

2018. 04. 13.

2. Permutációk

Kombinatorika

Sorbadrendezés, átrendezés

más néven: permutációk

Def: A H (véges) halmaz sorbadrendezésén egy olyan H elemeiből álló,

$|H|$ hosszú sorozatot értünk, amelyben H minden eleme pontosan egyszer szerepel.

(pl.): $A H = \{a, b, c\}$ sorbadrendezései:

$abc, acb, bac, bca, cab, cba$

Sorozat (n hosszú): $[n] \rightarrow \mathbb{R}$ leképezés függvény. H elemeiből áll
lehet más is, pl. H .

$1 \mapsto a$	$1 \mapsto a$	$1 \mapsto b$	$1 \mapsto b$	$1 \mapsto c$
$2 \mapsto b$	$2 \mapsto c$	$2 \mapsto a$	$2 \mapsto c$	$2 \mapsto a$
$3 \mapsto c$	$3 \mapsto b$	$3 \mapsto c$	$3 \mapsto a$	$3 \mapsto b$

$1 \mapsto c$
 $2 \mapsto b$
 $3 \mapsto a$

Alternatív definíció: Egy n elemű H halmaz sorbadrendezésén

egy $[n] \mapsto H$ bijekciót értünk.

Tétel: Egy n elemű halmazhoz $n!$ db sorbadrendezés van.

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n.$$

Bizonyítás: Elég $[n]$ -re ezt belátni:

n -szintű indukcióval: $n=1$

"1" $1! = 1$ db sorbadrendezés

$(n-1) \Rightarrow n$. Osztályozzuk $[n]$ sorbadrendezéseit aszerint,

hogy hol áll a legnagyobb (n) elem.

1. helyen, 2. helyen, $\dots$, n -helyen.

$\uparrow$
 $(n-1)!$ felteppén tehát szába a maradék, ha n a
2. helyen fixre le van kötve.

Számból van $(n-1)!$, mit $\nearrow$ ezért.

Induktív feltevés: ebből van $(n-1)!$ db. Tehát.

$$\Rightarrow \text{összesen: } \underbrace{(n-1)! + (n-1)! + (n-1)! \dots + (n-1)!}_{n \text{ tag volt}} = n \cdot (n-1)! = n! \quad \square$$

feladat: $[n]$ sorbaállításeinak halmazát S_n -nel jelöljük

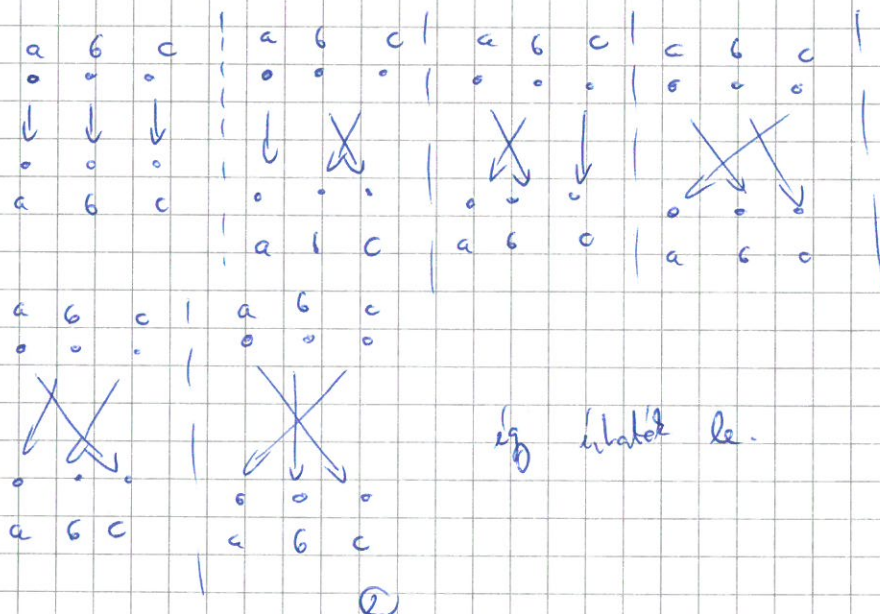
$$S_n = \{ [n] \mapsto [n] \text{ bijekciók} \} \text{ ennyike.}$$

$$|S_n| = n!$$

Def.: A H véges halmazra def. az átrendezést (permutációt):

eg $H \mapsto H$ bijekció értéke

(pl.!) $H = \{a, b, c\}$



eg lehet le.

Tétel: Egy n elemű halmaznak $n!$ darab átrendezése (perm.) van.

(Biz.): Elég $[n]$ -re bizonyítani.

$[n]$ halmaz átrendezései $\equiv [n] \mapsto [n]$ bijekciók $\equiv$
 $\equiv [n]$ sorbadolításai. Ezek S_n elemei.

Látuk: ezekből $n!$ darab van. $\square$

Megjegyzés: S_n elemeire ($[n] \mapsto [n]$ bijekcióira) tekintetük átrendezések és sorbadolítások is.

Átrendezésről más szemléltetése:

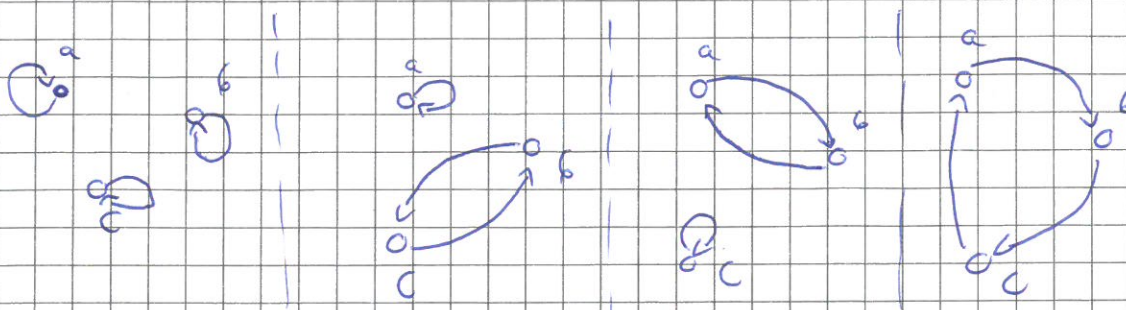
Egy $\varphi: H \mapsto H$ bijekció (H egy átrendezése) diagramján a

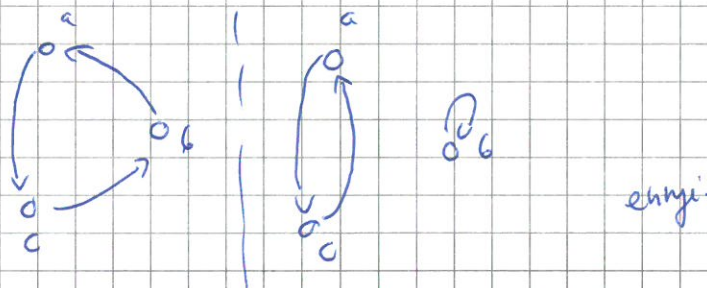
rendezés ábrát látjuk:

- H $\forall$ eleméhez felveszünk egy "szarítót";
 $h \in H \rightarrow \bullet^h$

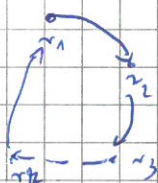
- További $\forall h \in H$ -ra a $\bullet^h$ -ből induljon el egy $\varphi(h)$ -ban végződő nyíl.

(pl) $H = \{a, b, c\}$ átrendezései diagramon.





Def.: A $\varphi: H \rightarrow H$ bijekción (átrendezés)-ben az $R = \{r_1, r_2, \dots, r_k\} \subseteq H$ elemek ciklust alkotnak, ha $\varphi(r_1) = r_2, \varphi(r_2) = r_3, \varphi(r_3) = r_4, \dots, \varphi(r_{k-1}) = r_k$ és $\varphi(r_k) = r_1$.



Megj.: A ciklus egy irányított „kör”-nek felel meg φ diagramjában.

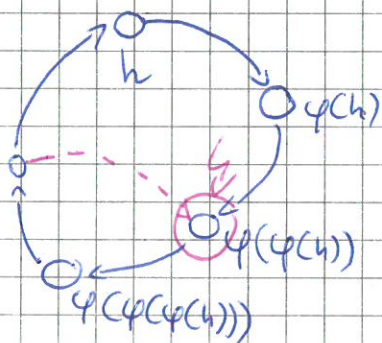
A ciklus hossza k . (a fenti definícióban). 1 hosszúságú is lehet a ciklus.

Tétel: Minden átrendezés (permutáció) páronként diszjunkt (idegen) ciklusokra bontat fel egyértelmű módon.

Biz: Tekintsük $\varphi: H \rightarrow H$ bijekció diagramját.

- $\forall a$ -ból pontosan 1 nyíl indul ki (φ függvény)
- $\forall a$ -ba pontosan 1 nyíl jut be (φ bijekció)

Tekintsük egy $h \in H$ elemet és kövessük a nyílat h -ból kiindulva a grafikonban.



mivel H -ban véges sok elem van, előbb-utóbb már bejártunk oda, ahova eljöttünk. Tekintsük az első ilyen pillanatot!

Csak a kezdő 0-ba léphetünk így vissza, mert más feladatokban lenne olyan 0, melybe 1-nél több nyíl fut be. (lásd ábra).

Találunk egy C ciklust.

Ha nincs több elem $\rightarrow$ készen vagyunk. Az egész egy ciklusból áll.

Ha van több elem, akkor azokra is megcsináljuk. Ottan már a régi ciklusba nem kerülhetünk vissza.

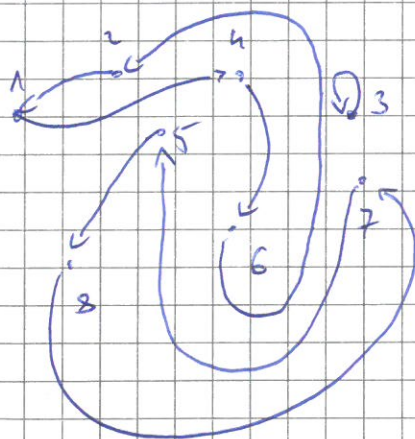
(C-be és C-ből más nyíl már nem indulhat, nem futhat), megkapjuk a ciklusok bontását.



(16.)

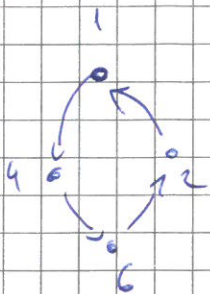
egy ciklus

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 1 & 3 & 6 & 8 & 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

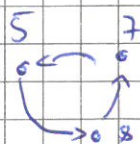


(3) , $(1\ 7\ 6\ 2)$, $(5\ 8\ 7)$

3 db ciklus van.



ennyire.



egy kétféleképpen.

Multihalmazok sorbaállítása (ismétléses permutáció):

Def: A H feletti M multihalmaz sorbaállításán egy olyan

$|M|$ hosszú sorozatot értünk (H elemeiből állót), amelyben $\forall h \in H$
elem $M(h)$ -szor szerepel.

↑ ahány-szor M -ben szerepel.

pl.) $H = \{a, b, c\}$ $M = \{a, a, a, a, b, b, c, c\}$

egy sorbaállítás: $baabaaacc$

Középiskola: Az H feletti M multihalmaznak sorbaállít-

ásának száma:
$$\frac{|M|!}{M(h_1)! \cdot M(h_2)! \cdot \dots \cdot M(h_k)!}$$

Trinomiális tétel:
$$(x+y+z)^n = \sum_{i+j+k=n} \frac{n!}{i!j!k!} x^i y^j z^k$$

 $i, j, k \in \mathbb{N}$

Multinomiális (polinomiális) tétel:

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_d)^n = \sum_{\substack{z_1, z_2, \dots, z_d \\ z_1 + z_2 + \dots + z_d = n}} \frac{n!}{z_1! z_2! \dots z_d!} x_1^{z_1} x_2^{z_2} \dots x_d^{z_d}$$

(1 pont)

általánosítva.

$$z_1, z_2, \dots, z_d \in \mathbb{N}$$

④
$$(x+y+z)^3 = \sum_{z_1+z_2+z_3=3} \frac{3!}{z_1! z_2! z_3!} x^{z_1} y^{z_2} z^{z_3} = \frac{3!}{3!} x^3 + \frac{3!}{3!} y^3 + \frac{3!}{3!} z^3 +$$

$$+ \frac{3!}{2!1!} x^2 y + \frac{3!}{2!1!} x y^2 + \frac{3!}{2!1!} x^2 z + \frac{3!}{2!1!} x z^2 + \frac{3!}{1!1!1!} x y z = 135z$$

⑥

4)

$$H = \{A, B\}$$

$$M = \{B, B, B, B, A, A, A, A\}$$

~~BABABABA, ABABABAB~~ ~~stet.~~

7)

MISSISSIPPI

$$\begin{array}{cc} \text{BABABABA} & \text{ABABABAB} \\ (4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1) & - 2 = \boxed{2 \cdot (4! \cdot 4!)} \end{array}$$

$$H = \{M, I, S, P\}$$

$$\text{összes} = \frac{11!}{4! \cdot 4! \cdot 1! \cdot 2!}$$

$$M(H) = \{1, 4, 4, 2\}$$

S-et egy helyre helyezett:

SSSS

$$\text{marad: } (11 - 4)! = 7$$

$$M'(H) = \{1, 4, 1, 2\}$$

$$\frac{8!}{1! \cdot 4! \cdot 1! \cdot 2!}$$

ig

$$\frac{11!}{4! \cdot 4! \cdot 1! \cdot 2!}$$

$$\frac{8!}{4! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 2!}$$

(+1 pont) eddig: 2

1.)

$$6! - 5!$$

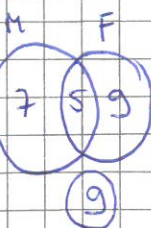
↑ [5] - 11 - ez az, amelyik kettővel kezdődhet.

[6] összes sorbaállítása

ennyi az egyen

$$\boxed{HF: 8, 15}$$

Logikai szita



$$|U| = 30$$

$$|U| = |A| + |B| + |A \cap B| \text{ isható fel.}$$

Tetszőleges halmazokra

szita: ki kell szitálni a dolgozat.

$$|H| = \sum_{h \in H} 1$$

7)

$$|A \cup B \cup C| = |U| - |A| - |B| - |C| + |A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C| - |A \cap B \cap C|$$

Es van általában darab is. ($\Rightarrow$ lásd a dián.)

$A_3, A_7, A_{10} \ni x$ és 20 halmaz van. ($A_1, A_4, \dots, A_{20}$)

A többiben nincs benne.

$$\overset{1}{U}, \overset{-1}{A_3}, \overset{-1}{A_7}, \overset{-1}{A_{10}}, \overset{1}{A_3 \cap A_7}, \overset{1}{A_3 \cap A_{10}}, \overset{1}{A_7 \cap A_{10}}, \overset{-1}{A_3 \cap A_7 \cap A_{10}} \left. \vphantom{\overset{1}{U}, \overset{-1}{A_3}, \overset{-1}{A_7}, \overset{-1}{A_{10}}, \overset{1}{A_3 \cap A_7}, \overset{1}{A_3 \cap A_{10}}, \overset{1}{A_7 \cap A_{10}}, \overset{-1}{A_3 \cap A_7 \cap A_{10}}} \right\} \text{ ezekben mind benne van } x.$$

Ezt leírjuk a szita formula jobb oldalán.

A 4 db 1-es tünteti a 4 db -1-eset

A szitaformula unióra is alkalmazható.

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| \text{ ugyanígy.}$$

példák jönnek.

② 26 betű.

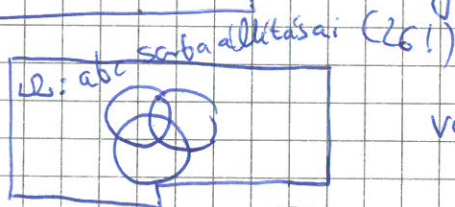
megfőztes helyül: $26!$

LOK megfőztes: 23 betű + LOM: $24!$

KOZ megfőztes: 23 betű + KOZ: $24!$

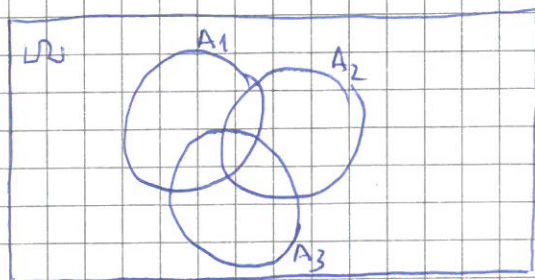
ZAB megfőztes: 23 betű + ZAB: $24!$

$$26! - 3 \cdot 24! \text{ nem jó. HIBÁS!}$$



vannak metszetek!

Tehát:



A_1 : azon sorbádltásol, melyben kiolvasható a LOM

A_2 : azon $- 11 -$, $- 11 -$ a Hoz

A_3 : azon $----- 11 -----$ a ZAB

Kell: $|A_1 \cup A_2 \cup A_3|$.

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |U| - |A_1| - |A_2| - |A_3| + |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3|.$$

$$= 26! - 24! - 24! - 24! + 0 + 22! + 22! + 0.$$

ennyi.

HozAB az $A_2 \cap A_3$

(32) 10 hosszú számok

$\{0, 1, 2, \dots, 9\}$

összes: 10^{10}

egy páros x : 5^{10}

$$\frac{10^{10} - 5^{10}}{2} \text{ de nem jó.}$$

10 jegyű telefonszámok

páratlan: $\{1, 3, 5, 7, 9\}$

$$|U| = 10^{10}$$

□ □ □ □ □ □ □ □ □ □

$\binom{10}{5}$ nem jó megközelítés! Nagyon nagyok lennének.

↑ ide raktuk páratlanokat

A_1 : azon telefonszámok, melyeknél az 1-es hiányzik.

A_2 : ——— 11 ——— 3-as hiányzik

A_3 :  5-es hiányzik

A_4 :  7-es hiányzik

A_5 :  9-es hiányzik

$\binom{5}{0}$ tag

$\binom{5}{1}$ tag

$$\text{Kell: } |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5| = |U| - (|A_1| + |A_2| + \dots + |A_5| +$$

$$+ |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + \dots - \binom{5}{2} \text{ tag}$$

$$- |A_1 \cap A_2 \cap A_3| - |A_1 \cap A_2 \cap A_4| - \dots + \binom{5}{3} \text{ tag}$$

$$+ |A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5| - \binom{5}{4} \text{ tag}$$

$$- |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5|. \quad 1 \text{ tag } \binom{5}{5}$$

példa: $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 7^{10}$ (1, 3, 5 hiányzik)

↑ ilyenekből mindig 7^{10} van.

és így tovább, triviálisan.

$$\text{Tehát: } 10^{10} - \binom{5}{1} 9^{10} + \binom{5}{2} 8^{10} - \binom{5}{3} 7^{10} + \binom{5}{4} 6^{10} - 5^{10}$$

(31) elcsengett levelez problémája.

HF: 30-as.

EZ TÉTEL IS!

a) n levél és n barátok

$\boxed{1} \quad \boxed{2} \quad \boxed{3} \quad \dots \quad \boxed{n}$

$\boxed{1} \quad \boxed{2} \quad \boxed{3} \quad \dots \quad \boxed{n}$

A fixpont nélküli $[n] \mapsto [n]$ permutációk számát kell meghatározni.

($\varphi \in S_n$ -nek fixpontja $i \in [n]$, ha $\varphi(i) = i$)

Logikai suta kell.

FIXPONT NÉLKÜLI PERMUTÁCIÓK SZÁMA KELL.

$$U_n = S_n, [n] \mapsto [n], |U_n| = n!$$

A_i : azon $[n] \mapsto [n]$ permutációk, melyeknél az i elem fixpontja.

Esetet számláljuk $\#A_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$)

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = |U_n| - |A_1| - |A_2| - \dots - |A_n| + |A_1 \cap A_2| + \dots + |A_{n-1} \cap A_n| - \\ - |A_1 \cap A_2 \cap A_3| - \dots - |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|$$

$$\dots + (-1)^n |A_1 \cap \dots \cap A_n|.$$

(+1 pont)

$|A_i \cap A_j \cap A_k| \rightarrow$ az i, j és k fix pontja.

$(n-3)!$ ilyen van. Így lesz bijekció.

(16)

Tehát erre $(n-3)!$ lehetőségeink volt.

A k teljes metszetek esetén $(n-2)!$ lesz.

Tehát:

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| &= |U| - \binom{n}{1}(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! - \binom{n}{3}(n-3)! + \binom{n}{4}(n-4)! - \dots \\ &\quad + (-1)^n \cdot \binom{n}{n} \underbrace{0!}_{(n-n)!} = \binom{n}{2}(n-2)! = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n!}{2!} \\ &= n! - \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} - \frac{n!}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{n!}{n!} = \\ &= n! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right) \end{aligned}$$

Ez az $\frac{n!}{2}$ számnak legközelebbi egésze. $\square$

Rekurzív témakör jön (RECURSIVE). Lásd diácon.

Speciális rekurziófogta:

Def.: Tetszőleges $c_1, c_2, \dots, c_d \in \mathbb{K}$ számokra (rögzített számokra)

ahol $c_d \neq 0$ az $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_d a_{n-d}$ ha $n \geq d$
(*) $\rightarrow$ rekurziót lineáris d -edrendű differenciálegyenletnek nevezzük. Ez egy d -edrendű

példa:

64/(a-g) másodrendű

1/(h-i) harmadrendű

Megj.: Ha (*) feltételhez hozzávesszük rögzített $r_0, r_1, \dots, r_{d-1} \in \mathbb{K}$ számokra az $a_0 = r_0, a_1 = r_1, \dots, a_{d-1} = r_{d-1}$ kezdeti fel-

- tételreket (K.É.), akkor pontosan 1 $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ sorozat van, amely kielégíti (*)-ot és (K.É.)-t is.

Azt mondjuk, hogy ezzel a lineáris rekurzióval definiáltuk (a_n) -t.

Példa: 64/a írjuk fel a sorozat első néhány elemét:

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = 6$$

$$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} \quad (\text{ha } n \geq 2)$$

$$a_2 = 5 \cdot 6 - 6 \cdot 1 = 24$$

$$a_3 = 5 \cdot 24 - 6 \cdot 6 = 84$$

$$a_4 = 5 \cdot 84 - 6 \cdot 24 = 276$$

⋮

Def: Az $F_0 = 1, F_1 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ (ha $n \geq 2$)

rekurzióval definiált (lin!) sorozatot Fibonacci-sorozatnak nevezzük,

az F_n sorozatelemet pedig az n -edik Fibonacci-számnak hívjuk. $(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots)$

A prezentációban láttuk: kombinatorikus definíciója

T:

Fibonacci-számok zárt alakja:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right) \stackrel{\text{kalibulus}}{=} \text{az } \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1}$$

számok legközelebbi egész.

példa lineáris megoldása: lásd a kiadott lapon

$$\left. \begin{array}{l} a_0 = 1 \\ a_1 = 6 \end{array} \right\} \text{K.E.}$$

$$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} \quad (*)$$

1. lépés: Csak a $(*)$ -gal foglalkozunk először, keresünk olyan

$1, q, q^2, q^3, \dots$ mértani sorozatot $(q \neq 0)$, amely $(*)$ -t

kiegészíti. $\hat{a}_n = q^n$.

Kell:

$$q^n = 5q^{n-1} - 6q^{n-2} \quad \forall n \geq 2 - \text{re.}$$

$\div q^{n-2}, q \neq 0$

$$q^2 = 5q - 6$$

$$q^2 - 5q + 6 = 0$$

$$\downarrow$$
$$q = 2$$

$$\downarrow$$
$$q = 3$$

Kiszámoltuk, hogy az $\hat{a}_n = 2^n$ (az $1, 2, 4, 8, 16$ sorozat) és

$\tilde{a}_n = 3^n$ ($1, 3, 9, 27, 81, \dots$ sorozat) kielégíti

a $(*)$ -t.

A lényeg, hogy ezek lineáris kombinációi is kielégítik a $(*)$

lineáris rekurziót.

2. lépés:

Keressünk ilyen lineáris kombinációt! Olyan, ami K.E.-t
is kielégíti.

$\alpha, \beta = ?$, hogy $\alpha \hat{a}_n + \beta \tilde{a}_n$ sorozat, azaz
 $(\alpha 2^n + \beta 3^n)$ sorozat teljesítse K.E.-t

$$\begin{cases} \alpha \cdot 2^0 + \beta \cdot 3^0 = 1 \\ 2\alpha + \beta \cdot 3 = 6 \end{cases} \text{ és kell!}$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ 2\alpha + 3\beta = 6 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \underline{\underline{\beta = -4}} \\ \underline{\underline{\alpha = 5}} \end{array}$$

Tehát a keresett sorozat:

$$\boxed{a_n = -3 \cdot 2^n + 4 \cdot 3^n}$$

↑
 mert az teljesíti

K.E.-t és a (*)-t is.

Oldjuk meg a Fibonacci-sorozat:

$$F_0 = 1$$

$$F_1 = 1$$

$$(*) \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad \text{ha } n \geq 2.$$

q^n alakban keressük, ami (*)-t teljesíti

$$q^n = q^{n-1} + q^{n-2} \quad / : q^{n-2}$$

$$q^2 = q + 1 \Leftrightarrow q^2 - q - 1 = 0$$

$$q_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad q_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

Tehát $\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n$ és $\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n$ sorozatot kapunk.

K.E.-t is kifejező lin. kombináció keresése:

$$\alpha, \beta = ?$$

$$\alpha \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \beta \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \text{ is megoldás.}$$

$$F_0 = 1 = \alpha \cdot 1 + \beta \cdot 1 \Leftrightarrow \boxed{\alpha + \beta = 1}$$

$$F_1 = 1 = \boxed{\alpha \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + \beta \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}$$

ezt kell megoldani.

$$(2) - \text{ből } \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \cdot (1)$$

$$\alpha \sqrt{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right), \quad \beta = 1 - \alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$\text{Tehát } F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1-\sqrt{5}}{2} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

ezt általában beírjuk $\square$

Lineáris rekurrens alaptétel lásd kiadott anyag.

$$(H) \quad n = H$$

Legyen $n \geq 2$:

~~H~~

Jelölje a választ a_n .

3 eset van: - Ha első nap 1 Ft pénzre,
akkor utána $n-1$ forintot a_{n-1} -
feltehetően keltethet el.

- Ha 1. nap 2 Ft-ért vesz,

akkor utána $n-2$

forintot a_{n-2} -feltehetően

keltethet el.

- Ha első nap 2 Ft-ért vesz,

akkor utána $n-2$ forintot a_{n-2} -feltehetően

keltethet el.

Kapitel: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-2}$ ha $n \geq 2$.

$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$ ha $n \geq 2$.

est
szell
megoldan

$$\begin{cases} a_0 = 1 & (?) \\ a_1 = 1 & (Hp) \\ a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} & (HF) \end{cases}$$

Nézzünk példát általános esetre.

pl: $d=7 \leadsto 5, 5, 3, 8, 8, 8, 8$ gyökös

$5^n, 5^n, 3^n, 8^n, n8^n, n^2 8^n, n^3 8^n$ megoldások

ezek alkotnak egy bázist

2. példa

$2, 2, -3$

$2^n, n2^n, (-3)^n$

$\alpha \cdot 2^n + \beta n 2^n + \gamma (-3)^n$ lineáris kombinációval van szó.

példa 6k/g

$a_0 = 1$

$a_1 = 1$

$a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$ ha $n \geq 2$

$q^2 - 6q + 9 = 0$ azaz a karakterisztikus

$(q-3)^2 = 0$

$q_1 = 3$

$q_2 = 3$

a 3 kétszeres gyök

Tehát $\alpha 3^n + \beta n 3^n$ alakban kereszszük a_n -t.
 $\parallel$
 a_n

$$a_0 = 1$$

$$\boxed{1 = \alpha + 0}$$

$$\boxed{\alpha = 1}$$

$$a_1 = 1$$

$$1 = 3\alpha + 3\beta$$

$$1 = 3 + 3\beta$$

$$-2 = 3\beta \Leftrightarrow \boxed{\beta = -\frac{2}{3}}$$

A válasz tehát:

$$\boxed{a_n = 3^n - \frac{2}{3}n 3^n}$$

$\square$