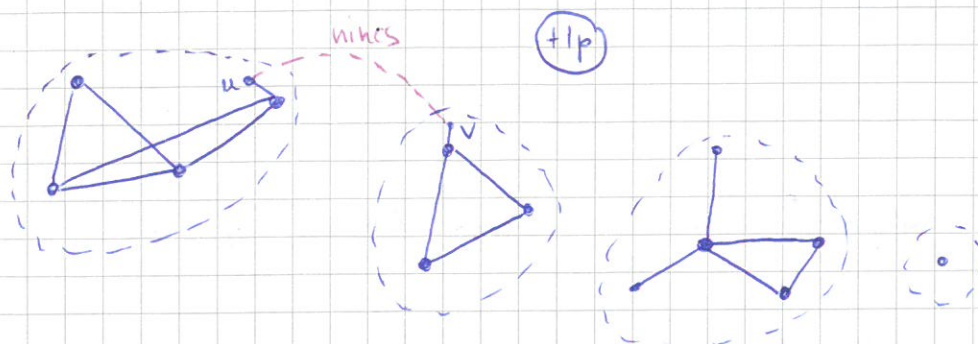




gráf komponensei.

Állítás: a komponensek összefüggő gráfok, 2 komponens között nem halad el.

Következmény: V gráf egyértelműen áll össze összefüggő gráfok csúcsdiszjunkt uniójaként.

Biz: Két osztály között nincs el.

Ha $\exists uv$ él úgy, hogy u és v külön osztályok esnek (ahol u nem áll rendelkezésre v -vel), akkor meg kell bizonyítani, hogy $u \sim v$, hiszen ez uv él egy uv -sétát is ad. $\square$ Ellentmondás.

Térvezünk egy tetszőleges $G|_{H_i}$ komponensét:



$x, y \in H_i$

$x \sim y$ (egy osztályban vannak)

$\Downarrow$

$\exists xy$ -séta, és ez a séta H_i -n belül halad

(tehát a séta séta a $G|_{H_i}$ komponensben)

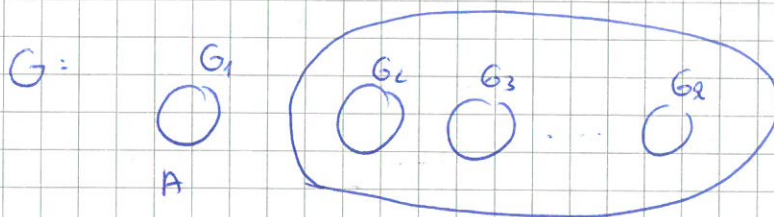
Nincs H_i -t elhagyó él a fenti elcsúsz.

$G|_{H_i}$ összefüggő. $\square$

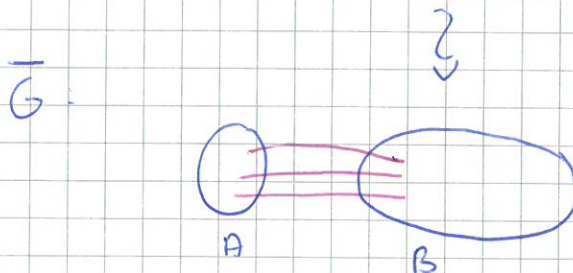
23) Ha G összeruggó: ok. ✓

Tfh G nem összeruggó. $\Leftrightarrow$ 1-nél több komponense van.

G -nek tehát ≥ 2 komponense van: $G_1, G_2, \dots, G_r$



$$B = G_2 \cup G_3 \cup \dots \cup G_r$$



$\bar{G}$ -ben A összeruggó pontja
össze van kötve B összes
pontjával.

$\bar{G}$ összeruggó.

HF: 26

sejtes: komponensek
fokszámosság

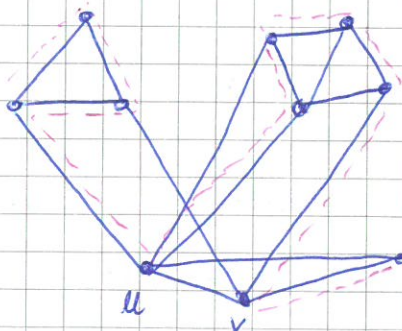
$$x \in A, y \in B \Rightarrow \exists xy\text{-élek} (xy \in E)$$

$$xy \in A \Rightarrow \text{egy } B \text{ belé pont közelebb kerülhet}$$

$$\exists 2 \text{ hosszú } xy\text{-élek}$$

$$x, y \in B \Rightarrow \text{Hasonlóan.} \quad \square$$

59. G_n



Hamilton-út van.

Sejtes: Hamilton-kör nincs

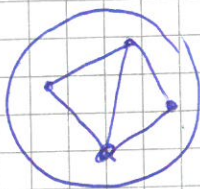
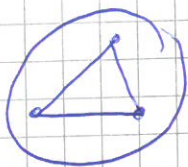
$n=10 \Rightarrow$ a Dirac-tétel nem alkalmazható.

Allítás: Ha G gráfbel el lehet ugozni 2 pontot (vndf 2 -ra),

2

hogy az elhagyás után kapott gráfok legalább $(k+1)$ komponense lesz,
 akkor G -ben nincs Hamilton-kör.

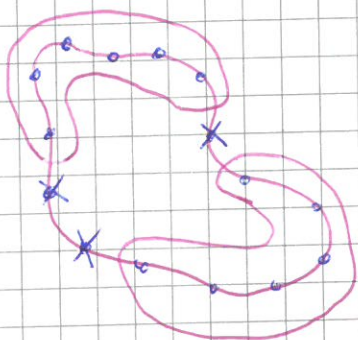
Most: $k=2$ -re az u, v -t elhagyva:



$\leadsto 3$ komponens

$3 = k+1 \Rightarrow G_k$ -ben
 nincs Hamilton-kör.

Allítás bizonyítása:



Ha G -ben van egy C Hamilton-kör,
 akkor tetszőlegesen k csúcsot elhagyva C
 legfeljebb k db "körívre" esik szét,
 és a kapott gráfban $=$ körívek
 egy-egy komponenset alkotnak, a további élük
 csak összekapcsolhatja őket, így a
 kapott $\tilde{G}$ gráf legfeljebb k -komponensű.

Analog módon: Ha egy G gráfból k pontot elhagyva a
 gráf legalább $k+2$ komponensre esik szét, akkor G -ben
 nincs Hamilton-út.

HF: 59 / G_3

☐

FAK.

Def: Egy G gráf fa, ha összefüggő és körmentes

(pl.)



Fák ekvivalens definíciói: A következők ekvivalensek.

- a) G összefüggő és körmentes;
- b) G összefüggő, de bármely élét elhagyva már nem az;
- c) G körmentes, de bármely élét hozzáadva már nem az.
tetszőleges

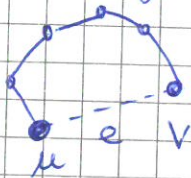
Maximális körmentes / minimális összefüggő.

Biz.: $a \Rightarrow b)$ Tfh G összefüggő és körmentes.

Ellen: G összefüggő. ✓ Kell még:

$\forall e \in E(G)$ -re $G - e$ nem összefüggő

e: uv él, tetszőleges.



$G - e$ nem összefüggő, mert

$(G - e)$ -ben nincs uv út

mert egy ilyen út az e

éssel együtt egy kört kapunk

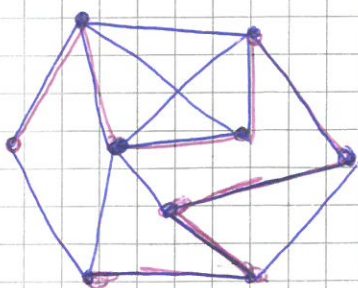
G -ben, de G körmentes

□

Def: Lesutfaja: olyan lesutfé gráf, ami fa.

Állítás: Minden összefüggő gráfnak van lesutfája.

pelda



ilyen

Bizonyítsuk be. Az adott gráf elemeit elhagyogatásával lehetséges

Ha $\exists$ olyan e él G -ben, hogy $G-e$ összefüggő, akkor hagyjuk el e -t.

Ha $(G-e)$ -ben $\exists$ olyan f él, hogy $((G-e)-f)$ összefüggő, akkor hagyjuk el f -et.

⋮

Folytatjuk, amíg találunk olyan élt, amit el tudunk hagyni az összefüggőség megtartásával.

Igy kapunk: F részgráfot. F összefüggő, de bolyt élt elhagyva már nem az $\Leftrightarrow$ d) pont miatt F fa,

⊕ F feszítő részgráfja G -nek, mert csak éltet hagytunk el.

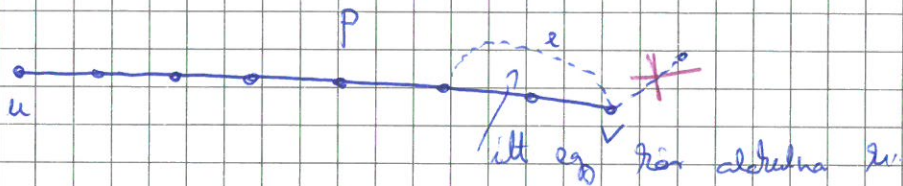
Tehát F feszítőfája G -nek

Def: A fa elsőfokú csúcsait leveleknek nevezzük.

All: Minden legalább 2 pontú fának van levele.

Biz: Vegyünk egy olyan utat a fában, amit már nem lehet meghosszabbítani.

Legyen ez P . Azt állítjuk, hogy ennyi a két végpontja levél a fában.



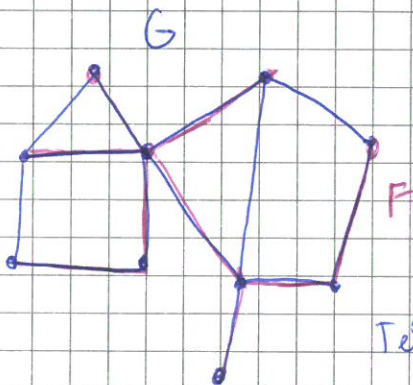
• v -ből nem vezet el P -n kívüli pontba.

• v -ből nem vezet (e-t leszámítva) el P valamilyen pontjába se.

$\Rightarrow$ Ekkor kialakulna egy kör a gráfban, de ez fa, ami kizárható



5. feladat



vegyünk fel egy feszítőfát.

Kiagyúztuk a leveleket.

Teljesítjük a gráf egy F feszítőfáját.

(Van, mert G összefüggő)

Legyen v F egy levele.

v -t elhagyva az eredeti gráfból a

kapott gráf összefüggő lesz, mert

$F-v$ elei biztosítja az összefüggőséget.

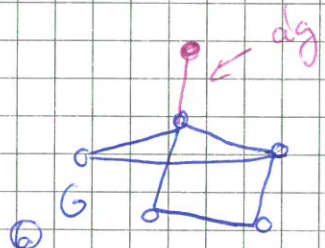
$\uparrow$
 F_v , mert F_v levélét elhagyva fát

kapunk.



Def.: Aghajtás operáció.

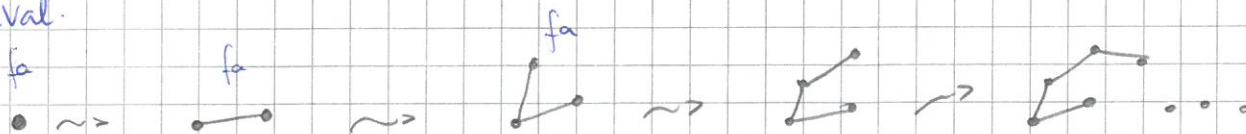
Adott egy G gráf.



felvesszük egy új
csúcsot és össze-
kapjuk G pontjain
1 csúcsával

Fa-strukturátétel:

Egy T gráf akkor és csak akkor fa, ha felépíthető (megrajzolható) az 1 pontú él nélküli gráfból dghajtás-operációk egymásutánjával.



Bizonyítás:

$\Leftarrow$ Tfh + felépíthető dghajtschál.

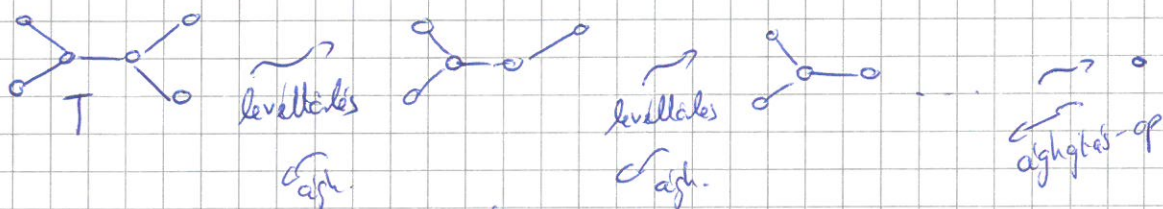
A folyamatban az fa-tulajdonság öröklődik.

Elér T fa, ami abból következik, hogy fára alkalmazva az dghajtás-operációt fat kapunk.

Ez könnyen ellenőrizhető.

⊕ a kezdő gráf fa, így a fa-tulajdonság „balról-jobbra” öröklődik.

$\Rightarrow$ Legyen T egy fa.



T -nek van levele, töröljük és így tovább.

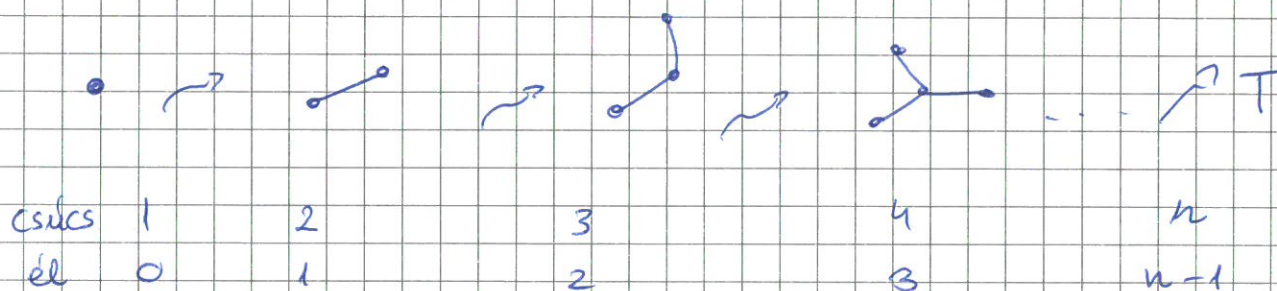
Lemma: a fa egy levelet törölve fat kapunk.

Eljutunk az 1-pontú fáig.

Ezt a folyamatot visszafelé olvasva T egy dghajtásos felépítését kapjuk.

KÖVETKEZMÉNY: Egy n -pontú fa $(n-1)$ levele van.

Biz.: Építjük fel az n pontú T fát.



Kérdésben 1-gyel kevesebb (0) él van, mint csúcs. Az előadás operáció
egyel növeli a csúcsok és az élek számát is, így az a bebiz-
tosít megmarad a felépítés összes gráfjára, így T -re is. $\square$

H/F: 3. a 4. feladatból

- felszámolás kell $\rightarrow$ először

(+p)

↑
hogy él kell!