

Név: Unger Tamás István

Neptun: FTD1YJ

Web: <http://maxwell.sze.hu/~ungert>

KALKULUS II., ELSŐ HÁZI FELADAT

1. (1 PONT) HATÁROZZUK MEG:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^3 - 3}{n^2 - 5n}} = ?$$

Megoldás:

Vegyünk észre néhány dolgot. Először is

$$\frac{n^3 - 3}{n^2 - 5n} \approx \frac{n^3}{n^2 - 5n} \approx \frac{n^3}{n^2} = n,$$

amennyiben n elég nagy. Megtanultuk, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1,$$

így hát jogosan vannak olyasféle sejtéseink, melyek szerint

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^3 - 3}{n^2 - 5n}} = 1.$$

A sejtéssel persze még nem megyünk sokra, amíg nem igazoljuk azt. Igazoljuk hát rendőrelvvel! Ehhez a gyök alatt szereplő törtkifejezést kell becsülgetni. Alulról is, felülről is. A sorrend mindegy, én most először adok egy felső becslést. Törtet úgy becsülünk felülről, hogy

- a számlálót növeljük és/vagy a
- a nevezőt csökkentjük.

Fussunk neki a számlálónak, azzal egyszerű dolgunk van:

$$n^3 - 3 < n^3, \text{ ez triviális becslés, nincs mit indokolni raja, de mégis sokat nyerünk vele.}$$

A nevező már gázosabb, de ott is viszonylag egyszerűen eredményre lehet jutni:

$$n^2 - 5n > n^2 - \frac{1}{5}n^2 = \frac{4}{5}n^2.$$

Mit csináltunk? Eredetileg n^2 -ből $5n$ -et vonunk ki. A kifejezést csökkenteni szeretnénk, tehát többet szeretnénk n^2 -ből kivonni, mint $5n$. Tudjuk, hogy $5n < \frac{1}{5}n^2 \Leftrightarrow 25n < n^2 \Leftrightarrow 25 < n$. És hát $n > 25$ triviális, hiszen n -nel a végtelenbe kocogunk. Ez pipa, rakjuk hát össze a felső becslésünket és nézzük meg, hogy miért jártunk vele jól:

$$\frac{n^3 - 3}{n^2 - 5n} < \frac{n^3}{\frac{4}{5}n^2} = \frac{5}{4}n,$$

ami azért fantasztikus, mert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{5}{4}n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{5}{4}} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1 \cdot 1 = 1$$

a tanultak szerint. Ez rendben, adtunk felső becslést, tudjuk a határértékét is. Most adjunk egy alsó becslést. Alsó becslést egy törtnek úgy adhatunk, hogy

- a számlálót csökkentjük és/vagy a
- a nevezőt növeljük.

Kezdjünk el babrálni először a számlálóval, valahogy így:

$$n^3 - 3 > n^3 - \frac{1}{3}n^3 = \frac{2}{3}n^3.$$

Mi történt? Gondolkodjunk! A köbös tagból konstans hármat vonunk ki. Vonjunk ki belőle valami nagyobb, például $\frac{1}{3}n^3$ -t! Ezt megtehetjük, de most is figyeljünk oda, hogy $3 < \frac{1}{3}n^3 \Leftrightarrow 9 < n^3 \Leftrightarrow \sqrt[3]{9} < n$, ami szintén igaz, ha n fut a végtelenbe. Nézzünk valamiféle becslést a nevezőre is, eképpen:

$$n^2 - 5n < n^2.$$

Triviális becslésről van szó, nincs mit indokolni ezen sem. Megvagyunk az alsó becsléssel is, rakjuk hát össze és nézzük meg, hogy miért jártunk vele jól:

$$\frac{n^3 - 3}{n^2 - 5n} > \frac{\frac{2}{3}n^3}{n^2} = \frac{2}{3}n,$$

ami azért elképesztően pazar, mert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{2}{3}n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{2}{3}} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1 \cdot 1 = 1.$$

Dobjunk össze mindent, amit tudunk.

$$\frac{2}{3}n \leq \frac{n^3 - 3}{n^2 - 5n} \leq \frac{5}{4}n,$$

amelyből egyértelműen következik, hogy

$$\sqrt[n]{\frac{2}{3}n} \leq \sqrt[n]{\frac{n^3 - 3}{n^2 - 5n}} \leq \sqrt[n]{\frac{5}{4}n}.$$

Vegyük ennek a határértékét $n \rightarrow \infty$ esetén:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{2}{3}n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^3 - 3}{n^2 - 5n}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{5}{4}n}.$$

A két szélső határértékről már beláttuk, hogy 1. De a rendőrelv miatt tudjuk, hogy a középső határérték is 1, hiszen annak a sorozatnak úgymond kutya kötelessége 1-hez tartani. Ennyi, készen vagyunk:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^3 - 3}{n^2 - 5n}} = 1.$$

2. (1 PONT) HATÁROZZUK MEG:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n-1} + \frac{3}{n^2}\right)^{2n} = ?$$

Megoldás:

Nem kellene különösebben tapasztalt diákszemek hozzá, hogy meglássuk, itt bizony a "matektanszék kedvenc ZH-példája" áll előttünk, hogy valahogy átvergődjünk rajta. Szóval az van, hogy valahogyan ki kellene alakítani a közkedvelt

$$\left(1 + \frac{1}{\spadesuit}\right)^{\spadesuit}$$

alakot, amelyről tudjuk, hogy e -felé tart, ha $\spadesuit$ változójával (lehet történetesen n is, de mindegy) tartunk a végtelenbe. Az azért *brute force*-módon is belátható, hogy a sorozat konvergencia, helyettesítsünk be n helyére két nagy értéket, mondjuk $n = 2000$ -et és $n = 6000$ -et:

$$\left(1 + \frac{2}{2000-1} + \frac{3}{2000^2}\right)^{2 \cdot 2000} \approx 57,762, \quad \left(1 + \frac{2}{6000-1} + \frac{3}{6000^2}\right)^{2 \cdot 6000} \approx 54,652.$$

Szóval látjuk, hogy ez a határérték 55 körül alakul. Akkor fussunk neki a megoldásnak, ami nem több, mint egy hosszabb algebrai masszírozása az eredeti példának, eképpen:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n-1} + \frac{3}{n^2}\right)^{2n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2n^2 + 3n - 3}{n^2(n-1)}\right)^{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{n^2(n-1)}{2n^2+3n-3}}\right)^{2n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{n^2(n-1)}{2n^2+3n-3}}\right)^{\frac{n^2(n-1)}{2n^2+3n-3}} \right]^{\frac{2n^2+3n-3}{n^2(n-1)} \cdot 2n}. \end{aligned}$$

Itt most megállhatunk egy szóra. A kapcsos zárójel belsejében kialakult az $\left(1 + \frac{1}{\spadesuit}\right)^{\spadesuit}$ kifejezés, a határértéke e . Azt viszont még nem tudjuk, hogy hanyadik hatványon van. Ehhez ki kell számolni a kitevőjének a határértékét (amennyiben létezik). Ezt az egyszerűség kedvéért tegyük meg külön:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n(2n^2 + 3n - 3)}{n^2(n-1)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^3 + 6n^2 - 6n}{n^3 - n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{n^3} \cdot \frac{4 + \frac{6}{n} - \frac{6}{n^2}}{1 - \frac{1}{n}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 + \frac{6}{n} - \frac{6}{n^2}}{1 - \frac{1}{n}} = 4. \end{aligned}$$

Készen is vagyunk, a határérték tehát

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n-1} + \frac{3}{n^2}\right)^{2n} = e^4.$$

(Megj.: Csak önigazoló megnyugtatóképpen nézzük meg, hogy $e^4 \approx 54,59$, szóval elvileg rendben vagyunk.)

3. (1 PONT) DEFINÍCIÓ SZERINT IGAZOLJUK, HOGY:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n(\sqrt{n^2 - 1} - n)} = -2$$

Megoldás:

Mielőtt még komolyabb faragásba fognánk, használjuk fel a tippet és tényleg bővítsük ki a törtet $\sqrt{n^2 - 1} - n$ kongujáltjával:

$$\frac{1}{n(\sqrt{n^2 - 1} - n)} \cdot \frac{\sqrt{n^2 - 1} + n}{\sqrt{n^2 - 1} + n} = \frac{\sqrt{n^2 - 1} + n}{n(n^2 - 1 - n^2)} = \frac{\sqrt{n^2 - 1} + n}{-n}.$$

Ez azért jelentősen szebb, mint ami az eredeti feladatkiírásban szerepelt. Most írjuk fel a határérték definícióját, abból még baj sosem volt. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Szeretnénk egy $\nu = \nu(\varepsilon)$ -t, hogy $n > \nu(\varepsilon)$ esetén

$$\left| \frac{\sqrt{n^2 - 1} + n}{-n} + 2 \right| < \varepsilon.$$

Kezdjünk bele az intenzív algebrai masszírozásba:

$$\left| \frac{\sqrt{n^2 - 1} + n}{-n} + 2 \right| = \left| \frac{\sqrt{n^2 - 1} + n - 2n}{-n} \right| = \left| \frac{\sqrt{n^2 - 1} - n}{-n} \right|.$$

A nevező abszolútértéke n , a számláló abszolútértéke pedig pont a mínusz egyszerese lesz:

$$\frac{n - \sqrt{n^2 - 1}}{n} = 1 - \frac{\sqrt{n^2 - 1}}{n} < \varepsilon.$$

Ezt még gondoljuk tovább egy kicsit:

$$1 - \frac{\sqrt{n^2 - 1}}{n} \cdot \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1 - \frac{\sqrt{\frac{n^2 - 1}{n^2}}}{1} = 1 - \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}} < \varepsilon.$$

Gondolkodjunk egy kicsit. Az egyenlőtlenség jobb oldalán egy tetszőleges pozitív szám áll. A bal oldalon egy ennél kisebb számot keresünk, de úgy, hogy n értéke 1-nél nagyobb egész. Ha $n = 1$, akkor a bal oldala az egyenlőtlenségnek éppen 1. Ahogy n -nel a végtelen felé tartunk, úgy közelít a bal oldal nulla felé. Ezt azt jelenti, hogyha ε -t 1-nél nagyobbak választjuk, akkor $n \geq 1$ esetén mindig teljesülni fog az egyenlőtlenség $\Leftrightarrow \nu = 1$ választás jó. Nézzük meg, hogy mi a szitu, ha ε nulla és egy közé esik. Ehhez sajnos meg kell oldani az egyenlőtlenséget...

$$1 - \varepsilon < \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}} \Leftrightarrow \frac{1}{n^2} < 1 - (1 - \varepsilon)^2 \Leftrightarrow \frac{1}{n^2} < 2\varepsilon - \varepsilon^2.$$

Az egyenlőtlenség jobb oldala felfogható egy "fordított parabola"-ként, hiszen a négyzetes tag együttthatója negatív. Így a számunkra érdekes megoldás:

$$n > \sqrt{-\frac{1}{\varepsilon(\varepsilon - 2)}}.$$

Ez jó is lesz $\nu(\varepsilon)$ -nak, tehát ha $\varepsilon \in (0, 1] \rightarrow \nu(\varepsilon) = \sqrt{-\frac{1}{\varepsilon(\varepsilon - 2)}}$. Készennyi, elvileg.