

Integrálszámítás. $n=2$

$$I = [a, b] \times [c, d]$$

intervallum,
téglalapot $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ $\mathbb{R}$ -értékű. $P: I$ beosztása

$$I \quad P = \{I_1, I_2, \dots, I_n\}$$

Darboux-féle alsó integrálközelítő összeg.

$$\underline{S}(f, P) = \sum_{k=1}^n m_k \mu(I_k), \quad \text{ahol} \quad m_k = \inf_{(x,y) \in I_k} f(x,y)$$

Darboux-féle felső integrálközelítő összeg. $\mu(I_k) = I_k$ mértéke $(n=2: \text{terület})$.

$$\bar{S}(f, P) = \sum_{k=1}^n M_k \mu(I_k), \quad \text{ahol}$$

$$M_k = \sup_{(x,y) \in I_k} f(x,y)$$

$$\mu(I_k) \text{ ha.}$$

$f \uparrow$ integrálható I -n, ha $\exists!$ S szám, hogy $\forall P, Q$ beosztása: $\underline{S}(f, P) \leq S \leq \bar{S}(f, Q)$.

Riemann-

$$S = \iint_I f(x,y) dx dy$$

Darboux-féle alsó integrál: $\iint_I f(x,y) dx dy = \sup \{ \underline{S}(f, P) : P \text{ beosztás} \}$

Darboux-féle felső integrál: $\iint_I f(x,y) dx dy = \inf \{ \bar{S}(f, P) : P \text{ beosztás} \}$

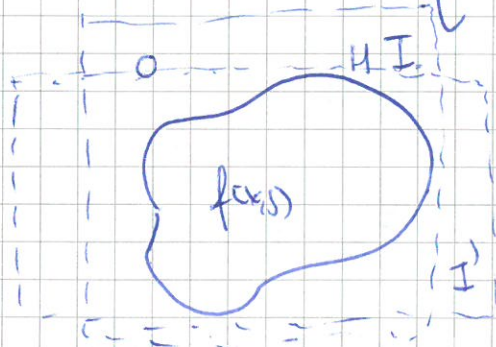
f Riemann-integrálható I -n, ha:

$$\iint_{\bar{I}} f(x,y) dx dy = \iint_I f(x,y) dx dy. \quad (=S)$$

$H \subseteq \mathbb{R}^2$ korlátos halmaz, $f: H \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos.

Legyen I olyan téglalap, hogy $H \subseteq I$.

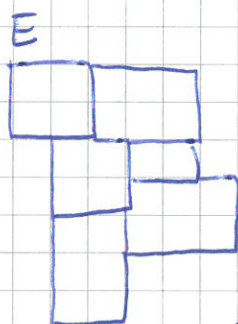
Legyen $\hat{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & \text{ha } (x,y) \in H \\ 0, & \text{ha } (x,y) \in I \text{ de } (x,y) \notin H \end{cases}$



$$\iint_H f(x,y) dx dy = \iint_I \hat{f}(x,y) dx dy$$

feltéve, hogy ez létezik.

Egyszerű alakzat:



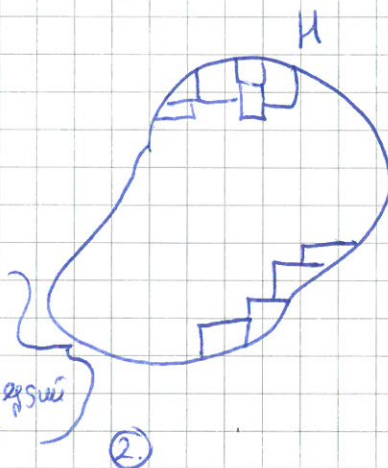
$$E = I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_n$$

$$\mu(E) = \sum_{j=1}^n \mu(I_j).$$

H korlátos halmaz

H belső Jordan-mértékű:

$$\mu(H) = \sup \left\{ \mu(E) : E \subset H \text{ belsője it egész alakzat} \right\}$$



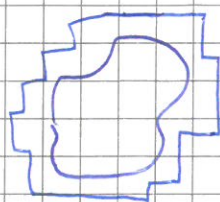
$$\mu(H) = 0,$$

ha H -nek nincs belső pontja.

BELSŐ PONT.
TORLÓDÁS. PONT. } !!

H külső Jordan-mértéke:

$$\bar{\mu}(H) = \inf \left\{ \mu(E) : E \text{ } H \text{ köré írt egyszerű alakzat} \right\}$$



H Jordan-mérhető, ha $\mu(H) = \bar{\mu}(H)$.

Ha H zárt és konvex: Jordan-mérhető. ■

$$H \subseteq \mathbb{R}^2$$

H karakterisztikus függvénye:

$$\varphi_H(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{ha } (x, y) \in H \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

Ha H Jordan-mérhető: $\mu(H) = \iint_H \varphi_H(x, y) dx dy$.

Kettős integrál kiszámítása:

H/H' Tétel:

TfH $f : [a; b] \times [c; d] \rightarrow \mathbb{R}$ függvény folytonos.

Ellen:

$$\iint_{[a,b] \times [c,d]} f(x,y) dx dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y) dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y) dy \right) dx.$$

a somend nideff.

leggen $f(x,y) = x^2 y$, $I = [1,6] \times [1,3] = [1,5] \times [1,3]$

$$\iint_{[1,5] \times [1,3]} x^2 y dx dy = \int_1^3 \left(\int_1^5 x^2 y dx \right) dy = \int_1^3 \left[\frac{y x^3}{3} \right]_1^5 dy =$$

$$\int_1^3 \left(\frac{125}{3} y - \frac{8}{3} y \right) dy = \int_1^3 39 y dy = \left[\frac{39 y^2}{2} \right]_1^3 =$$

$$= \frac{39 \cdot 9}{2} - \frac{39}{2} = 39 \cdot \left(\frac{8}{2} \right) = \underline{\underline{\frac{39 \cdot 4}{5}}} (=156).$$

$$\iint_{[1,5] \times [1,3]} f(x,y) dx dy = \int_2^5 \left(\int_1^3 x^2 y dy \right) dx = \int_2^5 \left[\frac{x^2 y^2}{2} \right]_1^3 dx =$$

$$= \int_2^5 \left(x^2 \cdot \frac{9}{2} - x^2 \cdot \frac{1}{2} \right) dx = \int_2^5 4 x^2 dx = \left[\frac{4 x^3}{3} \right]_2^5 = 4 \left(\frac{125}{3} - \frac{8}{3} \right) =$$

$$= 4 \cdot \left(\frac{117}{3} \right) = \underline{\underline{156}}$$

X-tangente varietatelt normalitatomany:

leggen $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ intervallum.

$$\left. \begin{array}{l} \varphi_1: [a,b] \rightarrow \mathbb{R} \\ \varphi_2: [a,b] \rightarrow \mathbb{R} \end{array} \right\} \text{ folytonosak.}$$

Tegyük fel, hogy $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x) \quad \forall x \in [a,b]$.

$$N_x = \left\{ (x, y) : a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x) \right\}$$

4.5. Tétel (Könnyebb verzió).

Tf h $f : N_x \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos.

Ekkor
$$\iint_{N_x} f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

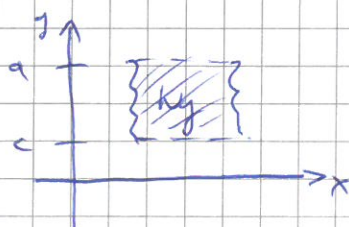
y-tengelyre vonatkoztatott normálalakítás:

Legyen $[c, d] \subseteq \mathbb{R}$ intervallum,

$$\left. \begin{array}{l} \varphi_1 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R} \\ \varphi_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R} \end{array} \right\} \text{folytonos.}$$

$$\varphi_1(y) \leq \varphi_2(y)$$

$$N_y = \left\{ (x, y) : c \leq y \leq d \text{ és } \varphi_1(y) \leq x \leq \varphi_2(y) \right\}$$



4.5' Tétel (lájtósa)

Legyen $f : N_y \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos Ekkor:

$$\iint_{N_y} f(x, y) dx dy = \int_c^d \left(\int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x, y) dx \right) dy.$$

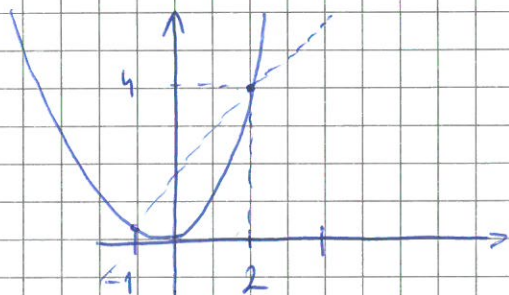
Példa

$$\iint_D xy \, dx \, dy = ? , \text{ ahol } D \text{ az } y = x+2 \text{ és az}$$

$$y = x^2 \text{ görbe által határolt síkterület.}$$

Metszéspontok: $x^2 = x+2$

$$x^2 - x - 2 = 0 \quad x_{1,2} = 2, -1$$

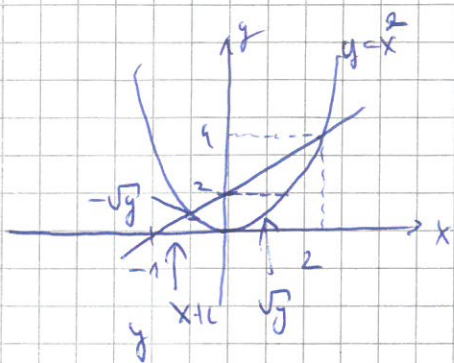


$$D = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 2 \text{ és } x^2 \leq y \leq x+2 \}$$

$$\begin{aligned} \iint_D xy \, dx \, dy &= \int_{-1}^2 \left(\int_{x^2}^{x+2} xy \, dy \right) dx = \int_{-1}^2 \left(\left[x \frac{y^2}{2} \right]_{x^2}^{x+2} \right) dx = \\ &= \int_{-1}^2 x \left(\frac{(x+2)^2}{2} - \frac{x^4}{2} \right) dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^2 (x^3 + 2x^2 + 4x - x^5) dx = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{x^4}{4} + 2 \frac{x^3}{3} + 4 \frac{x^2}{2} - \frac{x^6}{6} \right]_{-1}^2 = \end{aligned}$$

$$= \textcircled{11\frac{1}{6}}.$$

D-re tekintettel y-tengelyre vonatkoztatott normáltatomágyra tekinteni.



$$\left. \begin{array}{l} x = y - 2 \\ x = \sqrt{y} \end{array} \right\} \text{ itt mozoghat}$$

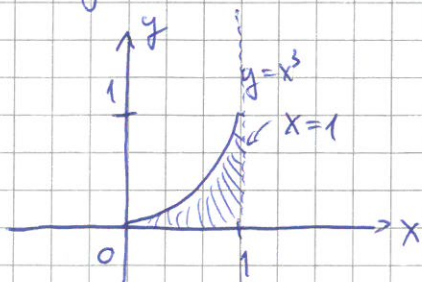
KÉTFELE KELL BONTANI

$$D = \left\{ (x,y) : 0 \leq y \leq 1, -\sqrt{y} \leq x \leq \sqrt{y} \right\} \\ \cup \left\{ (x,y) : 1 \leq y \leq 4, y-2 \leq x \leq \sqrt{y} \right\}$$

$$\iint_D f(x,y) dx dy = \int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} xy dx \right) dy + \int_1^4 \left(\int_{y-2}^{\sqrt{y}} xy dy \right) dx.$$

Határozzuk meg:

$$\int_0^1 \left(\int_{\sqrt[3]{y}}^1 e^{x^4} dx \right) dy =$$



$$\sqrt[3]{y} = x \Leftrightarrow y = x^3$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^{x^3} e^{x^4} dy \right) dx.$$

$$= \int_0^1 \left[y e^{x^4} \right]_{y=0}^{x^3} dx =$$

$$u = x^4 \\ \frac{du}{dx} = 4x^3$$

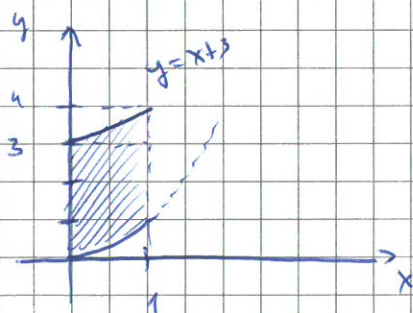
$$= \int_0^1 x^3 e^{x^4} dx = \frac{1}{4} \int_0^1 e^u du = \frac{1}{4} (e-1) = \underline{\underline{\frac{1}{4}(e-1)}} \quad \text{hisz v.}$$

⑦

Ábrázoljuk az integrálási tartományt és cseréljük fel az integrálási

Sorrendet!

$$\int_0^1 \int_{x^2}^{x+3} f(x,y) dy dx$$



x 0 és 1 között mozog

$$D = \{ (x,y) : 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq x+3 \}$$

$$= \{ (x,y) : 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq \sqrt{y} \} \cup$$

$$\cup \{ (x,y) : 1 \leq y \leq 3, 0 \leq x \leq 1 \} \cup$$

$$\cup \{ (x,y) : 3 \leq y \leq 4, y-3 \leq x \leq 1 \}$$

Tehát:

$$\int_0^1 \int_{x^2}^{x+3} f(x,y) dy dx = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{y}} f(x,y) dx dy + \int_1^3 \int_0^1 f(x,y) dx dy + \int_3^4 \int_{y-3}^1 f(x,y) dx dy.$$

pelda:

$$\int_{-1}^1 \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y) dy \right) dx$$

$$y = 1 - x^2$$

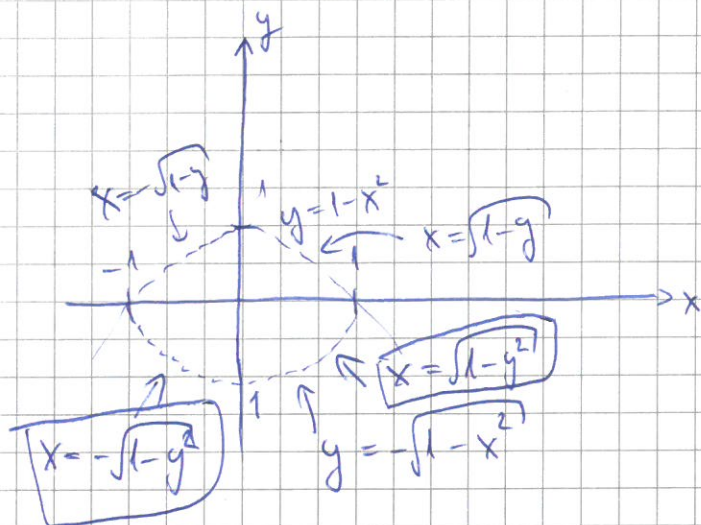
$$y = -\sqrt{1-x^2}$$

ez mi?

$$x^2 + y^2 = r$$

$$y^2 = r - x^2$$

$$y = \pm \sqrt{r - x^2}$$



$$y - 1 = -x^2$$

$$x^2 = 1 - y \Leftrightarrow$$

$$x = \pm \sqrt{1 - y}$$

$y = 1 - x^2$ és $y = -\sqrt{1 - x^2}$ görvét nézzük meg:

$$1 - x^2 = -\sqrt{1 - x^2}$$

$$(1 - x^2) = 1 - x^2$$

$$1 - 2x^2 + x^4 = 1 - x^2$$

$$-x^2 + x^4 = 0$$

$$x^2(x^2 - 1) = 0$$

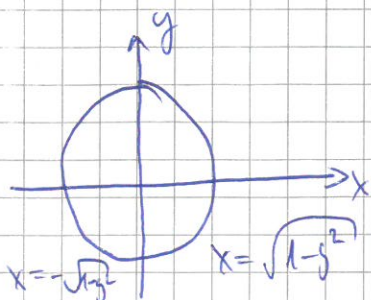
$$x = 0 \text{ vagy}$$

$$x = \pm 1 \checkmark$$

↑
hatis

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$x = \pm \sqrt{1 - y^2}$$

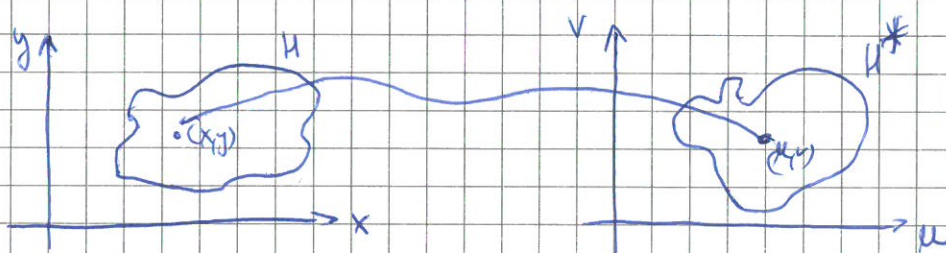


Megoldás:

$$= \int_{-1}^0 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y) dx dy + \int_0^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y) dx dy.$$

Ez nehezebb volt.

Integráltranszformáció:



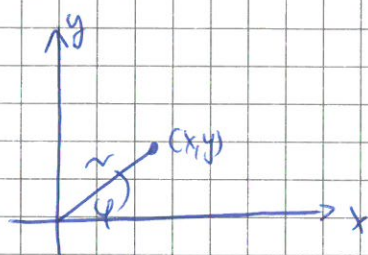
$$x = \varphi_1(u,v)$$

$$y = \varphi_2(u,v)$$

Jacobi-determináns:

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial u} \varphi_1(u,v) & \frac{\partial}{\partial v} \varphi_1(u,v) \\ \frac{\partial}{\partial u} \varphi_2(u,v) & \frac{\partial}{\partial v} \varphi_2(u,v) \end{vmatrix}.$$

Példa: polárkoordináták.



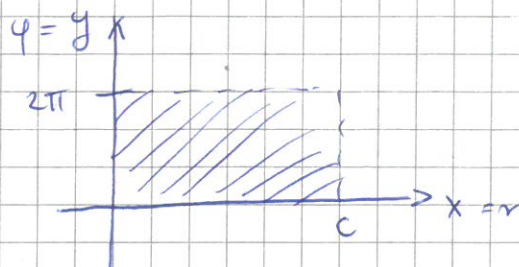
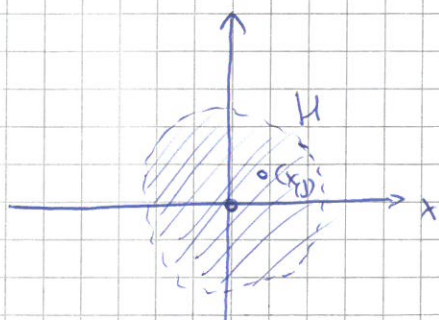
$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$$

Most u helyett r
 v helyett φ .

$$\varphi_1(r,\varphi) = r \cdot \cos \varphi$$

$$\varphi_2(r,\varphi) = r \cdot \sin \varphi.$$

Legyen H egy $(0,0)$ középpontú, C sugarú kör



$$J = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r \cos^2 \varphi + r \sin^2 \varphi =$$

$$r (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = r.$$

4.6. tétel:

$$\iint_H f(x,y) dx dy = \iint_{H^*} f(x_1(u,v), x_2(u,v)) |J(u,v)| du dv.$$

techn. feltétel: lecs. függvény

↑
absz. érték

Példa: C -sugarú gömb térfogata.

$$x^2 + y^2 + z^2 = C^2$$

$$z = \pm \sqrt{C^2 - x^2 - y^2}$$

$$\text{A térfogat fele: } \frac{V}{2} = \iint_H \sqrt{C^2 - x^2 - y^2} dx dy = \iint_{H^*} \sqrt{C^2 - r^2} \cdot r dr d\varphi =$$

$$H = \{ (x,y) : x^2 + y^2 \leq C^2 \} \quad \left. \vphantom{H = \{ (x,y) : x^2 + y^2 \leq C^2 \}} \right\} \int_0^{2\pi} \int_0^C \sqrt{C^2 - r^2} r dr d\varphi = ?$$

$$H^* = \{ (r,\varphi) : 0 \leq r \leq C, 0 \leq \varphi \leq 2\pi \}$$

(II)

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^c \sqrt{c^2 - r^2} \cdot r \, dr \, d\varphi = \int_0^{2\pi} \left(\int_c^0 -\frac{1}{2} \sqrt{t} \, dt \right) d\varphi =$$

$$t = c^2 - r^2$$

$$\frac{dt}{dr} = -2r$$

$$dt = -2r \, dr$$

$$-\frac{1}{2} dt = r \, dr$$

$$= \int_0^{2\pi} -\frac{1}{2} \left[\frac{t^{3/2}}{3/2} \right]_c^0 d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} +\frac{1}{2} \left(\frac{c^3}{3/2} \right) d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{c^3}{3} d\varphi = \frac{c^3}{3} [\varphi]_0^{2\pi} =$$

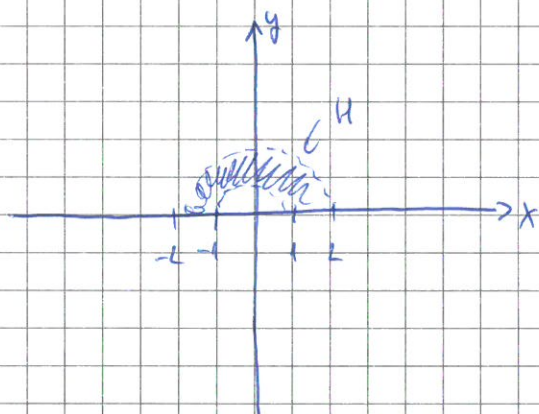
$$= \frac{2\pi}{1} \cdot \frac{2\pi c^3}{3}$$

tehát: $V = \frac{4\pi c^3}{3}$

További példa:

$$\iint_H \left(1 + \frac{y}{x}\right) dx \, dy$$

$$H = \left\{ (x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0 \right\}$$



Polarkoordináták:

$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi \quad \text{ahol}$$

$$1 \leq r \leq 2 \quad \text{és}$$

$$0 \leq \varphi \leq \pi$$

$$H^* = \left\{ (r, \varphi) : 1 \leq r \leq 2, 0 \leq \varphi \leq \pi \right\} \quad \text{ENNVI!}$$

Tehat:

$$\begin{aligned} \iint_H 1 + \frac{y}{x} \, dx \, dy &= \iint_{H^*} \left(1 + \frac{r \sin \varphi}{r \cos \varphi} \right) dr \, d\varphi = \\ &= \int_1^2 \int_0^\pi (1 + \tan \varphi) \, d\varphi \, dr = \int_1^2 \left(\int_0^\pi d\varphi + \int_0^\pi \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \, d\varphi \right) dr = \end{aligned}$$

$$\int \tan t \, dt = \int \frac{\sin t}{\cos t} \, dt = - \int \frac{-\sin t}{\cos t} \, dt = - \ln |\cos t| + C$$

$$= \int_1^2 \left[\varphi - \ln |\cos \varphi| \right]_0^\pi = \int_1^2 (\pi) \, dr = \pi \left[r \right]_1^2 =$$

$$= \underline{\underline{\pi.}}$$

Uj példa jön. (jegyzet, 122. oldal)

