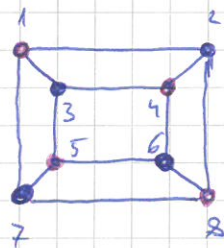
## Kombinatorika

páros gráfok jönnek.

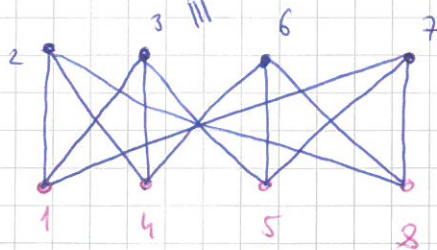
Def.: Egy  $G$  gráf páros, ha csúcsait két osztályba lehet sorolni úgy, hogy a gráf  $\forall$   $e$  két osztály közötti halmaz, tehát az osztályon belül nincs él.



Másik példa:



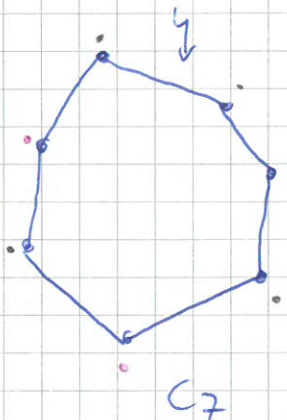
két osztály: kék, piros.



Alternatív definíció:  $G$  gráf páros  $\Leftrightarrow G$  csúcsait 2 színnel lehet megszínezni úgy, hogy  $\forall$   $e$  két végpontja különböző színt kap.

Nézzünk egy feladatot!

Egy páratlan hosszú kör páros-e?



úgy látszik, hogy nem.

Nem, egy csúcsból kiindulva a kör mentén csak felváltva színezhetjük a csúcsokat két színnel, de ott a kiinduló csúcs színeét kapnánk másik színnel, ami nem megengedett.  $\Rightarrow$  nem páros  $C_7$ .

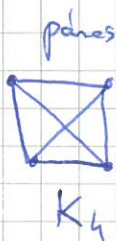
Köv.: Ha egy gráfban van páratlan hosszú kör  $\Rightarrow$  a gráf nem lehet páros.

Ha nincs páratlan hosszú kör  $\Rightarrow$  a gráf páros.

Ez egy állítás, ez is igaz.

Tehát:  $G$  páros  $\Leftrightarrow G$ -ben nincs páratlan kör.  
Nem bizonyítjuk.

4. feladat. 14/a.



DE TRIVIALISAN PÁROS.



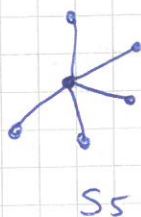
$K_4, K_5, K_6$  nem párosak,  
nem tartalmaznak  $K_3$ -at!  $\square$

$\uparrow$  ez pont egy páratlan hosszú kör.

További példa:

4/14/C.

$n$ -élű csillag:



nincs benne semmilyen kör  
 $\Downarrow$   
 páros.

Hasonlóan: minden fa páros.

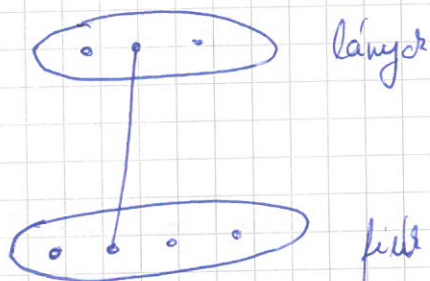
HF: 4/15.

4/16.

$$5 \cdot 3 + 5 + 8 \cdot 6 = 20 + 8 \cdot 6.$$

15  
 20

csúcsok:  $5 + 1 + 8 = 14.$



táncolás szellőztetés

eg. páros gráfok.

el  $\equiv$  az adott két illeltő  
 táncolt egymással

A gráf felsőfokú van-e felsőfokú:

Feladat: nincs olyan páros gráf, melynek a felsőfokú: páros

3, 3, 3, 3, 3, 5, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6.

Felsőfokú 1 osztályban: élér száma;

Ésnevel:

Páros gráfban  $(A, F)$  csúcsokhoz igaz, hogy

$$\sum_{v \in A} d(v) = \sum_{v \in F} d(v) = |E(G)|.$$

alsó felsőfokú      felső felsőfokú  
 (3)

De a feladatbeli felszámolást nem lehet két csoportra osztani úgy, hogy a két csoportban megegyezzen a felszámosság.

Bárhol osztjuk két csoportra, az 5-et tartalmazó csoportban a felszámosság nem osztható hárommal (az összeg  $3k+2$  alakú), a másik csoportban az összeg  $3k$ -alakú, tehát nem egyenlő.  $\square$

Színezési csúcsok:

Def.: Adott egy  $P$  halmaz ("paletta").

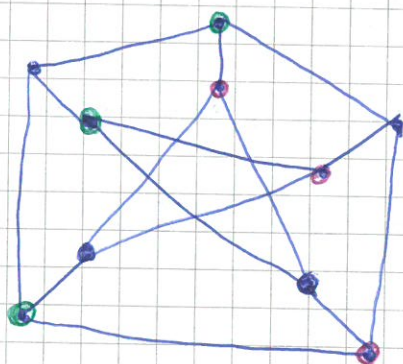
A  $G$  gráf csúcsszínezése egy  $V(G) \rightarrow P$  leképezés.

pl.:  $P = \{\text{piros, kék, zöld}\}$

Egy csúcsszínezés jó, ha minden él két végpontja különböző színt kap.

Azt mondjuk, hogy  $G$  jól színezhető  $k$  színnel, ha létezik  $V(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$  ilyen palettájú jó színezés.

(pl.)



Peterson-gráf

3 színnel színezhető

Megj.:

$G$  páros  $\Leftrightarrow G$  jól színezhető 2 színnel.

Def.: Egy  $G$  gráf kromatikus száma (jelölése:  $\chi(G)$ ) az a legkisebb szám, ahány 2 színrel  $G$  jól színezhető.

Megj.: (színezésszerűen csak egy színi gráffal foglalkozunk.  
(Ha van kemény: nincs jó színezés).

pl.: Petersen-gráf kromatikus száma 3.

HF.: 4/20/ $G_3$

4/20/ $G_2$   $\chi(G_2) \leq 3 \Leftrightarrow G_2$  jól színezhető 3 színnel  
(lásd előbb)

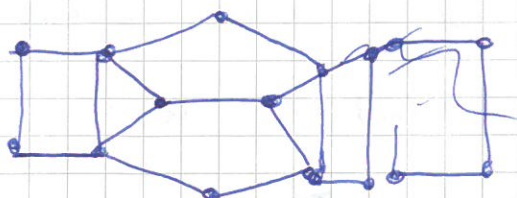
$\chi(G_2) \geq 3 \Leftrightarrow G_2$  3-nál kevesebb színnel nem színezhető jól

$\Rightarrow \chi(G) = 3$

$G_2$  nem páros gráf, hat van benne 5 hosszú (párhuzamos)

$\Rightarrow G_2$  nem színezhető jól két színnel.

4/20/ $G_1$



negyfelé íj.

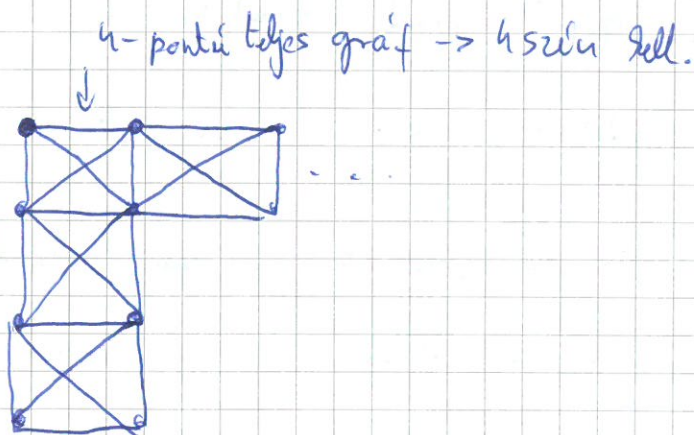
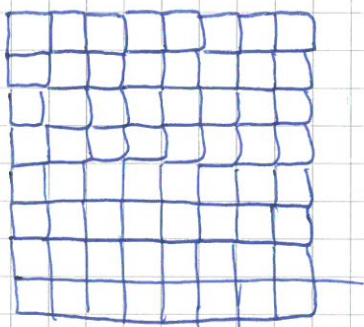
2 szín nem elég  $\Leftrightarrow$  van benne párhuzamos 5.

3 színnel könnyen beábrázolható, hogy jól színezhető.

$\Downarrow$   
 $\chi(G_1) = 3.$

□

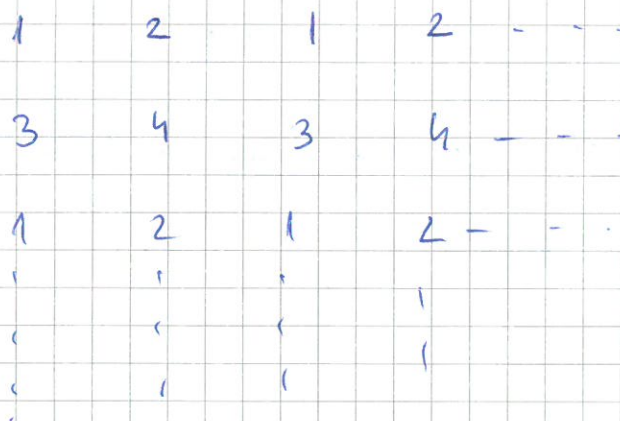
4/22

+ 1 pont

Def.: A  $G$  gráfban a  $K \subseteq V(G)$  pontthalmaz klík, ha

$K$ -ban bármely 2 pont összekötött.

Egy klík csúcsainak száma határozza meg, hogy az  $n$  gráf jó színezhető-e.



Ez egy jó minta, mivel periodikusan jól színezhető  
ez a gráf.  $\Rightarrow$   $n$  színnel jól színezhető.

$$\chi(G) = 4. \quad \square$$

Def.:  $\omega(G) = \max \{ |K| : K \text{ klík } G\text{-ben} \}$ , azaz a legnagyobb

klíkméret  $G$ -ben.

A fenti gondolatmenethez hasonlóan: teljesen  $G$  gráfban/gráfja:

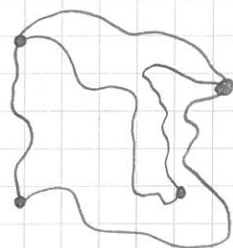
⑥

$$\chi(G) \geq w(G).$$

Biz.: Vegyünk egy  $w(G)$  nemüres halmazt. Ezek csúcsait kölcsönös szomszédosságra kell bontani.  $\square$

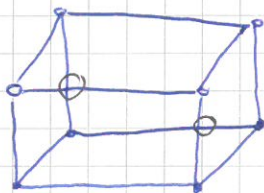
### Síkgráfok

Def.: Egy  $G$  gráf síkgráf, ha lerajzolható úgy a síkra, hogy az élgörbék ne metszék egymást.

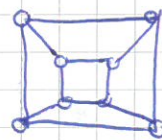


példa síkgráfra

vagy a koszár:

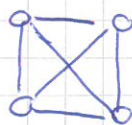


$\leadsto$

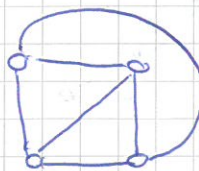


sík lerajolás.

vagy a  $K_4$ :



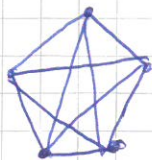
$\leadsto$



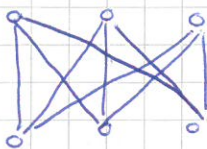
sík lerajolás.

Két alappélda nem síkgráfokra:

(T.) Ha nézzük a  $K_5$ -öt:



$K_5$



$K_{3,3}$

(T.)

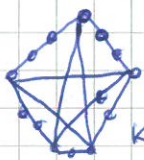
"három ház,  
három szék"

$\Leftarrow$  nem síkgráfok.

All.:  $K_5$  és  $K_{3,3}$  felosztásai sem síkgráfok.

↓  
néhány den felvethetünk új, másodfokú csúcsokat.

példa  $K_5$  felosztására:



$K_5$  felosztása például ilyen is lehet.

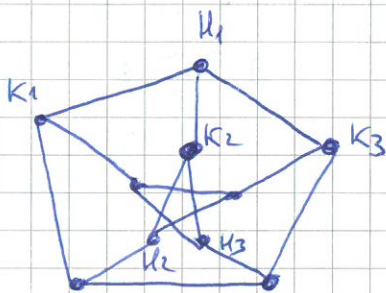
$\equiv$  lejegyzés szempontjából az új pontok mintha ott sem lennének.

All.: Egy síkgráf minden részigrafja is síkgráf.

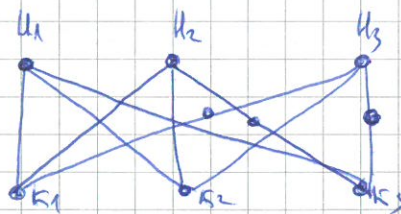
Kuratowski - tétel.

$G$  síkgráf  $\Leftrightarrow G$  nem tartalmazza  $K_5$  és  $K_{3,3}$  egyik felosztását sem.  
(részigrafként).

(2.)



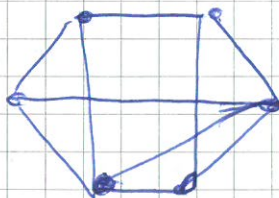
$K_{3,3}$ -at tartalmazza.



extra csúcsokkal.

Igy a Petersen-gráf nem síkgráf.

(HF.)



Síkgráf-e?

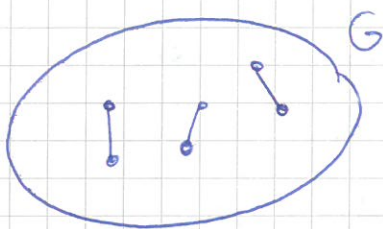
(8.)

Négysejtétel: Minden (heurisztikus) síkgráf jól síkvezethető 4

sínnal  $\Rightarrow$  Tehát ha  $G$  síkgráf  $\Rightarrow \chi(G) \leq 4$ .

## Párosítások

Def.: Az  $M \subseteq E(G)$  elhalmaz párosítás  $G$ -ben, ha  $M$ -ben nincs heurisztika és semelyik két  $M$ -beli élhez nincs közös végpontja.



~~tiltott!~~

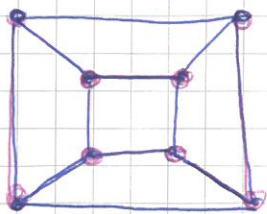
Az  $M$ -beli él végpontjainak halmazát  $V(M)$ -el jelöljük.

Megj.:  $2|M| = |V(M)|$ .

↓ párosított pontok halmaza

Def.: Az  $M$  párosítás teljes, ha  $V(M) = V(G)$ , azaz  $M$  a  $G$  minden pontját párosítja.

Teljes párosítás a közelemben:



legnagyobb van ilyen

a Petersen-gráfban is.

Def.:  $\chi(G) = \max \{ |M| : M \text{ párosítás} \} \leftarrow$  legnagyobb elérhető párosítás elemszáma.

Megj.:  $\chi(G) \leq \frac{|V(G)|}{2}$ , mert  $|V(M)| = 2|M| \leq |V(G)|$ .

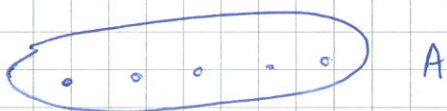
Eggenlőség: van teljes párosítás  $G$ -ben.

Ez csak páros pontszám esetén lehetséges

Párosítások páros gráfokban: Legyen  $G$  egy páros gráf  $A, F$  osztályokkal



$F$



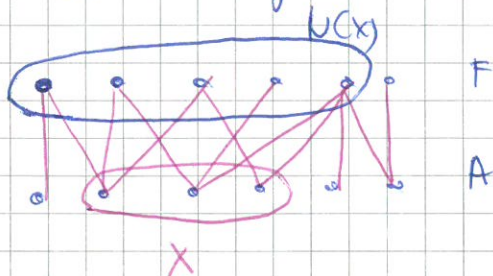
$A$

mivel minden  $M$  párosításban az élnek 1 alsó és 1 felső pontot használunk, ezért minden párosítás legfeljebb  $|A|$  él tartalmazhat.

$$\nu(G) \leq |A| \text{ és persze } \nu(G) \leq |F|.$$

Ha  $\nu(G) = |A| \Rightarrow A$  minden pontját párosítja  $M$ . Ha  $\exists$  ilyen  $G$ -ben  
Ez az  $A$ -t lefedő párosítás.

Definíció: Az  $X \subseteq A$  pontthalmaz szomszédsága:  $N(X) := \{v \in F : v$   
össze van kötve valamely  $X$ -beli ponnal}. (Az  $X$ -beli pontok szomszédságainak uniója).



lehet olyan, hogy az  
 $N(X)$  szűkebb,  
mint az  $X$ .

$\Uparrow$   
Ha találunk olyan  
 $X \subseteq A$  halmazt, hogy

$N(X) < X \Rightarrow$  nincs olyan  
párosítás, amely  $X$  minden pontját párosítja,  
hiszen  $X$ -beli pontok páryai  $N(X)$ -ből kerülhetnek ki.

Előre marad párosítatlan pont  $x$ -ből ( $A$ -ból). Minden párosítás esetén

Elnevezés: Az  $x \in A$  pontnak König-azadály, ha

$$|N(x)| < |x|. \quad \uparrow \text{König Dénesről.}$$

(T:)  $G$  egy páros gráf,  $A, F$  osztályokkal.

a) König-Hall-tétel:  $G$ -ben létezik  $A$ -t lefedő párosítás

$$\Leftrightarrow G\text{-ben nincs König-azadály, azaz } \forall x \in A: |N(x)| \geq |x|.$$

b) König-Frobenius-tétel:  $G$ -ben létezik teljes párosítás

$$\Leftrightarrow |A| = |F| \text{ és } G\text{-ben nincs König-azadály, azaz}$$

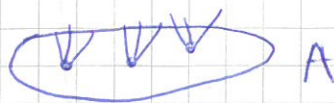
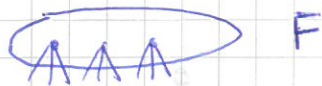
$$\forall x \in A: |N(x)| \geq |x|.$$

Jöjjön egy példa.

( $d > 0$ )

Ha egy  $G$  páros gráf minden pont foka  $d$  ( $\equiv G$   $d$ -reguláris),  
akkor  $G$ -ben van teljes párosítás.

Biz:



König-Frob-tétel

feltételeit ellenőriznünk.

$$1.) |A| \stackrel{?}{=} |F|$$

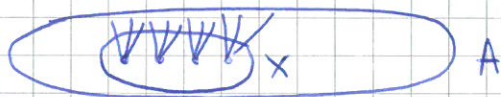
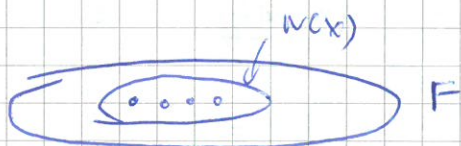
Igaz, mert az  $A$ -beli  
fokösszeg  $= F$ -beli

fokösszeg.

$$|A| \cdot d = |F| \cdot d$$

$$|A| = |F|.$$

2)  $\forall x \subseteq A : |N(x)| \geq |x|$  ?  $\neq 1$  pont



Megnézzük az  $x$  és az

$N(x)$  közötti kapcsolatot.

- egyrészt:  $|x| \cdot d$

- másrészt:  $|N(x)| \cdot d$  LEGFELJEBB,

mert  $\forall N(x)$ -beli pontnak  $d$  a foka, így  $x$ -be legfeljebb  $d$  él vezet.

Tehát:  $|x| \cdot d \stackrel{\text{egyenl.}}{=} \boxed{\phantom{000}} \stackrel{\text{másként}}{\leq} |N(x)| \cdot d \quad / : d$

$|x| \leq |N(x)|$   $\square$

Ramsey - elmélet:

Feladat: 6 ember között mindig van 3, akik vagy kölcsönösen

ismerik egymást, vagy kölcsönösen nem ismerik egymást.

Biz.:

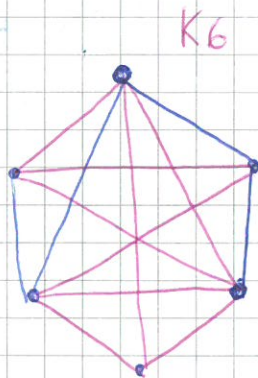
gráfelméleti nyelven:

- ismerik egymást;
- nem ismerik egymást.

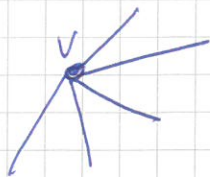
Bármely szubsztéma pirossal és kékkel

$K_6$  élket, kiadatul egyszerű

kapcsolat. (3 pontot kell). Ezt kell belátni.



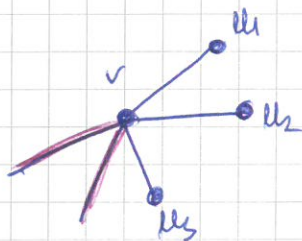
Biz: Tekintsünk egy tetszőleges piros-kék elszínezett  $K_6$ -ot.  
 Tekintsünk egy tetszőleges csúcsot.



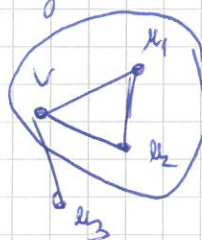
$v$ -ből 5 él indul, ezeken az éleken a többször előforduló szín legalább 3-szor fordul elő.

Nézzünk 3 egy színi,  $v$ -ből induló élt:

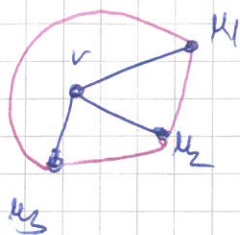
legyenek ezek végpontjai:  $u_1, u_2, u_3$



Ha  $u_1, u_2$  és  $u_3$  pontok között van legalább két él, akkor  $v$ -vel együtt kialakul egy kék háromszög.



Ha az  $u_1, u_2, u_3$  pontok között az összes él piros, akkor csak egy piros háromszög alakulhat.



Ramsey-tétel: Tetszőleges  $k$  számhoz  $\exists$  olyan  $k$ -tól függő

$N$  szám, hogy az  $N$ -pontú teljes gráf összes piros-kék elszínezésében megjelenik  $k$ -pontú egy színű klikk.

Megj:  $N = 4^2$  jé. Pontosabb nem ismét.

(RF:) Van-e teljes párosítás az alábbi gráfban?

