

Név: Unger Tamás István

Neptun: FTD1YJ

Web: <http://maxwell.sze.hu/~ungert>

KALKULUS II., HARMADIK HÁZI FELADAT

1. (1,5 PONT) HATÁROZZUK MEG A KÖVETKEZŐ HATÁRÉRTÉKEKET:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow A} \frac{x^2 + xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

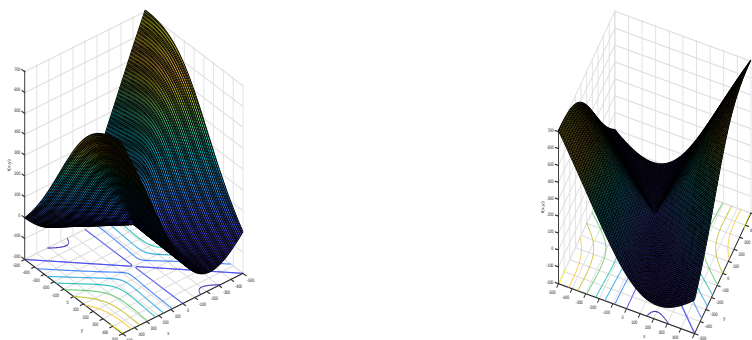
ahol

- (a) $A = (0, 0)$,
- (b) $A = (-2, -\infty)$,
- (c) $A = (-\infty, \infty)$.

Megoldás:

Az egyszerűbb kezelhetőség kedvéért legyen $f(x, y) = \frac{x^2 + xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, a feladatban tehát ennek az $f(x, y)$ kétváltozós függvénynek a határértékeit vizsgáljuk. Ehhez először határozzuk meg a kétváltozós függvény értelmezési tartományát. Világos, hogy a tört nevezője nem lehet nulla. Ezen kívül a nevezőben egy gyökös kifejezés van, alatta két valós szám négyzetösszege található. Mivel a négyzetösszeg csak pozitív vagy nulla lehet, ezért az egyetlen kikötésünk, hogy $x^2 + y^2 \neq 0$, így az értelmezési tartományból ki kell dobnunk a $(0, 0)$ pontot. Így tehát $D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Segítségképpen, a láthatóság kedvéért álljon itt a vizsgált kétváltozós függvény grafikonja egy korlátos intervallumon, mielőtt még nekiállunk a határértékek kiszámításához.



Kezdjük az (a) ponttal. Látjuk, hogy bár az $A = (0, 0)$ nem része a függvény értelmezési tartományának, mégis torlódási pont, mert A minden környezete tartalmaz A -tól különböző D_f -beli elemet. A határérték tehát ebben a pontban vizsgálható. Mivel a kifejezés klasszikusan "0"-típusú, átalakításért kiált. Próbálkozzunk meg a polárkoordinátákkal:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi \quad \Leftrightarrow \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arctan \frac{y}{x}.$$

Írjuk át a kifejezésünket a következőképpen:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{\substack{r \rightarrow 0^+ \\ \varphi \in [0, 2\pi)}} \frac{r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \cos \varphi \sin \varphi}{r} = \lim_{\substack{r \rightarrow 0^+ \\ \varphi \in [0, 2\pi)}} r (\cos^2 \varphi + \cos \varphi \sin \varphi).$$

Itt egy pillanatra megállunk. Egy szorzatkifejezést kaptunk. Látjuk, hogy r tart a nullához, ez tiszta sor. Azt kellene belátnunk, hogy a zárójelben található trigonometrikus kifejezés korlátos. Tudjuk, hogy

$$0 \leq \cos^2 \varphi \leq 1, \text{ valamint azt, hogy } -1 \leq \cos \varphi \sin \varphi \leq 1 \quad \forall \varphi \in \mathbb{R},$$

tehát $-1 \leq \cos^2 \varphi + \cos \varphi \sin \varphi \leq 2$, azaz a zárójelben lévő trigonometrikus kifejezés korlátos. Ebből már következik, hogy

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{\substack{r \rightarrow 0^+ \\ \varphi \in [0, 2\pi)}} r (\cos^2 \varphi + \cos \varphi \sin \varphi) = 0.$$

A feladat (b) részében $A = (-2, -\infty)$, tehát a

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (-2, -\infty)} \frac{x^2 + xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

határértéket vizsgáljuk. Világos, hogy $(-2, -\infty)$ torlódási pont, és egyértelmű, hogy ebben az esetben egy " ∞ "-típusú határértékkel van dolgunk, ezért próbáljunk vele megbirkózni a domináns tagok, tehát y legmagasabb hatványainak kiemelésével:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (-2, -\infty)} \frac{x^2 + xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (-2, -\infty)} \frac{y}{\sqrt{y^2}} \frac{\frac{x^2}{y} + x}{\sqrt{1 + \frac{x^2}{y^2}}}.$$

Itt állunk meg néhány szóra. Először is kikerüljük azt a hibát, amely miatt az esetek kilencven százalékában elrontjuk az ilyen példákat, tehát észrevesszük, hogy $y \rightarrow -\infty$ esetén $\sqrt{y^2} = -y$, amely miatt a példában $\frac{y}{\sqrt{y^2}} \rightarrow -1$. Tudjuk továbbá, hogy $\frac{x^2}{y} \rightarrow 0$, tehát

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (-2, -\infty)} \frac{y}{\sqrt{y^2}} \frac{\frac{x^2}{y} + x}{\sqrt{1 + \frac{x^2}{y^2}}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (-2, -\infty)} (-1) \cdot \frac{\frac{x^2}{y} + x}{\sqrt{1 + \frac{x^2}{y^2}}} = (-1) \cdot (-2) = 2.$$

A feladat utolsó, (c) részében $A = (-\infty, \infty)$, ez is torlódási pontja D_f -nek. A kérdés tehát a

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (-\infty, \infty)} \frac{x^2 + xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

határérték. Ismét " ∞ "-típusú kifejezéssel van dolgunk, próbálkozzunk meg hát a domináns tagok, azaz x és y legnagyobb hatványainak kiemelésével. Tapasztalt hallgatóként már fel sem merül bennünk, hogy ez a recept itt működni fog, hiszen akkor nem ez lenne a (c) feladat, de azért fussuk meg a tiszteletköroket:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (-\infty, \infty)} \frac{x^2 + xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (-\infty, \infty)} \frac{x^2 y}{\sqrt{x^2 y^2}} \frac{\frac{1}{y} + \frac{1}{x}}{\sqrt{\frac{1}{y^2} + \frac{1}{x^2}}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (-\infty, \infty)} -x \cdot \frac{\frac{1}{y} + \frac{1}{x}}{\sqrt{\frac{1}{y^2} + \frac{1}{x^2}}}.$$

Pontosan úgy van, ahogy vártuk. Látjuk, hogy a szorzat első tagja $(-x)$ tart a ∞ -be, amíg a szorzat második tagjaként tetszelgő hányados határértéke nulla. Azt sejtjük, hogy a határérték nem létezik. Próbáljuk meg igazolni!

Első nekifutás: legyen először $x = -t$, $y = t$ ($t > 0$) és $t \rightarrow \infty$. Ekkor

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (-\infty, \infty)} \frac{x^2 + xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(-t)^2 + (-t) \cdot t}{\sqrt{(-t)^2 + t^2}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^2 - t^2}{\sqrt{2t^2}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{0}{\sqrt{2t^2}} = 0.$$

Második nekifutás: most legyen $x = -t$, $y = t^2$ ($t > 0$) és $t \rightarrow \infty$. Ekkor

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (-\infty, \infty)} \frac{x^2 + xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^2 - t^3}{\sqrt{t^2 + t^4}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^3}{\sqrt{t^4}} \frac{\frac{1}{t} - 1}{\sqrt{\frac{1}{t^2} + 1}} = \lim_{t \rightarrow \infty} t \cdot \frac{\frac{1}{t} - 1}{\sqrt{\frac{1}{t^2} + 1}} = -\infty,$$

látjuk tehát, hogyha kétféleképpen tartunk A -ba, akkor kétféle határértéket kapunk, a határérték tehát nem létezik. Kész, ennyi.

2. (0,5 PONT) ÍRJUK FEL AZ $f(x, y) = 1/(1 - x^2 + y)$ FÜGGVÉNY GRAFIKONJÁHOZ AZ $(1, 2)$ PONTBA HÚZOTT ÉRINTŐSÍK EGYENLETÉT!

Megoldás:

Látjuk, hogy az

$$f(x, y) = \frac{1}{1 - x^2 + y}$$

kétváltozós függvénnyel állunk szemben, releváns kérdés tehát, hogy a feladatban felkínált $(1, 2)$ pont vajon benne van-e egyáltalán ennek a kétváltozós függvénynek az értelmezési tartományában. Ezúttal nem szükséges D_f alapos kivesézése, fussunk neki a favágómódszerrel és helyettesítsünk be x helyére egyet, y helyére kettőt. Ekkor $f(1, 2) = \frac{1}{2}$, ami rendben van, tudunk tehát érintősíkot definiálni az adott ponthoz. Az (a, b) pont $z(x, y)$ érintősíkjának egyenlete:

$$z(x, y) = f(a, b) + \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right|_{(x,y)=(a,b)} (x - a) + \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right|_{(x,y)=(a,b)} (y - b).$$

Ez egy elég mechanikus feladat, vergődjük át hát magunkat az egyes komponensein az egyenletnek, aztán pedig tegyük össze őket.

A függvény helyettesítési értéke:

$$f(a, b) = f(1, 2) = \frac{1}{1 - 1 + 2} = \frac{1}{2};$$

Az x -szerinti parciális deriváltfüggvény:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (1 - x^2 + y)^{-1} = (-1) \cdot \frac{1}{(1 - x^2 + y)^2} \cdot (-2x) = \frac{2x}{(1 - x^2 + y)^2};$$

Ennek az értéke az $(1, 2)$ pontban:

$$\left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right|_{(x,y)=(1,2)} = \frac{2}{(1 - 1^2 + 2)^2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2};$$

Az y -szerinti parciális deriváltfüggvény:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (1 - x^2 + y)^{-1} = (-1) \cdot \frac{1}{(1 - x^2 + y)^2} \cdot 1 = -\frac{1}{(1 - x^2 + y)^2};$$

Ennek az értéke az $(1, 2)$ pontban:

$$\left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right|_{(x, y) = (1, 2)} = -\frac{1}{(1 - 1^2 + 2)^2} = -\frac{1}{4}.$$

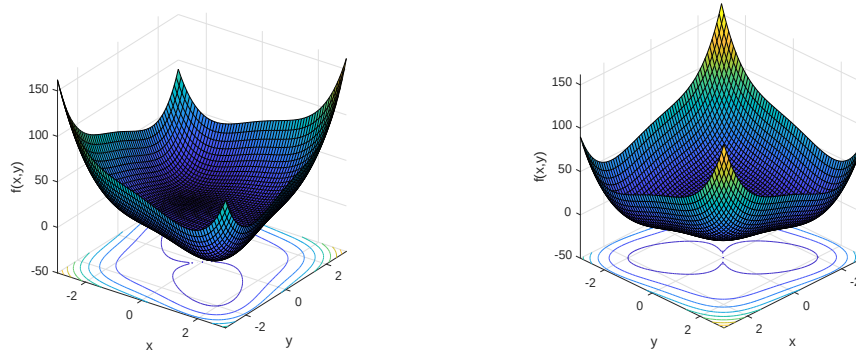
Szuper, minden komponensünk megvan, most rakjuk össze az egészet $z(x, y)$ egyenlete szerint, és ennyi-kész-vége:

$$z(x, y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(x - 1) - \frac{1}{4}(y - 2) = \frac{x}{2} - \frac{y}{4} + \frac{1}{2}.$$

3. (1 PONT) HATÁROZZUK MEG $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$ SZÉLSŐÉRTÉKEIT!

Megoldás:

Az biztosan nem árt senkinek, ha vetünk egy szó szerint felületes pillantást a kétváltozós függvényre $\mathbb{R}^2$ valamilyen kompakt intervallumán az origó környezetében. Az eredmény alább látható.



A feladat megoldása szükségszerűen úgy kezdődik, hogy felírjuk a gradiensvektort, majd megnézzük, hogy mely pontokban tűnik el, azaz mely pontokban lesz egyenlő a kétdimenziós nullvektorral. Ugorjunk neki:

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right) = (4x^3 - 4x + 4y, 4y^3 + 4x - 4y).$$

Ennek a vektornak kell eltűnnie, tehát a megoldandó egyenletrendszer (egyből leosztva mindkét oldalukat négygyel):

$$\begin{cases} x^3 - x + y = 0, \\ y^3 + x - y = 0. \end{cases}$$

Már látjuk, hogy az $a_1 = (0, 0)$ triviális megoldása az egyenletrendszernek, de ne rohanjunk előre, ez még később is ki fog pottyanni az algebrai masszírozásból. Amúgy nem kifejezetten tűnik a dolog rutinfeladatnak, de azért abszolválható. Tekintsük a második egyenletet:

$$y(y^2 - 1) + x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -y(y^2 - 1).$$

Kifejeztük x -et, csodálatos. Dobjuk vissza az összefüggésünket az első egyenletbe:

$$-y^3(y^2 - 1)^3 + y(y^2 - 1) + y = 0 \Leftrightarrow y^3[-(y^2 - 1)^3 + 1] = 0.$$

Itt már látszik, hogy mi a helyzet szituációja. Először is az egyenlet igaz, ha $y^3 = 0 \Leftrightarrow y = 0$, így az első megoldás $a_1 = (0, 0)$, hurrá. Másodsorban igaz az egyenlet, ha

$$(y^2 - 1)^3 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad y^2 - 1 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad y = \pm\sqrt{2},$$

ezeket a gyököket visszahelyettesítve x egyenletébe kapjuk meg a számunkra fontos, további kettő koordinátapárt: $a_2 = (\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $a_3 = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$. Azt tehát már állíthatjuk, hogy $f(x, y)$ -nak a_1 , a_2 és a_3 pontokban szélsőértéke *lehet*.

Tekintsük most a második deriváltakat:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} &= 12x^2 - 4, & \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} &= 12y^2 - 4, \\ \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} &= 4, & \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x} &= 4, \end{aligned}$$

így a Hesse-determinánsunk:

$$D = \begin{vmatrix} 12x^2 - 4 & 4 \\ 4 & 12y^2 - 4 \end{vmatrix}.$$

Most nézzük, hogy mi a helyzet $a_1 = (0, 0)$ esetén:

$$D = \begin{vmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} = 16 - 16 = 0,$$

azaz a_1 lehet szélsőérték hely is, illetve nyeregpont is. Természetesen most sincsen akkora szerencsénk, hogy közvetlenül a tétel segítségével tudjunk nyilatkozni. A sejtésünk, hogy nincsen szélsőérték, azaz a függvény $(0, 0)$ tetszőlegesen kicsi környezetében felvesz pozitív és negatív értékeket is.

Legyen először $y = -x$, $x \neq 0$. Ekkor

$$f(x, -x) = x^4 + x^4 - 2x^2 - 4x^2 - 2x^2 = 2x^4 - 8x^2 = x^2(2x^2 - 8),$$

és tudjuk, hogy x^2 biztosan pozitív, de a szorzat második tagja nulla közelében már negatív, így a szorzat, tehát a függvényérték is negatív.

Másodszor pedig legyen $x = y$, $x \neq 0$. Ekkor:

$$f(x, x) = x^4 + x^4 - 2x^2 + 4x^2 - 2x^2 = 2x^4 > 0,$$

tehát a függvénynek a_1 -ben nyeregpontja van.

Következik az $a_2 = (\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ esete:

$$D = \begin{vmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{vmatrix} = 20^2 - 4^2 > 0,$$

tehát $f(x, y)$ -nek a_2 -ben szélsőértéke van. Mivel ebben az esetben $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} > 0$, ezért $a_2 = (\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ -ben szigorú helyi minimum van.

Vegyük észre, hogy a koordináták előjelváltása sem a második derivált, sem a Hesse-determináns előjelét nem befolyásolja, ezért ugyanez igaz $a_3 = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ esetében is, tehát ott is szigorú helyi minimum van. ■