Unger Tamás István

FTD1Y7

Kalkulus II.

$f(x)$	$f'(x)$
$c \in \mathbb{R}$	0
x	1
x^n	$n x^{n-1}$
e^x	e^x
$a^x,\ a>0$	$a^x \cdot \ln a$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{arccot} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
1	$x+c$
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}+c$
e^x	e^x+c
a^x	$\frac{a^x}{\ln a}+c$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert+c$
$\sin x$	$-\cos x+c$
$\cos x$	$\sin x+c$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x+c$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\cot x+c$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$

$$(fg)' = f'g + fg'$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

$$\int f'g\,dx = fg - \int fg'\,dx$$

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$$

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

$$a^4-b^4=(a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3)$$

$$a^5-b^5=(a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1 \quad \forall a>0$$

$$e:=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$$n^2 \ll 2^n \ll n!\ ,\quad \ln n \ll n^p \quad p>0.$$

$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ sorozat

$a_1+a_2+\dots+a_n+\dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor

a_n - általános tag

$S_n = a_1+a_2+\dots+a_n$ n-edik részletösszeg

$S_n \to S \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A,\ \sum_{n=1}^{\infty} b_n = B,\ \lambda\in\mathbb{R},$

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+\lambda b_n) = A+\lambda B.$

Geom. sor: $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \iff |q|<1.$

$$\boxed{\begin{gathered} a_n>0 \\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=g \\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=g \\ g<1 \Rightarrow \text{konv.} \\ g>1 \Rightarrow \text{div} \\ g=1 \Rightarrow \text{T.V.} \end{gathered}}$$

Integrálteszt: $a_n>0$, $a_n \searrow$

$f(n)=a_n$ folyt.

$f>0$, $f\searrow$

$\sum_{n=k}^{\infty} a_n \sim \int_k^{\infty} f(x)\,dx$

$\forall \varepsilon>0,\ \nu=\nu(\varepsilon),\ n>\nu,\ |a_n-A|<\varepsilon.$

$a_n=\frac{1}{n}+(-1)^n$

Alternáló: $a_n>0,\ \sum(-1)^n a_n$

$\left.\begin{matrix} a_n\to 0 \\ a_n\searrow \end{matrix}\right\} \Rightarrow \sum(-1)^n a_n$ konv. FELT.

$\sum|b_n|<\infty \Rightarrow \sum b_n$ A.K

$\sum|b_n|=\infty \Rightarrow \sum b_n$ nem A.K

$b_n \not\to 0 \Rightarrow \sum b_n$ div.

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n,\quad \forall |x|<1$$

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\quad \forall x\in\mathbb{R}$$

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$(1+x)^{\alpha}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n,\quad \forall |x|<1.$$

$$\binom{\alpha}{n}=\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!}$$

$$\binom{\alpha}{0}=1.$$

$a_n \not\to 0 \Rightarrow \sum a_n$ div.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sim \sum_{n=k}^{\infty} a_n$

$\sum q^n<\infty \iff |q|<1$

$\sum \frac{1}{n^p}<\infty \iff p>1$

Ha $a_n>0$:

1. Ha $a_n<b_n$, $\sum b_n<\infty$ — maj.
   akkor $\sum a_n<\infty$.
2. Ha $0<b_n<a_n$, $\sum b_n=\infty$ — min.
   akkor $\sum a_n=\infty$.
3. Ha $\frac{a_n}{b_n}\to L>0$ szám, — összeh.
   akkor $\sum a_n \sim \sum b_n$

Taylor-sor:

$$P_n(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i$$

i) $\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} b_n\left(=\lim_{n\to\infty} c_n=A\right)$, $a_n\le c_n\le b_n$, $\lim_{n\to\infty} c_n=A$

ii) $a_n\le b_n \wedge \lim_{n\to\infty} a_n=\infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} b_n=\infty$

iii) $a_n\ge b_n \wedge \lim_{n\to\infty} a_n=-\infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} b_n=-\infty.$