

Név: Unger Tamás István

Neptun: FTD1YJ

Web: <http://maxwell.sze.hu/~ungert>

KALKULUS II., NEGYEDIK HÁZI FELADAT

1. (1 PONT) HATÁROZZUK MEG AZ $f(x, y) = (x + y)^2$ FÜGGVÉNY LOKÁLIS SZÉLSŐÉRTÉKEIT AZ $x^2 + y^2 = 1$ FELTÉTEL MELLETT!

Megoldás:

A feladat nem igényel különösebb gondolkodást, inkább fussunk neki izomból és próbáljuk meg hibátlanul alkalmazni a tanult Lagrange-féle multiplikátor módszert. Ehhez felírjuk az

$$F(x, y, \lambda) = (x + y)^2 - \lambda(x^2 + y^2 - 1) = x^2 + 2xy + y^2 - \lambda x^2 - \lambda y^2 + \lambda$$

segédfüggvényünket, mert azt írja a receptkönyv. Kellenek még $F(x, y, \lambda)$ x - és y -szerinti parciális deriváltjai:

$$F'_x(x, y, \lambda) = 2x + 2y - 2\lambda x = x + y - \lambda x \text{ és}$$

$$F'_y(x, y, \lambda) = 2x + 2y - 2\lambda y = x + y - \lambda y.$$

Most pedig rakjuk össze a háromismeretlenes egyenletrendszerünket, melyben a parciális deriváltakat kell nullával egyenlővé tenni, valamint hozzá kell csapni a feltételből adódó $x^2 + y^2 = 1$ egyenletet is, így:

$$\begin{cases} x + y - \lambda x = 0, \\ x + y - \lambda y = 0, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

A második egyenletből $x = \lambda y - y$ adódik, ezt helyettesítsük vissza az első egyenletbe:

$$\lambda y - y + y - \lambda(\lambda y - y) = 0 \Leftrightarrow 2\lambda y - \lambda^2 y = 0 \Leftrightarrow y(2\lambda - \lambda^2) = 0.$$

Az $y = 0$ megoldással nem foglalkozunk, viszont a szorzat másik tagját alkotó $(2\lambda - \lambda^2) = 0$ összefüggés megoldásai: $\lambda_1 = 0$ és $\lambda_2 = 2$.

Amennyiben $\lambda = \lambda_1 = 0$, úgy a második egyenletből $x = -y$ adódik, ezt beírva a harmadik összefüggésünkbe:

$$x^2 + y^2 = (-y)^2 + y^2 = 2y^2 = 1 \Leftrightarrow y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ tehát } x = \mp \frac{1}{\sqrt{2}},$$

azaz $M_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ és $M_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ megoldáskoordináták.

Hasonlóan vizsgálendő a $\lambda = \lambda_2 = 2$ eset. A második egyenletből $x = y$ adódik, ezt beírva a harmadik összefüggésünkbe:

$$x^2 + y^2 = y^2 + y^2 = 2y^2 = 1 \Leftrightarrow y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ tehát } x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}},$$

azaz $M_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 2\right)$ és $M_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 2\right)$ is megoldáskoordináták.

Legyen most $\lambda = \lambda_1 = 0$ rögzített. Ekkor $F(x, y, \lambda)$ második parciális deriváltjai:

$$\begin{aligned} F''_{xx}(x, y, 0) &= (x + y)'_x = 1, \\ F''_{xy}(x, y, 0) &= F''_{yx}(x, y, 0) = (x + y)'_y = (x + y)'_x = 1, \\ F''_{yy}(x, y, 0) &= (x + y)'_y = 1, \end{aligned}$$

így tehát a Hesse-mátrix determinánsa a

$$D = \begin{vmatrix} F''_{xx} & F''_{xy} \\ F''_{yx} & F''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

alakú, aminek természetesen nem örülünk, de vizsga- és házi feladat-keretek között már nem is számítunk másra. Itt kell viszont észrevenni, hogy az eredeti $f(x, y) = (x + y)^2$ függvény értékkészlete a valós számok halmazán értelmezve $\mathbb{R}_0^+$, valamint $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0$. Ez az érték globálisan is a minimum, amit a kétváltozós függvényünk felvehet, ami azt jelenti, hogy a függvényünknek a kérdéses két pontban – amely rajta van a feltételként szabott origó középpontú, egységsugarú körvonalon – a függvénynek feltételes minimuma van $f(x, y)$ -nak. Ez tiszta sor, mondjuk ki tehát egyértelműen: $f(x, y)$ -nak az $(x_1, y_1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ és $(x_2, y_2) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ pontokban feltételes minimuma van.

Legyen most $\lambda = \lambda_2 = 2$ rögzített. Tekintsük ismét $F(x, y, \lambda)$ második parciális deriváltjait:

$$\begin{aligned} F''_{xx}(x, y, 2) &= (x + y - 2x)'_x = 1 - 2 = -1, \\ F''_{xy}(x, y, 2) &= F''_{yx}(x, y, 2) = (x + y - 2x)'_y = (x + y - 2y)'_x = 1 \text{ és} \\ F''_{yy}(x, y, 2) &= (x + y - 2y)'_y = 1 - 2 = -1. \end{aligned}$$

Sajnos már most is látjuk, de a korrektség kedvéért írjuk ki a Hesse-mátrix determinánsát:

$$D = \begin{vmatrix} F''_{xx} & F''_{xy} \\ F''_{yx} & F''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

amire most sem tudunk őszinte mosollyal reagálni. Ismét célszerű viszont gondolkodni. Ne felejtjük el, hogy a feltétel, amely mellett az $f(x, y)$ függvény szélsőértékeit keressük, egy egységnyi sugarú, origó középpontú körvonal. A kérdést éppen ezért úgy is megfogalmazhatnánk, hogy melyek azok a pontok ezen a körvonalon, amely pontok x - és y -koordinátáinak összegének négyzete a legnagyobb.

Bár azt látjuk, hogy a feltételes maximumok keresésekor a második deriváltakkal nem járunk sikerrel, ebben a példában sokat segít, ha az eredeti $f(x, y)$ függvényünket felírjuk a polárkoordináták segítségével. A következőképpen járunk el:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(r, \varphi) = (r \cos \varphi + r \sin \varphi)^2 = r^2 \cos^2 \varphi + 2r^2 \cos \varphi \sin \varphi + r^2 \sin^2 \varphi = \\ &= r^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi + 2 \cos \varphi \sin \varphi) = r^2 (1 + \sin 2\varphi), \end{aligned}$$

utóbbi egyenlőség az ismert trigonometriai azonosságok miatt írható fel. Világos, hogy ez a kifejezés akkor lesz maximális, ha $\sin 2\varphi = 1$. Ennek a trigonometrikus függvény periodicitásából kifolyólag végtelen sok megoldása van, de ebben az esetben tudjuk, hogy minket csak a 0 és a 2π közé eső megoldások érdekelnek. Az egyik ilyen a $2\varphi = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$, melyhez az egységsugarú körvonalon ($r = 1$) az $(x_3, y_3) = (1 \cdot \cos \frac{\pi}{4}, 1 \cdot \sin \frac{\pi}{4}) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ pont tartozik.

Mivel a függvény π -vel periodikus, ezért a másik megoldásunk a $\varphi = \frac{5}{4}\pi$, melyhez az egységkörvonalon az $(x_4, y_4) = (1 \cdot \cos \frac{5}{4}\pi, 1 \cdot \sin \frac{5}{4}\pi) = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ pont tartozik.

Korábban már beláttuk, hogy mindkét pont rajta van a feltételül szabott körvonalon, ezért kijelenthetjük, hogy $f(x, y)$ -nak az $(x_3, y_3) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ és $(x_4, y_4) = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ pontokban feltételes maximuma van.

Hasonló eredményre jutunk, ha az $F(x, y, 2)$ függvény szélsőértékeinek keresésével próbálkozunk. Írjuk fel:

$$F(x, y, 2) = x^2 + 2xy + y^2 - 2x^2 - 2y^2 + 2 = -x^2 - y^2 + 2xy + 2 = -(x - y)^2 + 2.$$

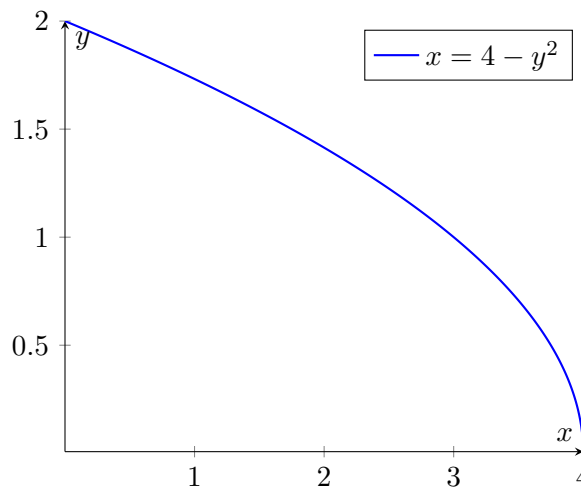
A teljes négyzetté alakítás után látjuk, hogy $F(x, y, 2)$ -nek at $y = x$ egyenes mentén van maximuma. Ez az egyenes két helyen metszi a feltételként megadott egységsugarú körünket: az $(x_3, y_3) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ és $(x_4, y_4) = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ pontokban. Látható tehát, hogy így is jó eredményre jutunk.

2. (1 PONT) HATÁROZZUK MEG AZ ALÁBBI INTEGRÁLT, AHOL D AZ $x = 0$, $y = 0$, $x = 4 - y^2$ GÖRBÉK ÁLTAL HATÁROLT KORLÁTOS SÍKRÉSZ!

$$\iint_D \frac{ye^{2x}}{4-x} dx dy$$

Megoldás:

A feladat megértéséhez és megoldásához elengedhetetlen, hogy felrajzoljuk a kérdéses D korlátos síkrészt. Ezt mutatja a következő ábra.



Világos, hogy a kérdéses korlátos síkrészt az x - és az y -tengelyek, valamint a kék színnel felvett $x = 4 - y^2$ parabola határolja. Formalizálva:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 2, 0 \leq x \leq 4 - y^2\}.$$

Ebben az esetben a meghatározandó integrál az

$$\int_0^2 \left(\int_{x=0}^{x=4-y^2} \frac{ye^{2x}}{4-x} dx \right) dy$$

formában adódik, melynek kiszámításával komoly gondjaink lennének. Meg sem próbáljuk, hasznosabb, ha inkább kapásból megcseréljük az integrálás sorrendjét.

Látjuk, hogy $x = 4 - y^2 \Leftrightarrow y^2 = 4 - x \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{4 - x}$, amelyből a feladathoz most számukra a pozitív félre van szükség. Így a tartományunk a

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq \sqrt{4 - x}\}$$

alakot ölti, így a kiszámolandó integrál a megcserélt sorrendben az

$$\int_0^4 \left(\int_{y=0}^{y=\sqrt{4-x}} \frac{ye^{2x}}{4-x} dy \right) dx$$

összefüggés szerint alakul. Ezzel már érdemes próbálkoznunk:

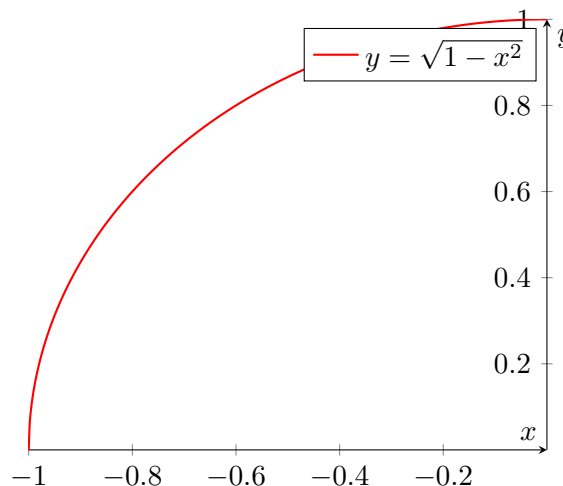
$$\begin{aligned} \int_0^4 \left(\int_{y=0}^{y=\sqrt{4-x}} \frac{ye^{2x}}{4-x} dy \right) dx &= \int_0^4 \frac{e^{2x}}{4-x} \left(\int_{y=0}^{y=\sqrt{4-x}} y dy \right) dx = \\ &= \int_0^4 \left(\frac{e^{2x}}{4-x} \left[\frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=\sqrt{4-x}} \right) dx = \int_0^4 \left(\frac{e^{2x}}{4-x} \cdot \left(\frac{4-x}{2} \right) \right) dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^4 e^{2x} dx = \frac{1}{2} \left[\frac{e^{2x}}{2} \right]_0^4 = \frac{1}{4} (e^8 - 1) \approx 745. \end{aligned}$$

3. (1 PONT) POLÁRTRANSZFORMÁCIÓ SEGÍTSÉGÉVEL HATÁROZZUK MEG A KÖVETKEZŐ INTEGRÁLT, AHOL D AZ ORIGÓ KÖZÉPPONTÚ, EGYSÉGSUGARÚ KÖRLAP MÁSODIK SÍKNEGYEDBE ESŐ RÉSZÉ!

$$\iint_D (x - y)^2 dx dy$$

Megoldás:

Az egyszerűbb kezelhetőség és az átláthatóság kedvéért ismét vizsgáljuk meg grafikusán is a D síkrészünket. A síkrész a következő ábrán a piros vonal alatt található.



Világos, hogy az egységsugarú, origó középpontú kör az $x^2 + y^2 = 1$ összefüggés segítségével írható fel, melyből $y = \pm\sqrt{1-x^2}$, melyből jelen esetben a pozitív rész az érdekes a számunkra, hiszen az x -tengely felett vagyunk.

Formalizáljuk D -t először még Descartes-féle koordinátarendszerben:

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 0, 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2} \right\},$$

mely alapján a meghatározandó integrál az

$$\int_{-1}^0 \left(\int_{y=0}^{y=\sqrt{1-x^2}} (x-y)^2 dy \right) dx$$

alakban adódik. Mi most mégsem ezt fogjuk kiszámolni, hanem eleget fogunk tenni a feladat kérdésének és áttérünk polárkoordinátákra. Ebben az esetben a vizsgált síkrész a következőképpen formalizálható:

$$D^* = \left\{ (r, \varphi) : 0 \leq r \leq 1, \frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \pi \right\},$$

a meghatározandó integrál pedig az

$$\iint_{D^*} (r \cos \varphi - r \sin \varphi)^2 \cdot r dr d\varphi$$

formában írható fel, alaposan megfontolva, hogy a Jacobi-mátrix determinánsa (r) esetén az abszolútérték elhagyható, hiszen a példában $0 \leq r \leq 1$. Jól van, minden készenáll ahhoz, hogy izomból nekiugorjunk a cuccnak. Persze közben azért próbálunk vigyázni arra is, hogy ne kövessük el számítási és elméleti hibákat, de valahogy így néz ki a helyzet szituációja:

$$\begin{aligned} \iint_{D^*} (r \cos \varphi - r \sin \varphi)^2 \cdot r dr d\varphi &= \iint_{D^*} (r^2 \cos^2 \varphi - 2r^2 \cos \varphi \sin \varphi + r^2 \sin^2 \varphi) \cdot r dr d\varphi = \\ &= \iint_{D^*} (r^3 \cos^2 \varphi - 2r^3 \cos \varphi \sin \varphi + r^3 \sin^2 \varphi) dr d\varphi = \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(\int_0^1 r^3 \cdot (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi - 2 \sin \varphi \cos \varphi) dr \right) d\varphi = \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (1 - \sin 2\varphi) \left(\int_0^1 r^3 dr \right) d\varphi = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (1 - \sin 2\varphi) \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^1 d\varphi = \frac{1}{4} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (1 - \sin 2\varphi) d\varphi = \\ &= \frac{1}{4} \left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 1 d\varphi - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin 2\varphi d\varphi \right) = \frac{1}{4} \left([\varphi]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} + \left[\frac{\cos 2\varphi}{2} \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \right) = \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} (\cos 2\pi - \cos \pi) \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{\pi}{2} + 1 \right) = \frac{\pi + 2}{8}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$