

Előadó: Nagy V. Gábor.

www.math.u-szeged.hu/~ngaba itt van minden felt.

Az ajánlott irodalom felt van.

Követelmény: gyakorlat: vannak háttér $\rightarrow$ közvetlen átdolgozás.

A KONLAPON LESZNEK. írásban. /e-mail.

$\downarrow$ gyakorlati pontszám. min. 50% kell.

Vagy inkább 40%...

⊕ elméleti rész: írásbeli vizsga lesz. BEUGRÓ van.

40% minimum +

a beugr.

⊕ lehet plusz pontot is menni az órán.

50% felett teljes.

ELMÉLET + GYAKORLAT
azonos súlyal.

A felett vagy egyenlő
rész van.

Nyomjait okán.

Részhalmazok. Egy halmaznak hány részhalmaza van?

⊕ Egy n elemű halmaznak 2^n db részhalmaza van.

(pl.) $H = \{a, b, c\}$ $|H| = 3$

H részhalmazai:

	a	b	c	
•	•	•	•	- $\{a, b, c\}$ ← önmaga.
•	•	•		- $\{a, b\}$
•	•		•	- $\{a, c\}$
•		•	•	- $\{b, c\}$
•	•			- $\{a\}$
		•		- $\{b\}$
			•	- $\{c\}$
				- $\{\emptyset\}$ ← üres halmaz

8 db amiből tényleg 2^3 , hisz $n=3$.

Egy H halmaz hatványhalmaza: $\mathcal{P}\{H\} = \{R : R \subseteq H\}$

$\uparrow$
 H rész halmazainak halmaza.

A fenti példára:

$$\mathcal{P}\{H\} = \{ \{a, b, c\}, \{ \emptyset \}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\} \}$$

$$\text{Ha } |H| = n \Rightarrow |\mathcal{P}\{H\}| = 2^n.$$

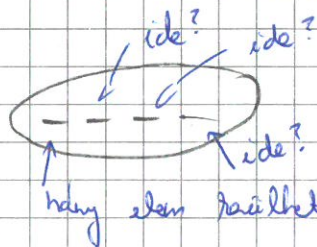


$\uparrow$ csoportokra bontjuk a teljes halmazt

Az egyes osztályok elemszámát meghatározzuk $\Rightarrow$ aszerint adjuk össze.

Ez a kombinatorikai összeadás.

Szorzás:



pl. rendszer:

26 betűs ABC-vel.
 $\uparrow$
26 · 26 · 26 · 10 · 10 · 10.

Ez egy sorozási probléma.

Klasszikus közipszűs megközelítés.

A megszámlálható objektumok lineáris sorozattal lehatározhatók.

$$B = \{A, B, C, \dots, Z\} \quad S = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$$

Számláló: $B \times B \times B \times S \times S \times S$ halmaz.

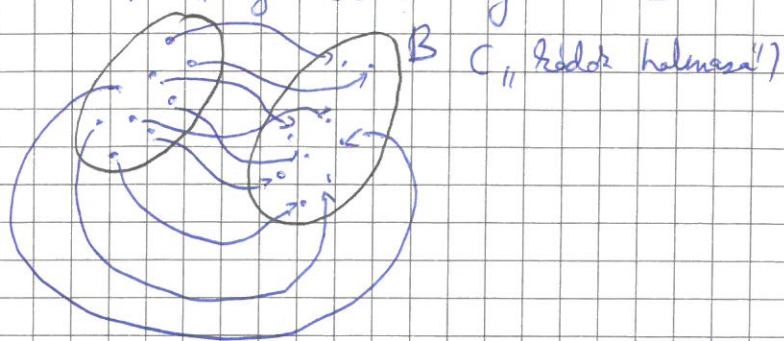
így lehet formalizálni.

$$|B \times B \times B \times S \times S \times S| = |B| \cdot |B| \cdot |B| \cdot |S| \cdot |S| \cdot |S| \text{ lesz.}$$

SZORZÁSI ALAPELV

V.ö.: BINÁRIS KÓDOLÁS - Kódoljuk a feladatokat.

A ("megismertető dolgok halmaza")



φ leképezés. Aztán jó a bijektív

φ bijekció (szürjektív + injektív)!

BIJEKCIÓS ALAPELV. φ akkor fősza.

A és B halmazok. Ha $\exists \varphi: A \rightarrow B$ bijekció,
akkor $|A| = |B|$ és $|A| = |B|$ esetén $\varphi: A \rightarrow B$
bijekció.

Eml: $\varphi: A \rightarrow B$ bijekció, ha minden B-beli elemnek pontosan
1-osa van A-ban. $\Rightarrow \varphi$ egyszerre injektív és szürjektív.

$$(\forall b \in B \exists! a \in A : \varphi(a) = b)$$

formálisan.

a	b	c
1	1	1
0	0	0
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0
1	0	1
0	1	1

KARAKTERISZTIKUS VEKTOR.

1 ha benne van;

0 ha nincs.

Bizonyítsuk a tételt!

Legyen $H = \{h_1, h_2, \dots, h_n\}$

Egy $R \subseteq H$ részhalmaza legyen $\underline{x}_R = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ a

vektorresz:

$$v_i = \begin{cases} 1, & \text{ha } h_i \text{ benne van } R\text{-ben} \\ 0, & \text{ha } h_i \notin R. \end{cases}$$

Ezt a vektort R kanonikus vektorának nevezzük.

Lényeg: $\Phi: \mathcal{P}(H) \mapsto \{0, 1\}^n, R \mapsto \underline{x}_R$ bijekció.

$\uparrow$
n hosszú 0-1-vektorok halmaza

Kézi feladat est megmondani

$\Rightarrow$ Mivel ez bijekció: a hatványhalmaz elemszáma $= |\{0, 1\}^n| = 2^n$

Gyak:

$\{1, 2, \dots, 100\} = K$

1 benne van

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ \hline & & & & 2^n & \square \end{array}$$

$u \in K$ és $v \in K$ (u, v) és $u \leq v$.

Hány ilyen pár van?

KEG: $2^{100} - 2^{99}$.

2^{100} a részhalmaz.

2^{99} ami nem jó.

⑤.

$\{1, 2, 3, \dots, 10\}$ halmaz hány részhalmaza tartalmaz
legalább egy páratlan számot.

$\downarrow$

$\{1, 3, 5, 7, 9\}$

i) 2^{10} részhalmaz van.

ii) 2^5 db nem tartalmaz
páratlan számot

Igy $2^{10} - 2^5$ a megoldás.

④

Ennyi, komplementummal meg lehet ezt oldani.

+2 pluszpont

④ Sorozat: 6, 2, 1, 2.

6^4 dobás van.

↑ összes dobássorozat.
státus.

BEADÁS HÁZI:

$\boxed{1/2}$

$\boxed{1/8}$

Nincs ismétlődés: 6 · 5 · 4 · 3

=> megoldás:

$$\boxed{6^4 - 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}$$

klasszikus példa.

$$\underline{6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6}$$

összes

$$\underline{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}$$

rossz.

jö: $6^4 - 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$ ennyi.

⑥* Párokat számolunk.

$$|M| = n$$

Első megoldás: Ha $|X| = k$, akkor az ilyen (X, Y) párokban van $\binom{n}{k}$ darab.

$$\binom{n}{k} 2^k$$

↑ a kiválasztott k -elemű X -halmaznak egy részhalmazát választunk Y -nak.

A válasz:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k = (2+1)^n = 3^n.$$

$$k = 0, 1, \dots, n$$

↑
binomiális
tétel

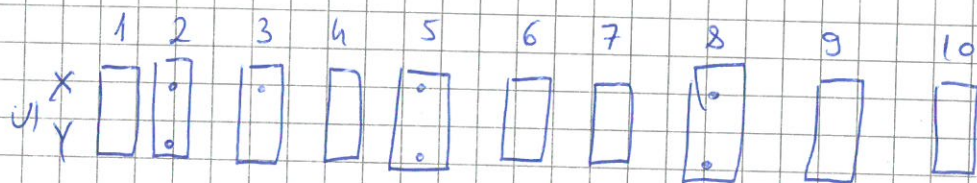
$X \supseteq Y$ esete ez.

Nem pont azt oldottuk meg,

mint ami a feladatban van.

Második megoldás: $M = \{1, 2, \dots, 10\}$ és X a bővebb.

⑤



kar. váltakoz

$2 \times n$ - es

ilyen építőelemek lehetnek:

ilyen nem- további megkötés nélkül.

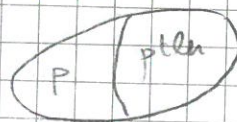
Innen: 3^n (itt: 3^{10})

Ez egyszerűbb logikával is belátható...

Az így megadott kódolás már bijektív. A kódok száma: 3^n .

⑦ All: egy nemüres halmaznak ugyanannyi páros elemszáma van, mint amennyi páratlan.

Itt: összesen: 2^{100}



páros elemszámok: $\frac{2^{100}}{2} = \underline{\underline{2^{99}}}$

páratlan elemszámok: $\frac{2^{100}}{2} = \underline{\underline{2^{99}}}$ egyi.

Indokolják meg: A bijektív párosított leképezés!

⑧ Biz: Alkítsuk páros a páratlan elemszámokat a páros

elemszámokkal. Egy páros tartozhat az első részhez, melyre a karakterisztikus vektor első bitjében tényleg csak az, a többiben megegyeznek.

A pár egyik tagja nem tartalmazza az „1” elemet és ha hozzávesszük az egységet, akkor a pár másik tagját kapom.

⑥

példa: $H = \{1, 2, 3\}$

1 1 1 — 0 1 1

$\{1, 2, 3\} - \{2, 3\}$

1 1 0 — 0 1 0

$\{1, 2\} - \{2\}$

1 0 0 — 0 0 0

$\{1\} - \{\emptyset\}$

és ezek párok.

↑
mindig több
elem van 1-el

↑ mint ezek

Tehát az egyik mindig páros, a másik páratlan.

Ábraképezte a részhatványokat, $2^n - 1$ pár lett, minden pár

pontra 1 páros és egy páratlan elemének részhatváza áll,

hiszen 1 pár részhatványának elemzése 1-el történik.

$\Rightarrow$ All

□

A házit hasonlóan be lehet látni:

Binomiális együtthatók

jelölés: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ természetes számok.

most a 0 is az, megállapodást

tevéünk, így.

$\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$ lesz.

$[n] = \{1, 2, \dots, n\} \leftarrow$ standard n -elemű
halmaz.

$[0] := \{\emptyset\}$

elmélet

Halmaz elemszáma n , ha lehetnek bijekció a halmaz és a standard n -elemű halmaz között.

Def.: $\binom{n}{k}$ Egy n -elemű halmaz k -elemű részhalmazainak száma. (Ez egy jelölés.)

megj.: Ez jó definíció, mert bármely n -elemű halmazt veszünk, mindig ugyanannyi k -elemű részhalmaza lesz.

(dolgokhoz a standard n -elemű halmazzal).

példa: $n=5, k=3$

1	2	3	4	5	
•	•	•			$\{1, 2, 3\}$
•	•		•		$\{1, 2, 4\}$
•	•			•	$\{1, 2, 5\}$
•		•	•		$\{1, 3, 4\}$
•		•		•	$\{1, 3, 5\}$
•			•	•	$\{1, 4, 5\}$
	•	•	•		$\{2, 3, 4\}$
	•	•		•	$\{2, 3, 5\}$
	•		•	•	$\{2, 4, 5\}$
		•	•	•	$\{3, 4, 5\}$

+1 pont
😊

10 db van.

$$\binom{5}{3} = 10 \text{ van. Képlet nélkül.}$$

Ez még csak definíció volt.

Állítás:

$\binom{n}{0} = 1$ és $\binom{n}{n} = 1$ minden esetben.
 $\{\emptyset\}$ egyetlen $\emptyset$ halmaz magja.

Másik: $\binom{n}{k} = 0$ ha $k > n$. Triviális.

Rekurzió:
$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

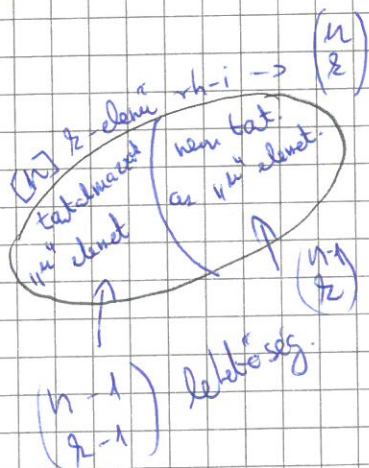
Pascal- Δ szimmetriája: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ elvagy körpiskola

$[n]$ $n-k$ -es elemei részhalmazai éppen $[n]$ k -es elemei részhalmazai a komplementerei.

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$$

All: $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

Biz:



Mindkét oldal $[n]$ k -es elemei részhalmazait számlálja meg.

A jobb oldal szerint osztályozva, hogy tartalmazza-e az " u " elemet.

Az " u " elemhez kell még $k-1$ elemet választani, $[n-1]$ -ből.

Ez $\binom{n-1}{k-1}$ lehetőség van.

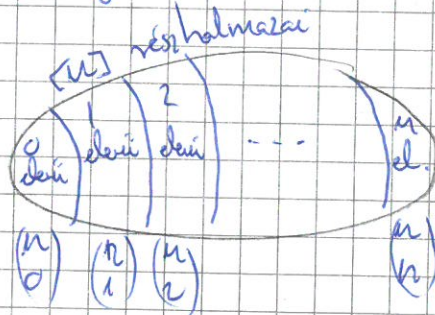
A másik ugyanígy belátható.

Ez a két halmaz halmazpontosan a $[n]$ k -es elemei részhalmazai, amelyekből $\binom{n}{k}$ van. $\square$

All: $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$
 $\uparrow$ 1. tétel. Beláttuk.

Mindeket oldal [n] részhalmazainak a számát adja meg.

Asszint oszlatyoz, hogy hány elemű a részhalmaz
 emez a bizonyítás.



Kettős leszámolás.

Pascal - háromszög:

0. sor: $\binom{0}{0}$

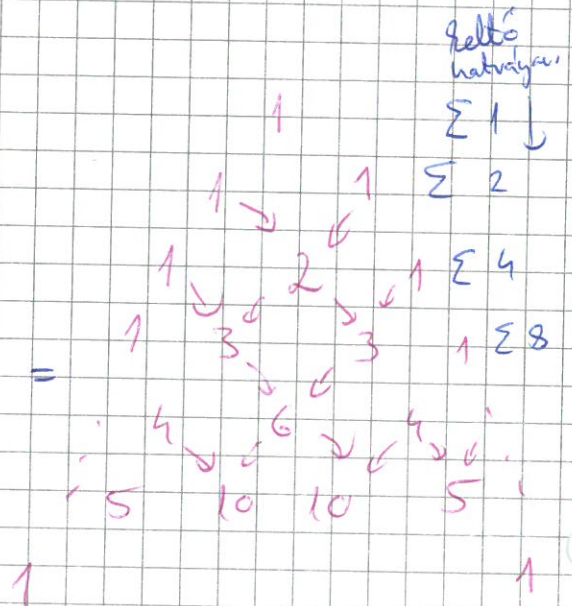
1. sor: $\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$

2. sor: $\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$

3. sor: $\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$

⋮

n. sor: $\binom{n}{0} \quad \dots \quad \binom{n}{n}$



jól látható a rekurszív szabály

(T) binom = kettős összeg jelöl
 $\uparrow$
 Binomiális tétel

Ha $k \leq n$

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Ezt bizonyítjuk.

$k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k$

$0! = 1$

Hány z^k hosszú sorozatot lehet felírni $[n]$ elemekből úgy, hogy ne legyen ismétlődés?

$$\underline{n} \quad \underline{n-1} \quad \underline{n-2} \quad \underline{n-3} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \underline{(n-k+1)}$$

z^k hosszú

$$n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1). \text{ Ez a válasz.}$$

A második válasz:

$$\binom{n}{k} \cdot k!$$

↑ Ezeket sorba fogom állítani. $k!$ -felteppem.

Kiválasztom azt a k különböző elemet,

amelyek szerepelnek E a sorozatban

$$\text{Kaptuk: } n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) = \binom{n}{k} k!$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} = \binom{n}{k} \text{ ennyi. } \square$$

Binomiális tétel:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} =$$

$$= \binom{n}{0} y^n + \binom{n}{1} x y^{n-1} + \binom{n}{2} x^2 y^{n-2} + \dots + \binom{n}{n} x^n$$

A Pascal- Δ az együtthatókat megadja

Biz.:

$$(x+y)(x+y)\dots(x+y) = \sum \frac{xv \cdot y}{\text{összes leh. módon}} \cdot \frac{xv \cdot y}{\text{összes leh. módon}} \cdot \frac{xv \cdot y}{\text{összes leh. módon}} \cdot \frac{xv \cdot y}{\text{összes leh. módon}} \cdot \frac{xv \cdot y}{\text{összes leh. módon}}$$

$\forall ()$ -ből kivesszünk egy tagot, azokat összevonjuk,

és az összes lehetséges módon megcsináljuk és az így kapott sorozatot összeadjuk.

Innentől ugyanaz. elvégezzük a szorzást és összevesszük

$$= \underbrace{x^n + x^{n-1}y + \dots + y^n}_{2^n \text{ tag lesz.}}$$

"n hosszú szavak" x és y betűkből

$$= \sum_{z=0}^n \binom{n}{z} x^z y^{n-z}$$

↑ csak ilyen tagok lesznek

hány db "szó" kapunk $x^z y^{n-z}$ -t, azaz hány olyan $\sqrt[n]{szó}$ van, amely z db x-ből és (n-z) db y-ból áll. $\binom{n}{z}$, mert emgyféleképpen tudunk kijelölni az x-es helyet. A többi y.

Néhány következménye:

Ha $x=y=1$. $(1+1)^n = 2^n = \sum_{z=0}^n \binom{n}{z} 1^z 1^{n-z} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n}$

Ha $x=-1$ és $y=1$: $(-1+1)^n = \sum_{z=0}^n \binom{n}{z} (-1)^z 1^{n-z} = 0^n = 0$ Ha $n \geq 1$.

$$= \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \dots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0 \text{ Ha } n \geq 1.$$

Penderek at:

$$\underbrace{\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots}_{\text{páros elemszámú részhatványai } [n]-\text{re}} = \underbrace{\binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \dots}_{\text{páratlan -1- részhatványai } [n]-\text{re}}$$

ismét belátható

példák

HÁZI: 21

(13)

1.
↑
ez fix.
6 hely, kell 3 db 2-es: $\binom{6}{3}$.

$$1 \cdot \binom{6}{3} \cdot 8^3$$

utána 8 lehetőség van. $\Rightarrow$ KETTES NEM
LEHET

A maradék 3 helyre 8-féle számjeggy kerülhet.

(14)

32 lap $\rightarrow$ 6 lapot húzunk.

Van 8 piros és 4 ász.

1 db piros ász van.

21 egyéb lap van, ami nem piros és nem ász.

Két eset van. Ha benne van a piros ász és ha nincs benne.

Amikor benne van:

↑
piros ász

$$\binom{7}{1} \cdot \binom{3}{2} \cdot \binom{21}{3}$$

↑
7 piros nem ászból 1 lap

↑
három nempiros ász

↑
se nem piros,
se nem ász.

Amikor nincs benne:

$$\binom{7}{0} \cdot \binom{3}{2} \cdot \binom{21}{2}$$

egyarány. részletesen nézzük.

A válasz: $\binom{7}{1} \cdot \binom{3}{1} \cdot \binom{21}{3} + \binom{7}{2} \cdot \binom{3}{2} \cdot \binom{21}{2} = 7 \cdot 3 \cdot \frac{20 \cdot 21 \cdot 19}{1 \cdot 2 \cdot 3} +$
 $+ \frac{7 \cdot 6}{1 \cdot 2} + \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2} + \frac{21 \cdot 20}{1 \cdot 2} = 13$

(13)

- Egy H feletti N multi halmaz részmulti halmaza H -nek

$$(N \subseteq H), \text{ ha}$$

$$N(h) \leq H(h).$$

- Ha $H = \{h_1, h_2, \dots, h_n\}$ az H multi halmaz multiplicitásvektora
 $(M(h_1), \dots, M(h_n))$

Az előzőben: $(3, 2, 4, 0, 2)$ volt ez. Példaszerűen.

legyen H egy $H = \{h_1, h_2, \dots, h_n\}$ feletti multi halmaz.

H részmulti halmazainak száma: $(M(h_1)+1)(M(h_2)+1)\dots(M(h_n)+1)$

Egy példa

↑ Ez azon miatt, hogy a részmulti-
halmazban a h elem multiplicitása
 $M(h)+1$ féle lehet.
 $(0, \dots, M(h))$

(26) $H = \{a, z, b, n\}$ alaphalmaz.

$H = \left(\begin{smallmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \\ 6 \end{smallmatrix} \right)$ lesz a multiplicitásvektor

$$H = \{a, a, a, a, a, z, z, b, b, b, n, n, n, n, n, n\}.$$

Ennyi.

N a gyümölcskosár, egy részmulti halmaza H -nek.

(?) Hány részmulti halmaza van H -nek?

Gondoljunk a multiplicitásvektorral!

$$\left(\begin{smallmatrix} \square \\ \uparrow \\ 0-5 \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} \square \\ \uparrow \\ 0-2 \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} \square \\ \uparrow \\ 0-4 \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} \square \\ \uparrow \\ 0-7 \end{smallmatrix} \right)$$

6 lehetőség 3 lehetőség

Hányi van: $6 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 7$ db.

Def.: Egy n elemű halmaz feletti (pl.: $[n]$) k elemű ~~multihalmazok~~ számát $\binom{n}{k}$ - val jelöljük.

T: $\binom{n}{k} = \binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}$

$\uparrow$
 $\binom{a}{b} = \binom{a}{a-b}$

Példa: $\binom{3}{5} = \binom{3+5-1}{5} = \binom{7}{5} = \binom{7}{2}$

$\uparrow$ ilyen is lehet.

Konkrét példán keresztül nézzük.

27. $\left. \begin{array}{l} 8 \text{ fánk.} \\ 12 \text{ helyes dobos.} \end{array} \right\} \Rightarrow \binom{8}{12} = \binom{12+8-1}{12} = \binom{19}{12} = \binom{19}{7}$

praktikum-példa.

1: Legyen n fánkajta és 12 hely.

$H = \{1, 2, 3, 4\}$ és a multihalmazok keresése:

pl.: $M = (3, 5, 0, 4)$ lehet.

$\uparrow$ n szám, az összegek

Ez néhányszor tűnik.

Kódoljuk le a multiplikációsértékét úgy,
 hogy $t \in \mathbb{N}$ helyett $\overset{\circ \circ}{\underset{t}{\vdots}}$ db ponty lesz.

12. Ez a feltétel.

Hány ilyen van?

$\dots, \overset{\circ \circ \circ}{\vdots}, \dots$ így kódolunk. $\circ$ -ok száma 12.
 $\circ$ - 2 száma: 3 (9)

További megkötés nincs a kódra. $(n-1)$

Összesen $n+2-1 \Rightarrow (15)$ karakter. Nincsen más megkötés.

Ez a pont ebben az össembar-elfedezésben.

Eset a karakter egyértelműen kódolható a megadott karakter-
váltással. Elég esélyt megkötés.

$$\binom{15}{12} = \binom{n+2-1}{2} \text{ egyenlőség. Megj.}$$

+1 pont
(Σ 4)

HF: 28

