

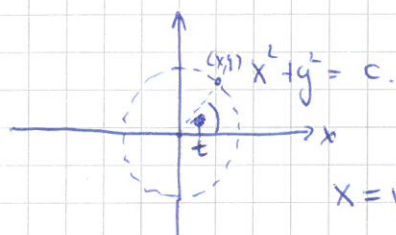
Görbe definíciója:

$$G \subseteq \mathbb{R}^n$$

Def: G görbe, ha G áll valamilyen $[a, b]$ intervallumon értelmezett

folytonos függvény képhalmazaként.

(pl.) a $(0, 0)$ középpontú, $\sqrt{c}$ sugarú kör névül a síkon.



$$x = \sqrt{c} \cos t, \quad y = \sqrt{c} \sin t$$

a keresett folytonos függvény: $\varphi: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ nem kériük
injektivitást!

$$\varphi(t) = (\sqrt{c} \cos t, \sqrt{c} \sin t)$$

Ennyi.

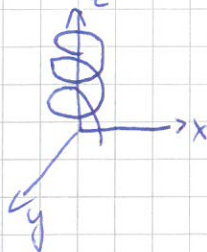
Másik példa $\mathbb{R}^3$ -ban:

csavarvonal.

$$x = \cos t, \quad y = \sin t$$

$$z = t$$

$$\text{Itt: } \varphi(t) = (\cos t, \sin t, t).$$



Volt analízis
2-ből.

Feltétel és szélsőérték:

(NYOMTATNI KELL)

$f: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ szélsőértéket keresünk valamilyen feltétel

mellett.

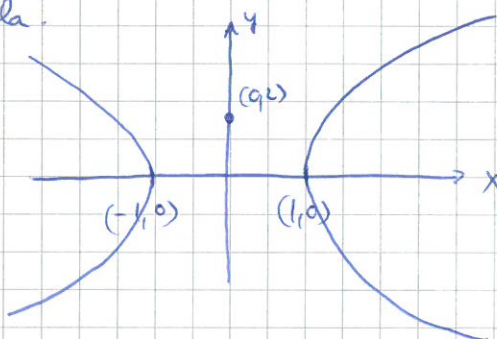
$g(x, y) = 0$ ilyen feltétel mellett.

1. példa $f(x,y) = x^2 + (y-2)^2$

feltétel: $x^2 - y^2 - 1 = 0$ (Itt: $g(x,y) = x^2 - y^2 - 1$)

f : $(0,2)$ -ponttól vett távolság négyzete ez.

A feltétel: egy hiperbola.



a hiperbolán lévő pontok közül melyik van a legközelebb és a legtávolabb a $(0,2)$ ponttól?

EZ VAN FORMALIZÁLVA.

2. példa $f(x,y) = (x-2)^2 + (y-2)^2$ szélsőértékeit az egyenestöröken.

feltétel: $x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 1 = 0$ technikai okok miatt.

$g(x,y)$ feltétel általánosan egy görbe a síkon.

Def.: $n=2$ -re. Azt mondjuk, hogy $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

f -nek $(a,b) \in D$ -ben feltételes ~~szélsőérték~~ helyi minimuma van, ha $g(a,b) = 0$ és

~~ha~~ $\forall \delta > 0$ úgy, hogy bármely $(x,y) \in D$,

$d((x,y), (a,b)) < \delta$ és $g(x,y) = 0$ esetén $f(x,y) \geq f(a,b)$.

RECEPT követendő.

$f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ szélsőértékét keressük.

$g(x, y) = 0$ feltétel mellett.

• teljesülnek bizonyos feltételek (nem vizsgáljuk soha, 97. oldal).

① Segédfüggvény kell: $F(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$

λ : Lagrange-féle multiplikátor.

② Megoldjuk:

$$\begin{cases} F'_x(x, y, \lambda) = 0 \\ F'_y(x, y, \lambda) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

Több megoldás is várható.

jelölje (x_0, y_0, λ_0) az
egyiket.

Kell: (x_0, y_0) belső pontja legyen f értelmezési
tartományának. (NEM VIZSGÁLJUK)

③ Megvizsgáljuk, hogy az $F(\cdot, \cdot, \lambda_0)$ -nak (x_0, y_0) feltétel

nélküli szélsőértéke-e.

IHa igen $\rightarrow (x_0, y_0)$ f -nek a $g(x, y) = 0$ feltétel nélküli
szélsőértéke.

Ennyire.

2. példa:

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y) = (x-2)^2 + (y-2)^2 - \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

$$F'_x(x, y, \lambda) = 2(x-2) - 2\lambda x = 0$$

$$F'_y(x, y, \lambda) = 2(y-2) - 2\lambda y = 0$$

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} 2(x-2) - 2\lambda x = 0 \\ 2(y-2) - 2\lambda y = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x-2 = \lambda x \\ y-2 = \lambda y \\ \downarrow \\ \lambda = \frac{x-2}{x} \\ \lambda = \frac{y-2}{y} \end{array}$$

③

$$\frac{2}{x} = 1 - \lambda \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{1}{1 - \lambda} \Leftrightarrow x = \frac{2}{1 - \lambda}$$

Kasunkban: $y = \frac{2}{1 - \lambda}$

$$\left(\frac{2}{1 - \lambda}\right)^2 + \left(\frac{2}{1 - \lambda}\right)^2 - 1 = 0$$

$$4 + 4 - (1 - \lambda)^2 = 0$$

$$8 - (1 - 2\lambda + \lambda^2) = 0$$

$$7 + 2\lambda + \lambda^2 = 0$$

$$\underline{\underline{\lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{8}}} \quad \text{adódik}$$

$$\lambda_1 = 1 + \sqrt{8} \quad x_1 - y_1 = \frac{2}{1 - (1 + \sqrt{8})} = -\frac{2}{\sqrt{8}} = -\frac{2}{2 \cdot \sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\lambda_2 = 1 - \sqrt{8} \quad x_2 = y_2 = \frac{2}{1 - (1 - \sqrt{8})} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{megvanak.}$$

$\lambda = \lambda_1$ vizsgáljuk:

$$F(x, y) = (x - 2)^2 + (y - 2)^2 - (1 + \sqrt{8})(x^2 + y^2 - 1)$$

Számszerűen van-e (x_1, y_1) -ben?

$$F''_{xx}(x, y) = 2 - 2\lambda_1 \quad F''_{xy} = F''_{yx} = 0$$

$$F''_{yy} = 2 - 2\lambda_1$$

$$D(x_1, y_1) = \begin{vmatrix} 2 - 2\lambda_1 & 0 \\ 0 & 2 - 2\lambda_1 \end{vmatrix} = (2 - 2\lambda_1)^2 > 0.$$

$$2 - 2\lambda_1 = 2 - 2(1 + \sqrt{8}) < 0. \Rightarrow \text{HELYI MAXIMUM VAN.}$$

f -nek (x_1, y_1) -ben feltételes helyi maximuma van.

$$\lambda = \lambda_2:$$

a deriváltak egyeneseit leolvashatjuk.

$$D(x_2, y_2) = \begin{vmatrix} 2-2\lambda_2 & 0 \\ 0 & 2-2\lambda_2 \end{vmatrix} = (2-2\lambda_2)^2 > 0$$

$$2 - 2 \cdot (1 - \sqrt{8}) = 2\sqrt{8} > 0$$

$F(\cdot, \cdot, \lambda_2)$ -nek (x_2, y_2) -ben helyi minimuma van.

$\Rightarrow f$ -nek (x_2, y_2) -ben feltételes helyi minimuma van.

1. példa megoldása:

$$\textcircled{1} F(x, y, \lambda) = x^2 + (y-2)^2 - \lambda(x^2 - y^2 - 1) =$$

$$\textcircled{2} F'_x(x, y, \lambda) = 2x - 2\lambda x = 0$$

$$F'_y(x, y, \lambda) = 2(y-2) + 2\lambda y = 0$$

$$x^2 - y^2 - 1 = 0$$

megoldjuk. (HF.)

$$(x_1, y_1, \lambda_1) = (\sqrt{2}, 1, 1)$$

$$(x_2, y_2, \lambda_2) = (-\sqrt{2}, 1, 1)$$

$\textcircled{3} \lambda = \lambda_1$ megadott:

$$F(x, y, 1) = x^2 + (y-2)^2 - (x^2 - y^2 - 1)$$

$$F''_{xx} = 2 - 2 = 0$$

$$F''_{yx} = F''_{xy} = 0$$

$$F''_{yy} = 2 + 2 = 4$$

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

37. tétel nem működik

Mit lehet tenni?

Vegyük észre:

$$F(x, y, 1) = x^2 + y^2 + y^2 - 4y + 4 - x^2 + y^2 + 1 = \underline{2y^2 - 4y + 5}$$

$$F'(x, y, 1) = 4y - 4 = 0 \Leftrightarrow 4y = 4 \Leftrightarrow \boxed{y=1}$$

	$y < 1$	$y = 1$	$y > 1$
F'	-	0	+
F	↘	helyi min	↗

$F(\cdot, \cdot, 1)$ -nek $(x_1, y_1) = (\sqrt{2}, 1)$ és $(x_2, y_2) = (-\sqrt{2}, 1)$ - be

számad helyi minimum van. $\Rightarrow$ f -nek feltétlenül helyi minimuma van itt. $\blacksquare$

Implícit függvény-tétel

$f(x, y) = 0$. Kérdés: Ki lehet-e fejezni ebből y -t x függvényeként?

Azaz: $\exists$ -e olyan φ függvény, ami x -től függ, hogy

$$f(x, \varphi(x)) = 0 \text{ fennáll.}$$

1. Példa: $f_1(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5 = 0$

$$f_1(x, y) = (x-1)^2 + (y-2)^2 = 0$$

$$(x-1)^2 = -(y-2)^2$$

Ez csak $(1, 2)$ -ben teljesül.

Patológikus eset: NEM a válasz.

2. példa

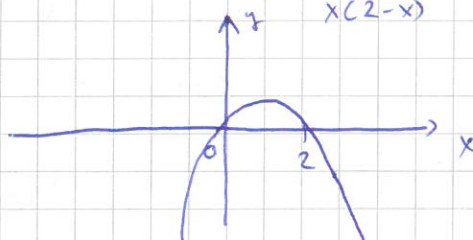
$$f_2(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$$

$$f_2(x, y) = (x-1)^2 + (y-2)^2 - 1 = 0$$

$$(y-2)^2 = 1 - (x-1)^2$$

$$y-2 = \pm \sqrt{1 - (x-1)^2}$$

$$y = 2 \pm \sqrt{1 - (x-1)^2} = 2 \pm \sqrt{2x - x^2}$$



Két megoldás van:

$$\varphi_1: [0; 2] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi_1(x) = 2 + \sqrt{2x - x^2}$$

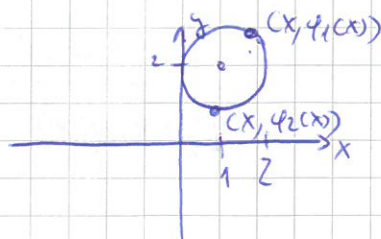
$$\varphi_2: [0; 2] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi_2(x) = 2 - \sqrt{2x - x^2}$$

Látjuk, hogy ha $x \in [0; 2] \rightarrow f(x, \varphi_1(x)) = 0$ és

$$f(x, \varphi_2(x)) = 0.$$

Geom:

$$f_2(x, y):$$



ennyi az egész

3. Példa:

$$f_3(x, y) = x^2 + y^2 - \sin(x^2 + y^2) = 0.$$

$$\text{Látjuk: } f_3(0, 0) = 0.$$

(7)

Feladat: y x függvényként?

Legalább $(0,0)$ egy környezetében!

Tétel: Legyen $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, tflh hogy f parciális deriváltjai léteznek és folytonosak.

legyen az (a,b) belső pontja D -nek.

Ha $f(a,b) = 0$ és $f'_y(a,b) \neq 0 \Rightarrow (a,b)$ pont egy

környezetében y előáll x vndg függvényként, azaz $\exists \delta > 0$ és

$\exists (a-\delta, a+\delta) \rightarrow \mathbb{R}$ úgy, hogy $\varphi(a) = b$ és $f(x, \varphi(x)) = 0$
 $\forall x \in (a-\delta, a+\delta)$.

Továbbá: $\exists$ U környezet (a,b) -nek, hogy $(x,y) \in U$ és $f(x,y) = 0$

$\Rightarrow y = \varphi(x)$ mely $x \in (a-\delta, a+\delta)$.

Az is igaz, hogy φ diffható és $\varphi'(a) = - \frac{f'_x(a,b)}{f'_y(a,b)}$.

Biz.: $f(x, \varphi(x)) = 0$

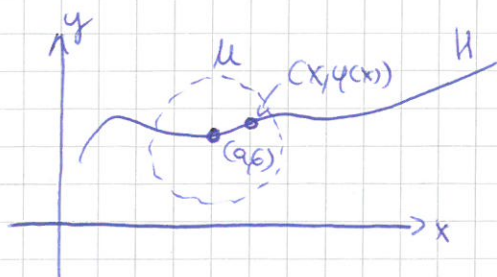
$$f'_x(x, \varphi(x)) \cdot 1 + f'_y(x, \varphi(x)) \varphi'(x) = 0$$

$$\Rightarrow \varphi'(a) = \frac{-f'_x(x, \varphi(x))}{f'_y(x, \varphi(x))}$$

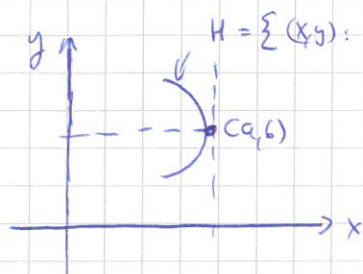
Szemléletes jelentés:

$H = \{ (x,y) : f(x,y) = 0 \}$. (a,b) pont egy környezetben

H helyen az φ függvény grafikonja.



nagyjából így.



Latjuk: itt H nem áll elő vnlgy
(egyetlen) φ függvény
grafikonjaként.

$$f_y(a, b) = 0 \text{ látszik.}$$

Feladat: ~~Előadók - a ben adott függvény~~

Előadók - a $f(x, y) = 0$ egyenlet által meghatározott
ponthalmaz egy φ egyváltozós függvény grafikonjaként
az adott (a, b) pont környezetében

Mi a $\varphi'(a)$?

1. példa

$$f_1(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5, \quad (a, b) = (1, 2)$$

$$f(1, 2) = 0. \quad \checkmark$$

$$f_{1y}' = 2y - 4$$

$$f_{1y}(1, 2) = 4 - 4 = 0.$$

Válasz: NEM.

2. példa:

$$(a, b) = (2, 2)$$

$$(f_2)'_y = 2y - 4 \quad (f_2)'_y(2, 2) = 0.$$

a $(2, 2)$ -ben a válasz NEM.

Nézzük most f_2 -t $(a, b) = (1, 3)$ -ban.

$$(f_2)'_y = 2 \cdot 3 - 4 \neq 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 \text{ és } \exists \varphi: (1-\delta; 1+\delta) \rightarrow \mathbb{R},$$

$$\text{hogy } f(x, \varphi(x)) = 0 \quad \forall x \in (1-\delta; 1+\delta).$$

$(1, 3)$ pont egy környezetben (a körvonal) y kifejezhető x függvényként.

3. példa

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - \sin(x^2 + y^2)$$

$$f(0, 0) = 0 \quad \checkmark \quad (a, b) = (0, 0)$$

$$f'_y(x, y) = 2y - \cos(x^2 + y^2) 2y$$

$$f'_y(0, 0) = 0 \quad \text{BAJ VAGY.}$$

legyen más:

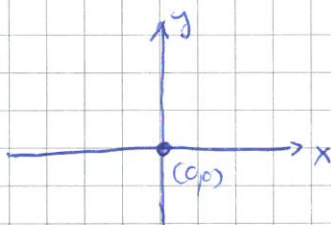
$$\text{legyen: } f(x, y) = x^2 + y^2 - \sin(x + y)$$

$$f'_y(x, y) = 2y - \cos(x + y)$$

$$f'_y(0, 0) = -1 \neq 0 \quad \checkmark$$

$$\exists \delta > 0 \text{ és } \exists \varphi: (-\delta; \delta) \rightarrow \mathbb{R} \text{ hogy}$$

$$x \in (-\delta; \delta) \text{ esetén } f(x, \varphi(x)) = 0.$$



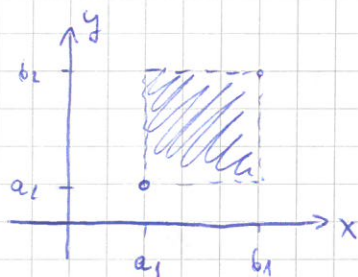
$$H = \{ (x, y) : f(x, y) = 0 \}.$$

IFT szerint: $\varphi'(0) = - \frac{f'_x(0,0)}{f'_y(0,0)} = - \frac{-1}{-1} = -1$

ennyi. Viccigén ilyen lehet.

Integrálszámítás lesz.

Intervallum:



Van: I intervallum.

$f: I \rightarrow \mathbb{R}$ KORLÁTOS függvény.

$P = \{ I_1, I_2, \dots, I_n \}$ beosztás

$m_j = \inf_{x \in I_j} f(x)$ folytonosság esetén minimum lehet.

feladás:

$$\int_I f(x) dx \text{ ált.}$$

$n=2$ -ben: $\int_{[a;b] \times [c;d]} f(x,y) d(x,y)$

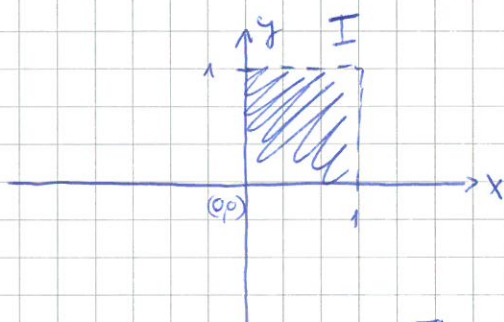
helyette: $\iint_{[a;b] \times [c;d]} f(x,y) dx dy$ így jelöljük.

Nézzünk két példát.

1. példa:

$$f(x,y) = x^2 + y^2.$$

$$I = [0, 1] \times [0, 1]$$



P_2 beosztás

$$I_{ij} = \left[\frac{i-1}{2}, \frac{i}{2} \right] \times \left[\frac{j-1}{2}, \frac{j}{2} \right].$$

$$1 \leq i, j \leq 2.$$

$$\underline{S}(f, P_2) = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \min_{(x,y) \in I_{ij}} f(x,y) \cdot \mu(I_{ij}) =$$
$$\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \left(\frac{(i-1)^2}{2^2} + \frac{(j-1)^2}{2^2} \right) \cdot \frac{1}{2^2} =$$

$$= \frac{1}{2^4} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \left((i-1)^2 + (j-1)^2 \right) =$$

$$= \frac{1}{2^4} \sum_{i=1}^2 \left(2(i-1)^2 + \sum_{j=1}^2 (j-1)^2 \right) =$$

$$= \frac{1}{2^4} \sum_{i=1}^2 \left(2(i-1)^2 + \frac{(2-1)2(2-1)}{6} \right) =$$

$$= \frac{1}{2^4} \left\{ \sum_{i=1}^2 2(i-1)^2 + 2 \cdot \frac{(2-1)2(2-1)}{6} \right\} =$$

$$= \frac{1}{2^4} \left\{ 2 \cdot \frac{(2-1)2(2-1)}{6} + 2 \cdot \frac{(2-1)2(2-1)}{6} \right\} =$$

$$= \frac{2(2-1)(2-1)}{3 \cdot 2^2}$$

(2)

$$\underline{S}(f, P_2) = \frac{(2-1)(22-1)}{3 \cdot 2^2} \leq \frac{2-22}{3 \cdot 2^2} = \frac{2}{3}$$

Hasonlóan: (nem fordítva)

$$\overline{S}(f, P_2) = \frac{(2+1)(22+1)}{3 \cdot 2^2} \geq \frac{2-22}{3 \cdot 2^2} = \frac{2}{3}$$

Mindkettő $\frac{2}{3}$ -hoz tart, ha $2 \rightarrow \infty$.

$f(x,y)$ Riemann-integrálható, $\int_I f(x,y) dx dy = \frac{2}{3}$ $\square$

2. példa

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x \text{ és } y \text{ is racionális} \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

$$I = [0,1] \times [0,1]$$

Bármilyen I -partíció is végtelen sok a darabja lesz racionális és nem racionális számpárokra.

$$\underline{S}(f, P) = \sum_{j=1}^n \inf_{(x,y) \in I_j} f(x,y) \mu(I_j) = 0$$

$$\overline{S}(f, P) = \sum_{j=1}^n \sup_{(x,y) \in I_j} f(x,y) \mu(I_j) = \mu(I)$$

$\Downarrow$

Nem R-integrálható. $\square$

