

Név: Unger Tamás István

Neptun: FTD1YJ

Web: <http://maxwell.sze.hu/~ungert>

KALKULUS II., MÁSODIK HÁZI FELADAT

1. (1 PONT) KONVERGENS? ABSZOLÚT KONVERGENS?

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}.$$

Megoldás:

A feladat teljesen nyilvánvalóan arra kíváncsi, hogy elsajátítottuk-e az alternáló sorok konvergenciájának vizsgálatát. Ehhez a Leibniz-kritérium használata a legkézenfekvőbb, de mielőtt még ökölrel belecsapnánk a lecsóba, nézzük meg, hogy használhatjuk-e egyáltalán. Ehhez azt kell megvizsgálnunk, hogy az

$$a_n = \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$$

általános tagú sorozat pozitív-e (i), monoton csökkenő-e (ii), illetve nulla-e a határértéke abban az esetben, ha $n \rightarrow \infty$ (iii).

- (i) Az n , az $\ln n$ és a $\sqrt{n}$ elemi függvények pozitívak $\forall n \geq 2$ esetén, így az $\sqrt{\ln n}$ és az $n\sqrt{\ln n}$ függvények is pozitívak, ezért nyilvánvalóan pozitív az utóbbi reciproka, az $\frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$ is $\forall n \geq 2$. A sorozat tehát pozitív.
- (ii) Az n , az $\ln n$ és a $\sqrt{n}$ elemi függvények monoton nőnek $\forall n \geq 2$ esetén, így az $\sqrt{\ln n}$ és az $n\sqrt{\ln n}$ függvények is monoton nőnek, így az utóbbi reciproka értelem szerűen monoton csökkenő lesz. A sorozat tehát monoton csökkenő.
- (iii) Tudjuk, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} n = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} = \infty$, ezért hasonlóan igaz, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\ln n} = \lim_{n \rightarrow \infty} n\sqrt{\ln n} = \infty$. Ha az utóbbi tart a végtelenbe, akkor a reciproka tart a nullához, tehát $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}} = 0$. A sorozat határértéke tehát nulla.

Hátradőlhetünk, használhatjuk a Leibniz-kritériumot. A tanult tétel és a fenti feltételek teljesülése miatt kimondhatjuk tehát, hogy mivel a sorozat határértéke nulla, a

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$$

alternáló sor konvergens. Ezzel még az abszolút konvergenciáról természetesen egy szót sem szóltunk, bár a feladat – sajnos – ezt is kérdezi.

Az abszolút konvergencia eldöntéséhez meg kell vizsgálnunk, hogy konvergens-e a következő sor:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}.$$

Ha konvergens, az alternáló sorunk abszolút konvergens. Amennyiben a fenti sor divergens, úgy az abszolút konvergencia nem teljesül, az alternáló sorunk csak feltételesen konvergens. Ízlés kérdése, hogy kinek mi jut eszébe a_n -ról, de nekem például az jutott eszembe, hogy ha $f(n) = \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$, akkor $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}$, ami szinte felkínálja magát az integrálásra. Próbálkozzunk tehát az integrálkritériummal!

A tétel szerint itt is vannak feltételeink: a vizsgált $f(x)$ -nek folytonosnak, monoton csökkenőnek és pozitívnak kell lennie. Az első két feltétel teljesülését már $x = n$ helyettesítés mellett beláttuk, ismételni felesleges. A folytonosság pedig triviális a $[2, \infty)$ intervallumon, hiszen az elemi függvények, melyekből $f(x)$ felépülni hivatott, mind folytonosak az előbb említett értelmezési tartományon, valamint teljesül, hogy a nevező az említett értelmezési tartományon sehol sem nulla. Az integrálkritérium tehát használható. Ebben az esetben az

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{\ln x}} dx$$

improprius integrál konvergenciáját vizsgáljuk. Mivel én béna vagyok és mindig eltévedek a notációtengerben, amikor az improprius integrált helyettesítéssel kell megoldani, ezért inkább először szeretném külön meghatározni a primitív függvényt, majd utána szeretném használni a Newton-Leibniz-formulát. Elnézést érte, ha ez nem túl szép.

$$\int \frac{1}{x\sqrt{\ln x}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{\xi}} d\xi = \int \xi^{-\frac{1}{2}} d\xi = \frac{\xi^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{\xi} + C = 2\sqrt{\ln x} + C.$$

$$\xi = \ln x$$

$$\frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{x} \rightarrow d\xi = \frac{1}{x} dx$$

Jöhet a Newton-Leibniz-formula:

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{\ln x}} dx = \lim_{\vartheta \rightarrow \infty} \left(2\sqrt{\ln \vartheta} \right) - \left(2\sqrt{\ln 2} \right).$$

Álljunk meg itt egy szóra. A különbség második tagja egy pozitív szám, annyi amennyi, nem kell kiszámolni. A különbség első tagja egy határérték. Mivel a gyökfüggvény és a logaritmusfüggvény is monoton nő, határértékük a végtelenben végtelen, így az összetett függvény határértéke is végtelen. Ebből következik, hogy az improprius integrál divergens / nem létezik, tehát:

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{\ln x}} dx = \infty.$$

A tanult tétel alapján tehát azt mondhatjuk, hogy

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$$

divergens, így az eredeti

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$$

alternáló sorunk *nem abszolút konvergens*, kizárólag feltétles konvergenciáról beszélhetünk.

2. (1 PONT) HOL KONVERGENS?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n \sqrt{n}}{2n+1} (3x+2)^{2n-3}.$$

Megoldás:

A sor általános tagja rendkívül csúnya, de nem ijedünk meg, hanem megpróbálunk következetesen végigmenni azokon a lépéseken, amelyeket a legutóbbi konzultáción már láttunk. Vagy jutunk valamire, vagy nem, de az legalább biztos. Az első lépés az értelmezési tartomány meghatározása.

$$n=1 \text{ esetén: } f_1(x) = \frac{4 \cdot 1}{3} (3x+2)^{-1} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{3x+2}, \quad \text{ezért } x \neq -\frac{2}{3},$$

$$n=2 \text{ esetén: } f_2(x) = \frac{16 \cdot \sqrt{2}}{5} (3x+2)^1 = \frac{16\sqrt{2}}{5} (3x+2) \quad \checkmark,$$

$n > 2$ esetén további kikötéssel nem kell élnünk.

Az értelmezési tartományunk tehát

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{2}{3} \right\}.$$

Vizsgáljuk a konvergenciát mondjuk hányadoskritériummal úgy, ahogy azt a konzultáción is csináltuk. Intenzív, könnyen elszámolható és elírható algebrai masszírozás veszi kezdetét:

$$\begin{aligned} \left| \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} \right| &= \left| \frac{\frac{4^{n+1} \sqrt{n+1}}{2(n+1)+1} \cdot (3x+2)^{2(n+1)-3}}{\frac{4^n \sqrt{n}}{2n+1} \cdot (3x+2)^{2n-3}} \right| = \left| \frac{4^{n+1} \sqrt{n+1}}{2(n+1)+1} \cdot \frac{2n+1}{4^n \sqrt{n}} \right| \cdot \left| \frac{(3x+2)^{2n-1}}{(3x+2)^{2n-3}} \right| = \\ &= \left| \frac{4^{n+1} \sqrt{n+1}}{4^n \sqrt{n}} \cdot \frac{2n+1}{2(n+1)+1} \right| \cdot |3x+2|^2. \end{aligned}$$

Nem tűnik szebbnek, pedig jobban állunk, mint valaha. A szorzat első tagját az úgynevezett "Szabó Tamás"-recept alapján úgy pakoltam át, hogy a hasonlóan mutató tagok egy törtet alkossanak. Most pedig azt kellene belátnunk, hogy az a kifejezés, ami az első abszolútértéken belül van, hova konvergál, ha $n \rightarrow \infty$. Nyilvánvaló, hogy az abszolútérték elhagyható, hiszen a kifejezés az azt alkotó elemi függvények tulajdonságai miatt pozitív lesz $\forall n \geq 1$. Haladjunk lépésenként, nézzük az első tört határértékét, amely a szokásos "domináns-kiemeléssel" könnyedén meghatározható:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^{n+1} \sqrt{n+1}}{4^n \sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^{n+1}}{4^n} \cdot \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}} \cdot \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{n}}}{1} = 4.$$

Négy a határérték, hiszen az első tag értéke 4, a második tag értéke 1, a harmadik tört pedig 1-hez tart. Hasonlóképpen ("domináns-kiemeléssel") határozzuk meg a második tört határértékét is:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{2(n+1)+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{2n+3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n} \cdot \frac{2 + \frac{1}{n}}{2 + \frac{3}{n}} = 1.$$

Ezt szerintem nem kell indokolni, a kurzus eddigi anyagai alapján világos, miért egy a határérték. De ha mégis, hát azért, mert az $\frac{n}{n}$ értéke 1, az $\frac{1}{n}$ és a $\frac{3}{n}$ pedig tart a nullához. Mivel tudjuk, hogy a szorzat határértéke megegyezik a tagok határértékeinek szorzatával, ezért azt kaptuk, hogy

$$\left| \frac{4^{n+1}\sqrt{n+1}}{4^n\sqrt{n}} \cdot \frac{2n+1}{2(n+1)+1} \right| \cdot |3x+2|^2 \rightarrow 4 \cdot |3x+2|^2, \text{ ha } n \rightarrow \infty.$$

Ismét használjuk a hányadoskritériummal kapcsolatos ismereteinket. Tudjuk, hogy a sor abszolút konvergens x -ben, ha $4 \cdot |3x+2|^2 < 1$. Engedjük rá az algebra-úthengert:

$$\begin{aligned} 4 \cdot |3x+2|^2 < 1 &\Leftrightarrow |3x+2|^2 < \frac{1}{4} \Leftrightarrow |3x+2| < \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < 3x+2 < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -\frac{5}{2} < 3x < -\frac{3}{2} \Leftrightarrow -\frac{5}{6} < x < -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Fantasztikus, állítsunk is pár dolgot. A sor tehát abszolút konvergens x -ben, ha

$$x \in \left(-\frac{5}{6}, -\frac{1}{2}\right) \setminus \left\{-\frac{2}{3}\right\},$$

valamint divergens x -ben, ha

$$x > -\frac{1}{2} \quad \text{vagy} \quad x < -\frac{5}{6}.$$

Elég nagy szívnak tűnik, de a két szélső esetet külön-külön kell vizsgálnunk. Nézzük mi a helyzet, ha $x = -\frac{5}{6}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n \sqrt{n}}{2n+1} \left(-\frac{1}{2}\right)^{2n-3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n \sqrt{n}}{2n+1} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{-3} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{-3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4 \cdot \frac{1}{4})^n \sqrt{n}}{2n+1}.$$

A kiemelt konstanssal ne foglalkozunk, a kérdés egyszerűen csak

$$\sum \frac{1^n \sqrt{n}}{2n+1} = \sum \frac{\sqrt{n}}{2n+1}$$

konvergenciája. Látjuk, hogy elég nagy n -re

$$\frac{\sqrt{n}}{2n+1} \approx \frac{n^{\frac{1}{2}}}{2n} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0.$$

Jó lenne valamifajta összehasonlító teszt. Használok a kedvenc "Szabó Tamás"-receptemet ("elemjük ki a domináns tagot"). Legyen $a_n = \frac{\sqrt{n}}{2n+1}$. Kell nekünk egy b_n :

$$\frac{\sqrt{n}}{2n+1} = \frac{\sqrt{n}}{n} \cdot \frac{1}{2 + \frac{1}{n}}$$

A szorzat második tagja jól láthatóan $\frac{1}{2}$ -hez tart, legyen tehát $L = \frac{1}{2} > 0$ szám, valamint $b_n = \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$. Ekkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{2} = L > 0,$$

ezért tudjuk, hogy

$$\sum \frac{\sqrt{n}}{2n+1} \sim \sum \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}.$$

Mivel $p = \frac{1}{2} < 1$, ezért a jobb oldali sor a tanult tétel alapján divergens. Ebből következik, hogy az eredetileg vizsgált sorunk is divergens, tehát a sor divergens $x = -\frac{5}{6}$ -ban.

Nézzük mi a helyzet, ha $x = -\frac{1}{2}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n \sqrt{n}}{2n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n \sqrt{n}}{2n+1} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4 \cdot \frac{1}{4})^n \sqrt{n}}{2n+1}.$$

A kiemelt konstanssal ne foglalkozzunk, a kérdés egyszerűen csak

$$\sum \frac{1^n \sqrt{n}}{2n+1} = \sum \frac{\sqrt{n}}{2n+1}$$

konvergenciája. Visszakaptuk az előző esetben vizsgált sort, arról pedig már feljebb belátuk, hogy divergens. Így van ez most is, ebből következik, hogy az eredeti sorunk is divergens $x = -\frac{1}{2}$ -ben. Készen vagyunk.

3. (1 PONT) A BINOMIÁLIS SORBÓL KIINDULVA HATÁROZZUK MEG $\arcsin x$ HATVÁNYSORÁT $|x| < 1$ -BEN.

Megoldás:

Egy ideje már birtokában vagyunk annak a rendkívül hasznos tudásnak, hogy

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C.$$

Induljunk ki az integrandusból, vagy legalább próbáljuk meg felírni a hatványsorát a binomiális sor segítségével:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = (1+(-x^2))^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-x^2)^n, \text{ ha } |-x^2| < 1 \Leftrightarrow |x| < 1.$$

Megtanultuk, hogy a hatványsorok integrálhatók is, ezért integráljuk az egyenlet mindkét oldalát:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x = \int \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-1)^n x^{2n} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + C,$$

ha $|x| < 1$. Kérdés még, hogy mennyi a C . Tudjuk, hogy $\arcsin 0 = 0$, így az $x = 0$ helyettesítéssel élve

$$0 = \sum_{n=0}^{\infty} 0 + C$$

adódik, tehát $C = 0$. A keresett hatványsorunk ezek alapján:

$$\arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \text{ ha } |x| < 1. \quad \blacksquare$$