

2018.04.20.

3. tanultaid

Kombinatorika

Egyszerű gráf:

$$G = (V, E)$$

↑
véges halmaz

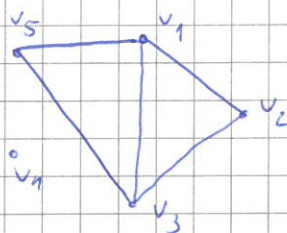
V bizonyos hétéleni részhalmaza.

Pl.:

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$$

$$E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\}, \{v_4, v_5\}\}$$

A gráf szemléltetése:



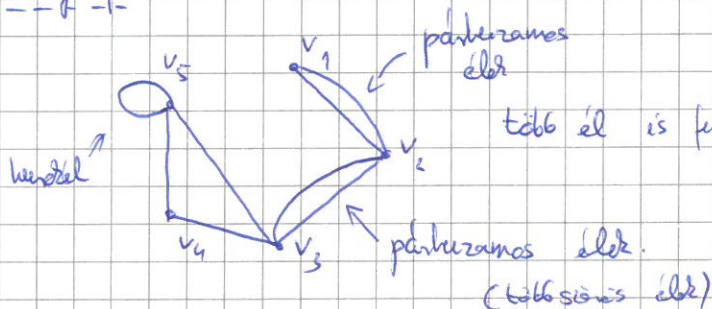
égy

$\{u, v\} \in E$ helyett azt írjuk:

$uv \in E$ és azt mondjuk,

hogy u és v szomszédos / összekötött.

Általános gráf:



több él is lehet két végpont között.

(többszörös élek)

$\forall$ egyszerű gráf felírható általános gráfnak is.

Észrevétel: A G gráf egyszerű $\Leftrightarrow$ nincs benne sem hurok, sem párhuzamos él.

Gráfok alkalmazásai:

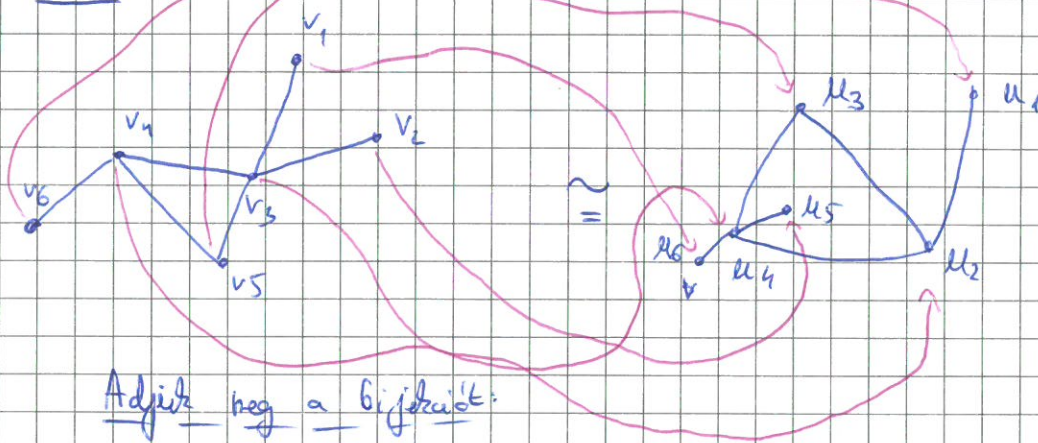
- úthálózatok;
- kémiai molekulák (csúcs: atom, él: kötés);
- barátságok, ismeretségek (csúcs: ember);
- számítógépes algoritmusok.

Izomorfia:

$$\begin{matrix} V(G): & G & \text{csúcselhelyezése} \\ V(H): & H & \text{---''---} \end{matrix}$$

①

Példa:



Egy rajzolható
meg.

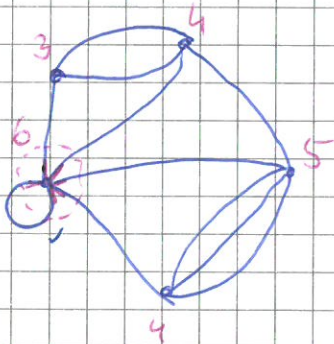
Adjuk meg a bijekciót:

$v_5 \mapsto u_3$
 $v_4 \mapsto u_2$
 $v_6 \mapsto u_1$
 $v_1 \mapsto u_6$
 $v_2 \mapsto u_5$
 $v_3 \mapsto u_4$

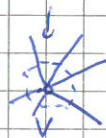
Egy adható meg a bijektív leképezés

Egy α gráfizomorfizmus volt ez.

Fokszám:



v csúcs fokszáma: 6



$d(v) = 2 \cdot (\text{v-ne illeszkedő
undírtolt száma}) +$
 $1 \cdot (\text{v-ne illeszkedő
reundírtolt száma})$

Ha G egyszerű: a fokszám = szomszédok száma

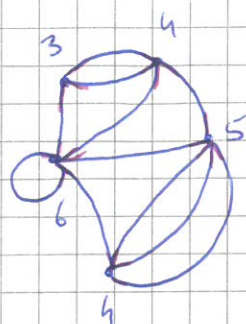
Fokszám $\equiv$ csúcsból induló élvégek száma

(T:) Tetszőlegesen G gráfban: $\underbrace{\text{élk számának kétszerese}}$

$$\underbrace{\sum_{v \in V(G)} d(v)}_{\text{fokszámok összege}} = 2 \cdot |E(G)|$$

Bizonyítás:

Biz: Mindkét oldal a G graf élvégeit számolja meg:



$$3 + 4 + 5 + 4 + 6 + 6 = 29$$

jobb oldal: V élnek két vége van.

Bal oldal: csúcsokként csoportosítva számol. (egy v csúcsra $d(v)$ élvége illeszkedik) $\square$

gyakorlat jön.

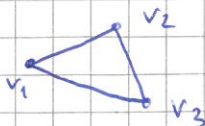
① Fokszámszorzat: $4 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 5 = 29$

Nem páros szám $\Rightarrow$ nem lehet.

$\forall$ grafban a fokszámszorzat összege páros.

② $1, 1, 1, 3, 3, 5$ $\neq$ csúcsok száma

~~$3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 5 = 3 + 6 + 5 = 14$~~ páros.



Art jelöli, hogy van 2 csúcsok, ahol a fokszám megegyezik.

$\downarrow$ ismételtes gráf

$\equiv$ Minden legalább 2 pontú egyszerű grafban van két azonos fokszámú csúcs.

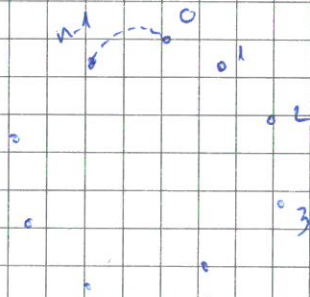
Legyen G tetszőleges n -pontú egyszerű graf, $n \geq 2$.

Mi lehet egy csúcs fokrátma? Gondoljék meg!

0, 1, 2, ..., n-1. (n lehetőség)

Indirect feltétel: G minden fokrátma különböző, azaz n-fokú fokrátma jelenik meg a gráfban.

Ez azt jelenti, hogy G fokrátmsorozata: 0, 1, 2, ..., n-1



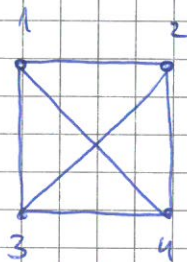
Ez nem lehetséges, mert az n-1 fokú csúcs minden más csúccsal össze lenne

ketve, de a 0 csúcsba nem vezetnek

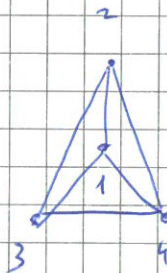
el. $\square$

Mege: a gráfizomorfia ekvivalenciareláció!

(32.)

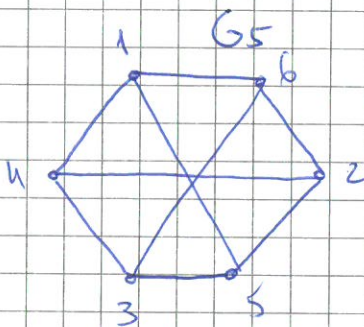


$\cong$

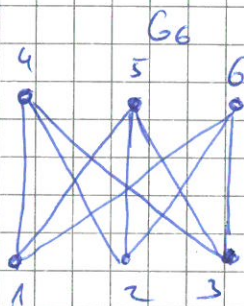


ábrák = izomorfizmus
izomorf.

$G_1 \cong G_2$, csúcsszám nem egyezik



$\cong$



G_6 sem izomorf

G_7 -tel TRANSZITIVITA

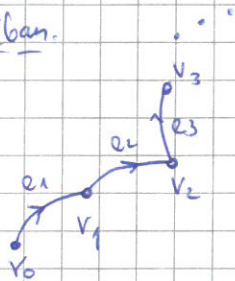
G_5 nem izomorf G_7 -el, mert

G_7 -ben van három hosszú kör, de G_5 -ben

(4)

nincs. Nem izomorf.

Séta a gráfban.



egy-egy csúcs és el többször, szabadon érintkezik.

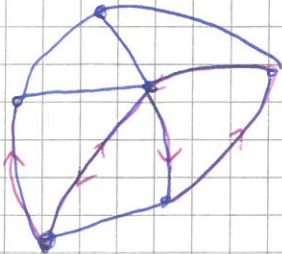


Fig. A séta lehet nulla hosszú is.

v_0 egy csomópontból áll.

Az $S = v_0, e_1, v_1, \dots, e_k, v_k$ séta végpontjai:

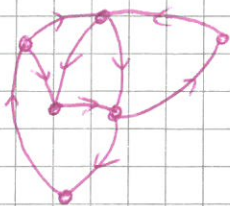
v_0 és v_k

Azt is írjuk, hogy S egy $v_0 v_k$ -séta (v_0 -ból v_k -ba)

Def.: A feletti S séta zárt, ha $v_0 = v_k$

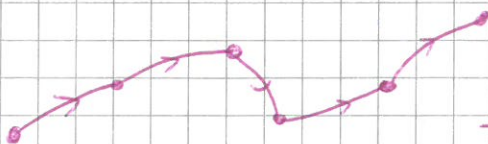
A feletti S séta nyílt, ha $v_0 \neq v_k$.

Vonal: Élisiméltós nyílt séta.



ez például egy vonal.
pontisméltós lehet.

Ut: Se élisiméltós, se csúcsisméltós nem tekinthetünk benne.



P. ut.

All: Ha S ut, akkor

S vonal és S séta.

FORDITVA nem IGAZ

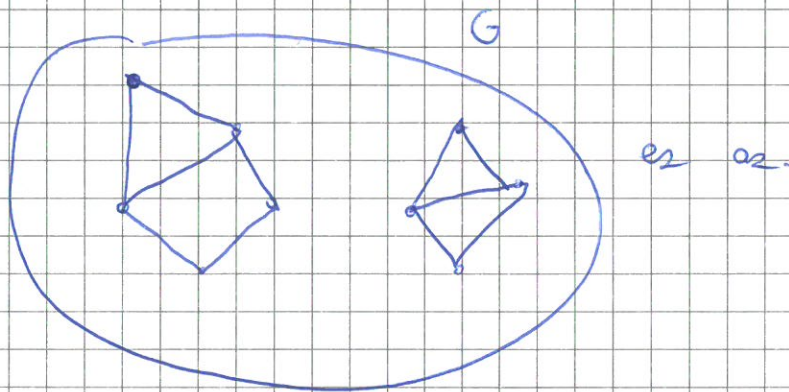
Def.: G gráf összefüggő, ha bármely 2 pontja között létezik séta.

Azaz $\forall x, y \in V(G) \exists xy\text{-séta } G\text{-ben.}$

Azaz G összefüggő, ha bármely csúcsból bármely másikba el lehet jutni
elérhetően haladva.

Példa: 32. feladat gráfjai összefüggők.

Eg. nem összefüggő gráf:

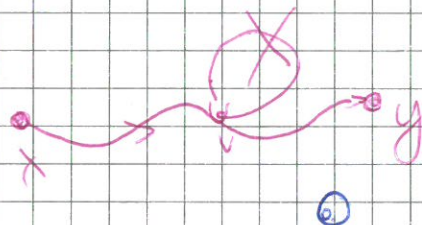


Feladat: G egy gráf, $x, y \in V(G)$

$\exists xy\text{-séta } G\text{-ben} \Leftrightarrow \exists xy\text{ út } G\text{-ben.}$

Biz.: $\Leftarrow$ triviális, minden út séta.

$\Rightarrow$: Vegyünk egy legrövidebb xy -sétát. Legyen ez S . Ez az S
egy út, mert ha lenne benne csúcsismétlés, pl. a v csúcsot
többször is érintené, akkor v csúcs első és második érintése
közötti sétaszeletet kivágva S -ből egy rövidebb séta
kapható.



Következő: Az összefüggőség definíciójában a séta sík lecsatolására.

Számítás: $IZOLÁLT\ csúcs \equiv 0\ fokú\ csúcs.$

Euler-vonal:

Def: Egy γ vonal Euler-vonal a G gráfban, ha γ $\forall$ élen (pontosan) egyszer halad át, továbbá $\forall$ csúcsot meglátogat.

$\uparrow$ ha nincs izolált csúcs, akkor ez a tételből következik.

Az Euler-vonal is lehet nyílt vagy zárt, attól függően, hogy mit séta, zárt-e.

Itten most vezetés van, lesz. $\square$

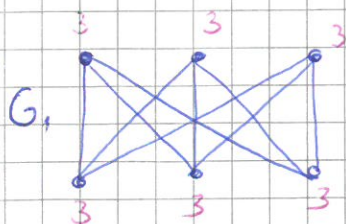
Váratlanul: az Euler-vonal az egy csúcspárosítás népszerű leírását felel meg a gráfnak.

Euler-tétel: vezetés.

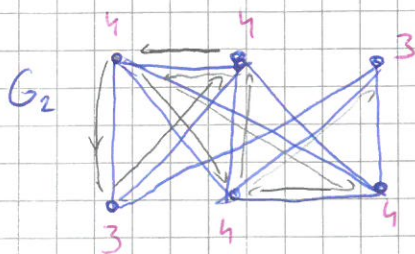
nyílt Euler-vonal mindig az egyik páratlan fokú csúcsból indul és a másikban végződik

feladat:

(34.)



nincs G_1 -ben Euler-vonal.
nem párosak a fokok, és
nincs két páratlan (pontosan).

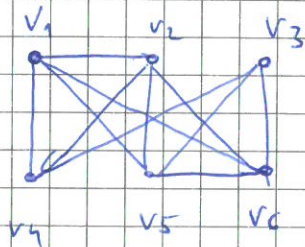


G_2 összefüggő, látszik, hogy a 6. és 7. csúcsból minden nyílt Euler-vonal van.

(Zárt vna).

+2 páratlan fokú csúcsa van.

(7)



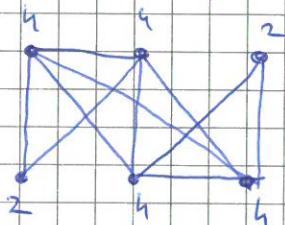
példa:

$v_3 v_4 v_1 v_5 v_2 v_1 v_6 v_3 v_5 v_6 v_2 v_3$

→

égg.

(G₃)

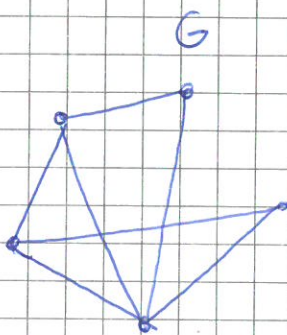


összefüggő, minden foka páros

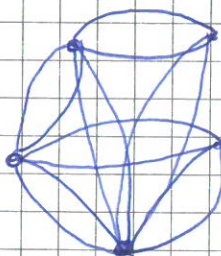
⇒ Zárt Euler-vonal van.

A megadást lespóroljuk.

(28)



~



Az összefüggő

G gráfból

kesztünk

G^* -t úgy, hogy

G minden élét megduplázzuk.

Ez a G^* gráf összefüggő (G is az volt) +

minden csúcsának foka páros, az eredeti fokaik kétszerese.

⇓

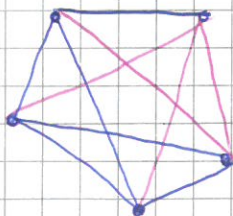
Euler-tétel miatt G^* -ban zárt Euler-vonal van

Ezt az Euler-vonalat G-ben visszavetítve egy zárt sékát kapunk.

(8)

A G egészű gráf komplemente az a $\bar{G}$ -vel jelölt ~~komplement~~ gráf,
 amelyre $V(\bar{G}) = V(G)$ csúcsalmaz egyezős, továbbá $xy \in E(\bar{G})$ akkor,
 ha $xy \notin E(G)$.

G



$\leadsto$

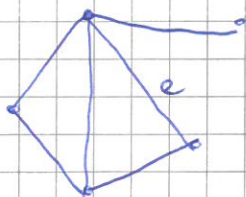
$\bar{G}$



az itt is K_5 .

A teljes gráf olyan n csúcsú gráf, amelyben bármely két pont össze-
 kötött.
 Jele: K_n n -pontú teljes gráf.

csúcselhagyás, élelhagyás:



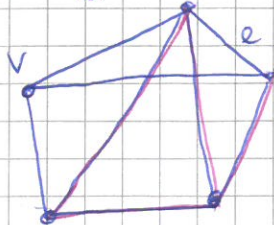
$\leadsto$
 e él törlése



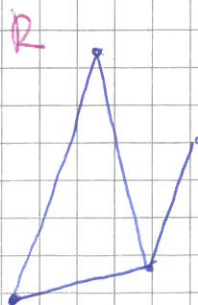
törölhető a csúcs is, vele együtt természetesen találhat az élei is.

Résgráf: csúcsok és élek elhagyásával megszerezhető.

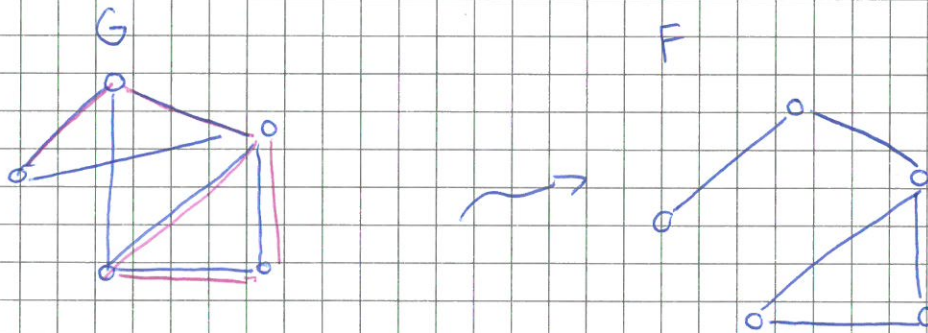
G



$\leadsto$
 v pont és
 e él
 törlése



Fesztő részgráf: csak élét lehet meghabozni.



F feszítő részgráfja G -nek.

F -ben ugyan sokat lehet izolált csúcs is,

$V(G) = V(F)$ lesz igaz. Egyező csúcselhelyezés.

Feszített részgráf: csak csúcsokat lehet kiválasztani.
Élét „szőlő magában” NEM!



$\forall$ feszített részgráf $G|_F$ (G megszártása F -re) előeli, ahol

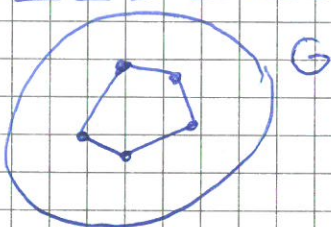
F pontelhelyezése részelhelyezése G pontelhelyezésének, továbbá $G|_F$

előeli pontosan azok, amelyek G -beni előeli. Alternatív definíció:

Képz: $G|_H$ esetén igaz, ahol $H = \bigcup_{v \in V} (F_v)$

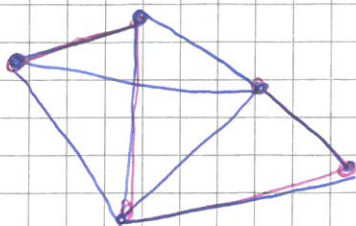
Hamilton - út, Hamilton - kör:

Kör:



legalább 1 hessze, nincs benne se csúcs, se élismétlés.

Hamilton-út: olyan út, amely a gráf összes csúcsán áthalad.



a piros egy Hamilton-út.

Hamilton-kör: olyan kör, amely tartalmazza az összes csúcsot.

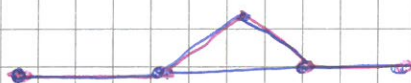
Hamilton-kör: nem ismételt (sejtés szerint nincs is) egy speciális tétel

(ilyen: $\Rightarrow$, akkor és csak akkor) az "egyszerű" algoritmus annak eldöntésére, hogy egy gráfban van-e Hamilton-kör.

Eszrevétel: Ha van Hamilton-kör, akkor van Hamilton-út is.

(Hozzájárul az egy kör egy belső kör Hamilton-köréhez).

$\Leftarrow$, például:



Van Hamilton-út, nincs Hamilton-kör.

(pl: az 1-fokú csúcsok miatt).

Dirac-tétel: Ha egy n pontú G egyszerű gráfban $\forall$ csúcs foka

legalább a csúcsszám fele $\left(\frac{n}{2}\right)$, akkor és $n \geq 3$, akkor G -ben

van Hamilton-kör.

(HF: 65) Dirac-tétel feltételeit kell ellenőrizni

$$\left(\begin{matrix} [16] \\ 3 \end{matrix}\right) = \{1, 2, \dots, 16\} \text{ valamely 3- elemű részhalmaza}$$

Legyen G egy gráf. A $V(G)$ csúcshalmazon definiálunk egy $\sim$ -relációt.

$$u \sim v \stackrel{\text{def}}{\Rightarrow} \exists \text{ } uv\text{-séta } G \text{ -ben.}$$

Tehát u -ból vezet séta v -be.

Állítás: $\sim$ ekvivalenciareláció.

$u \sim u$ reflexív

$u \sim v \Rightarrow v \sim u$ szimmetrikus

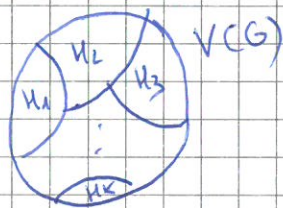
$u \sim v \wedge v \sim w \Rightarrow u \sim w$ tranzitív

$\Uparrow$ u -ból vezet séta v -ba

v -ból u -ba

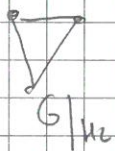
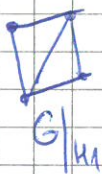
Fűzzük össze

Legyen a $\sim$ ekvivalenciareláció osztályai: $H_1, H_2, \dots, H_k$.



Def: A $G|_{H_1}, G|_{H_2}, \dots, G|_{H_k}$

gráfokat nevezzük G komponenseinek.



ilyen osztályok lesznek