

Folytonosság.

$$f: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad a \in D.$$

f folytonos a -ban, ha $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

- x -

$f: D \rightarrow \mathbb{R}, \quad a \in D$ -ben folytonos.

Vektor-skalár.

g olyan skálár-skalár függvény, amely folytonos $f(a)$ -ban,

$\Rightarrow g \circ f$ is folytonos a -ban.

$$\left. \begin{array}{l} f(x,y) = \sin xy \text{ folytonos } \mathbb{R}^2\text{-en.} \\ g(x,y) = |z| \text{ folytonos } \mathbb{R}\text{-en} \end{array} \right\} \Rightarrow g \circ f = |\sin xy| \text{ folytonos } \mathbb{R}^2\text{-en.}$$

Hol folytonos?

$$f(x,y) = \begin{cases} \arctg\left(\frac{|x|+|y|}{x^2+y^2}\right), & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ -ben folytonos, mert f definiálójában szimpla függvény - műveletek megőrzik a folytonosságot.

↑
hányadosképlet + szimpla egy összetett függvény.

$\Rightarrow$ csak $(0,0)$ -ban kell a folytonosságot vizsgálni!

$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi$$

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ \varphi \in [0,2\pi)}} \arctg\left(\frac{|x|+|y|}{x^2+y^2}\right) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \arctg\left(\frac{r \cdot |\cos \varphi| + r \cdot |\sin \varphi|}{r^2}\right) =$$

$$= \lim_{\substack{r \rightarrow 0^+ \\ \varphi \in (0, \pi)}} \frac{1}{r} \underbrace{(|\cos \varphi| + |\sin \varphi|)}_{\text{lehet-e enél 0 a határérték?}}$$

$$(|\cos \varphi| + |\sin \varphi|)^2 = \cos^2 \varphi + 2 \cdot |\cos \varphi \sin \varphi| + \sin^2 \varphi = 1 + 2 \cdot |\cos \varphi \sin \varphi| \geq 1$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Tehát } |\cos \varphi| + |\sin \varphi| \geq 1 \\ \text{Másrészt } |\cos \varphi| + |\sin \varphi| \leq 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{a lehatárzás határértéke } \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}. \quad \text{Tehát } f(x, y) \text{ nem folytonos } (0, 0) \text{-ban.}$$

Hol folytonos?

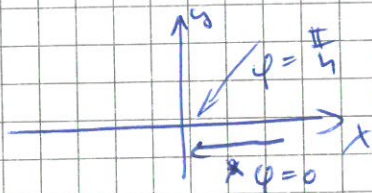
$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & , \text{ ha } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \text{ ha } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ -ben f folytonos, hiszen f def.-ben simple függvénynek kellene lennie a folytonosságot. $\Rightarrow$ csak $(0, 0)$ -ban vizsgáljuk.

Polarizáció:

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = \lim_{\substack{r \rightarrow 0^+ \\ \varphi \in (0, \pi)}} \frac{\cancel{r} \sin \varphi \cos \varphi}{\cancel{r}} = \lim_{\substack{r \rightarrow 0^+ \\ \varphi \in (0, \pi)}} \frac{\sin 2\varphi}{2} = \begin{cases} 0, & \text{ ha } \varphi = 0 \\ \frac{1}{2}, & \text{ ha } \varphi = \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

Szélő: Nincs HATÁRÉRTÉK.



Kicsit másképp is igazolható, hogy nincs határérték:

$$x = t, y = 0 \text{ és } t \rightarrow 0$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \cdot 0}{t^2 + 0^2} = \lim_{t \rightarrow 0} 0 = \underline{\underline{0}}$$

$$x = y = t \text{ és } t \rightarrow 0$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t, t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \cdot t}{t^2 + t^2} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

$\Rightarrow f$ -nek nincs határértéke az origóban $\Rightarrow$ nem is folytonos. $\square$

Parciális deriváltak

$$f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto f(x, y)$$

(a, b) belső pontja D -nek.

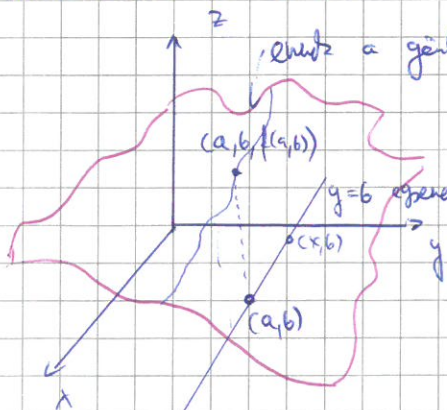


$$f'_x(a, b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x, b) - f(a, b)}{x - a} \quad y = b \text{ rögzített.}$$

$\uparrow$
x szerinti parciális derivált.

$\uparrow$
eggyváltozós függvényt tekintve a kétváltozós esetben.

ÉRINTŐHELYEK SÉGE. $\frac{1}{2}$ mi ez?



Erőlt a görbét az érintőmetszetsége lesz az.

$f'_x(a, b)$ az $z = f(x, y)$ felület azon $(a, b, f(a, b))$ pontban lévő érintője, amely az $y = b$ síkban van benne.

Alt:

$$f'_i(\underline{a}) = \lim_{x_i \rightarrow a_i} \frac{f(a_1, a_2, \dots, x_i, \dots, a_n) - f(a_1, a_2, \dots, a_n)}{x_i - a_i}$$

Igy lehet fel.

$$f'_y(a,b) = \lim_{y \rightarrow b} \frac{f(a,y) - f(a,b)}{y - b}$$

példa.

VOLT:
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$f'_x(0,0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{0}{x^2} - 0}{x} = \underline{\underline{0}}$$

$$f'_y(0,0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y - 0} = \frac{\frac{0}{y^2} - 0}{y} = \underline{\underline{0}}$$

Formálisan:

$$f(x,y) = 2xy + x \cos y$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2y + \cos y \quad f'_x(0,0) = 1$$

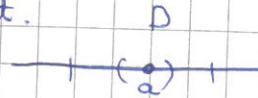
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x + x(-\sin y) \quad f'_y(0,0) = 0$$

Itt lehet foglalkozni, de ha egyetlen pontos módszer van élethosszig,
akkor nem lehet így, csak def. szerinti.

TOTÁLIS DERIVÁLT

Ugyazuk vissza az egyváltozós esetre.

1. $f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, a egy belső pont.



1. def:

f differenciálható a -ban, ha $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ létezik és véges

2. def:

f differenciálható a -ban, ha $\exists q \in \mathbb{R}$ és $w: D \rightarrow \mathbb{R}$, hogy $\lim_{x \rightarrow a} w(x) = 0$

$$\text{és } \forall x \in D: f(x) - f(a) = \underbrace{q(x-a)}_{\text{lineáris közelítés}} + \underbrace{w(x)(x-a)}_{\text{rendkívül kis tag.}}$$

hisz, ha $x \rightarrow a$.

f függvény a -pontban közelíthető egy lineáris függvénygel. Ezt látjuk

$$f(x) \approx f(a) + q(x-a) \text{ ezt mondja.}$$

A két definíció ekvivalens.

2. def. $\Rightarrow$ 1. def.

Kell: $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ létezik és véges.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{q(x-a) + w(x)(x-a)}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a} (q + w(x)) = q.$$

1. def. $\Rightarrow$ 2. def.

$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ létezik és véges. Kell: $\exists q \in \mathbb{R}$ és $w: D \rightarrow \mathbb{R}$.

legyen: $g := f'(a)$ és

$$w(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} - f'(a), & x \in D, x \neq a \\ 0 & \text{ha } x = a \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} w(x) = 0 \quad \checkmark$$

$$f(x) - f(a) = g(x-a) + w(x)(x-a)$$

Bd:

$$x \neq a: f(x) - f(a) = f'(a)(x-a) + \left(\frac{f(x) - f(a)}{x-a} - f'(a) \right) (x-a) \quad \checkmark$$

$$x = a: f(a) - f(a) = f'(a)(a-a) + 0 \cdot (a-a) \quad \checkmark$$

OK.
teljesül.

Az eredeti függvény jól közelíthető egy lineáris függvénnyel.

$f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, (a,b) belső pontja D -nek.

f diffható (a,b) -ben, ha $\exists g_1, g_2 \in \mathbb{R}$ úgy, hogy

$$\exists w_1, w_2: D \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} w_1(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} w_2(x,y) = 0 \quad \text{és} \quad \forall (x,y) \in D \text{-re:}$$

$$f(x,y) - f(a,b) = \underbrace{g_1(x-a) + g_2(y-b)}_{\text{lineáris közelítés}} + \underbrace{w_1(x,y)(x-a) + w_2(x,y)(y-b)}_{\text{hici, ha } (x,y)}$$

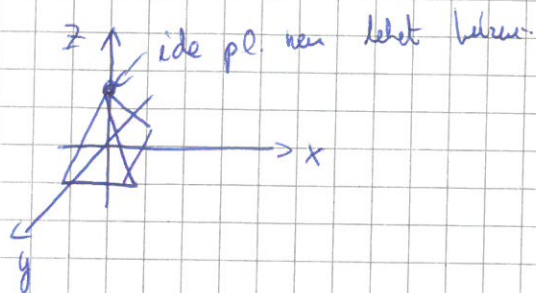
ÉRINTŐSÍKOT LEHET-E

HÚZNI? EZ A KÉRDÉS.

Közel van (a,b) -hez.

HA IGEW $\Rightarrow$ VAN DERIVÁLT!

Milyen felületnek nincs érintősejtje?



Később: $q-2$ a párhuzamos érintők lehetnek.

29. Tétel: $f(x,y)$ diffható (a,b) -ben $\Rightarrow \exists$ a párhuzamos érintők.

$$\begin{aligned} f'_x(a,b) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x,b) - f(a,b)}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{q_1(x-a) + q_2(b-b) + w_1(x-a) + w_2(b-b)}{x-a} = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} (q_1 + w_1(x,y)) = q_1. \quad \left(\text{Hasonlóan } q_2 = f'_y(x,y) \right) \end{aligned}$$

Totális diffhatóság $\Rightarrow$ párhuzamos diffhatóság.

$n=2$ esetén:

$$\text{grad } f(x,y) = (q_1, q_2) = \nabla f(x,y)$$

Teljesítmény n -re:

$$\nabla f(\underline{a}) = \text{grad } f(\underline{a}) = (q_1, q_2, \dots, q_n) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

$$f(\underline{x}) - f(\underline{a}) = \nabla f(\underline{a}) \cdot (\underline{x} - \underline{a}) + \omega(\underline{x})(\underline{x} - \underline{a}).$$

$$\text{ahol } \lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{a}} \omega(\underline{x}) = 0.$$

28. tétel:

f ~~teljesen~~ totálisan differenciálható $\underline{a}$ -ban $\Rightarrow f$ folytonos $\underline{a}$ -ban.

Ha $f(x,y)$ diffható (a,b) -ben, akkor fejtünk (a,b) -ben.

Biz:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \left[\underbrace{f(a,b)}_{\downarrow 0} + \underbrace{a_1(x-a)}_{\downarrow 0} + \underbrace{a_2(y-b)}_{\downarrow 0} + \underbrace{w_1(x,y)}_{\downarrow 0} \underbrace{(x-a)}_{\downarrow 0} + \underbrace{w_2(x,y)}_{\downarrow 0} \underbrace{(y-b)}_{\downarrow 0} \right] =$$

$$= f(a,b)$$

Másodrendű parciális deriváltak:

$f: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ x_i, x_j szerinti parciális deriváltak a pontban:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = f''_{x_i x_j}(a) = \left(f'_{x_i}(a) \right)'_{x_j}(a).$$

Trivialis, látni már lehet...

Bizonyos technikai feltételek mellett a vegyes deriváltak megegyeznek
(Young-tétel)

Láncszabály:

$f_1, \dots, f_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ diffható a pontban;

$g: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ diffható $\underline{a} = (f_1(a), f_2(a), \dots, f_k(a)) \in \mathbb{R}^k$ -ben.

$$F(t) := g(f_1(t), f_2(t), \dots, f_k(t)).$$

F is diffható a-ban:

$$\frac{d}{dt} F(t) = \sum_{i=1}^k \frac{\partial}{\partial x_i} (f_1(t), f_2(t), \dots, f_k(t)) \cdot \frac{d}{dt} f_i(t) \Big|_{t=a}$$

ez elég nagy súvís, de ez van.

példa:

$$k=2, \quad f_1(t) = t^2, \quad f_2(t) = 2t \quad g(x_1, x_2) = x_1^3 + \cos x_2$$

$$\frac{d}{dt} f_1(t) = 2t \quad \frac{d}{dt} f_2(t) = 2$$

$$\frac{\partial g}{\partial x_1} g(x_1, x_2) = 3x_1^2 \quad \frac{\partial g}{\partial x_2} g(x_1, x_2) = -\sin x_2$$

$$F(t) := g(f_1(t), f_2(t)).$$

$$\begin{aligned} F'(t) &= \frac{\partial}{\partial x_1} g(f_1(t), f_2(t)) \cdot f_1'(t) + \frac{\partial}{\partial x_2} g(f_1(t), f_2(t)) \cdot f_2'(t) = \\ &= 3 \cdot (f_1(t))^2 \cdot f_1'(t) - \sin(f_2(t)) \cdot f_2'(t) = \\ &= \underline{3 \cdot (t^2)^2 \cdot 2t - \sin(2t) \cdot 2} \quad \square \text{ elvigi} \end{aligned}$$

Szélsőérték számítás.

$n=2$.

$$f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (a, b) \in D.$$

Azt mondjuk, hogy f -nek (a, b) -ben helyi minimuma van (szigorú helyi minimum van), $\forall (x, y)$ esetén úgy, hogy $(x, y) \in D$ és

$\exists \delta > 0$ úgy, hogy $0 < d((x, y), (a, b)) < \delta$ esetén $f(x, y) \geq f(a, b)$ ($f(x, y) > f(a, b)$).

Szélsőérték létezésének feltétele:

(I) legyen $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ és legyen $(a, b) \in D$ belső pont. Ha f -nek

(9)

Szükségtétel van (a,b) -ben, akkor

$$f'_x(a,b) = 0 \quad \text{és} \quad f'_y(a,b) = 0,$$

azaz $\nabla f(a,b) = (f'_x(a,b), f'_y(a,b)) = (0,0) = \underline{0}$.

(a,b) belső pont, net penciális deriváltakat vizsgálunk

⊕ $f(a,b)$ -ben differenciálható kell, hogy legyen.

ÉRINTŐSÍK PÁRHUZAMOS AZ xy -SÍKKAL EBBEN AZ ESETBEN.

Igy az összes érintőegenes (mindegyik benne van az érintősíkban)
merőssége nulla.

Korábban tárgyalt: a penciális deriváltak bizonyos érintőegenesek merőssége $\Rightarrow$
azok nullák.

$(a,b) \in \mathbb{R}^2$ nyugalypont, ha $\nabla f(a,b) = \underline{0}$, de f -nek (a,b) -ben nincs
szükségtétel

Példa $f(x,y) = x^2 - y^2$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2x$$

$\uparrow$
 $(0,0)$ -ban 0.

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = -2y$$

$\uparrow$
 $(0,0)$ -ban 0.

$$\nabla f(0,0) = (0,0).$$

$$D(a,b) = \begin{vmatrix} f''_{xx}(a,b) & f''_{xy}(a,b) \\ f''_{yx}(a,b) & f''_{yy}(a,b) \end{vmatrix}$$

Hesse-determináns kell.

- Ha $D(a,b) > 0$ és $f''_{xx}(a,b) > 0 \Rightarrow$ szigorú helyi minimum van (a,b) -ben
- Ha $D(a,b) > 0$ és $f''_{xx}(a,b) < 0 \Rightarrow$ -||- maximum van (a,b) -ben.
- Ha $D(a,b) < 0 \Rightarrow (a,b)$ nyárgpont.
- Ha $D(a,b) = 0 \Rightarrow ???$ Nem tudunk semmit.

példa

$$f(x,y) = (x^2 - 6x)(y^2 - 4y)$$

Itt lehet szélsőérték, ahol $\nabla f(x,y) = \underline{0}$.

$$f'_x(x,y) = (2x-6)(y^2-4y) \quad f'_y(x,y) = (x^2-6x)(2y-4).$$

KRITIKUS PONT: $(3,2), (0,0), (6,0), (0,4), (6,4)$

Itt lehet szélsőérték.

$$\left. \begin{aligned} f''_{xx}(x,y) &= 2(y^2-4y) & f''_{xy} &= f''_{yx}(x,y) = (2x-6) \cdot (2y-4) \\ f''_{yy}(x,y) &= (x^2-6x)(2) = 2(x^2-6x) \end{aligned} \right\}$$

$$D(x,y) = \begin{vmatrix} 2(y^2-4y) & (2x-6)(2y-4) \\ (2x-6)(2y-4) & 2(x^2-6x) \end{vmatrix}$$

KRITIKUS PONTOK:

és $f''_{xx}(3,2) = -8 \Rightarrow$ lokális maximum van (szélsőérték)

$$D(3,2) = \begin{vmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -18 \end{vmatrix} > 0 \quad D(0,0) = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

???

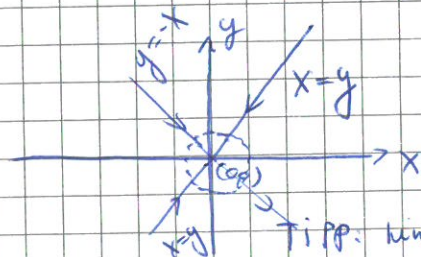
$$D(6,0) = \begin{vmatrix} 0 & -24 \\ -24 & 0 \end{vmatrix} < 0 \Rightarrow \text{nyárgpont}$$

Hi van ilyenkor?
TÍPIKUS PÉLDA.

(I.V.)

$$f(x,y) = x \cdot (x-6) \cdot y \cdot (y-4)$$

$$f(x,y) \Big|_{(0,0)} = 0.$$



Tipp: nincs szélsőérték, azaz $(0,0)$ tetszőlegesen kicsi környezetében f felvesz pozitív és negatív értéket is.

① Ha $x=y$: $x \neq 0$

$$f(x,y) = x^2(x-6)(x-4) > 0 \text{ ha } x \text{ elég közel van } 0\text{-hoz.}$$

$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \vee & 0 & 0 \end{matrix} \quad x=0\text{-hoz közel}$

② Ha $y=-x$, $x \neq 0$:

$$f(x,-x) = \underbrace{-x^2}_{\text{negatív}} (x-6)(-x-4) < 0 \text{ ha } x \text{ elég közel van } 0\text{-hoz.}$$

~~HF~~ $f(0,0) = 0$ és $f(0,0)$ tetszőlegesen kicsi környezetében felvesz pozitív és negatív értéket is: $\Rightarrow$ nyugspont!

(HF:) megnézni a másik két pontot

Szörítsük meg a függvényünket egy korlátos, zárt halmazzra.

Globalis szélsőérték korlátos és zárt halmazon:

$$f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad D \text{ kompakt}$$

f -nek $(a,b) \in D$ -ben GLOBALIS maximuma van, ha

$$\forall (x,y) \in D \text{-re} \quad f(x,y) \leq f(a,b)$$

Tétel: f folytonos a korlátos és zárt D halmazon:

- f felveszi D -n a maximumát és
- - " - a minimumát is.

Recept: ① megkeressük, hogy D mely belső pontjaiban lehet szélsőérték, azaz ∇f -t vizsgáljuk D -n.

$$\left. \begin{array}{l} f'_x(x,y) = 0 \\ f'_y(x,y) = 0 \end{array} \right\} \text{egyenletrendszer.}$$

Kapunk kritikus pontokat.

② megvizsgáljuk, hogy D mely határpontjaiban lehet szélsőérték

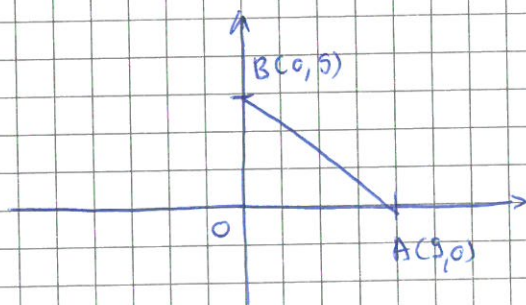
③ A fent kapott kritikus pontokban meghatározzuk f belefűtési értékeit

④ kiválasztjuk a maximumot és a minimumot ($\inf, \sup$).

Jöjjön egy példa!

$$f(x,y) = 2 + 2x + 2y - x^2 - y^2$$

$D: x=0, y=0, y=9-x$ egyenesek által határolt Δ



①

$$f'_x(x,y) = 2 - 2x = 0 \Rightarrow x=1$$

$(x,y) = (1,1)$ belső pont

$$f'_y(x,y) = 2 - 2y = 0 \Rightarrow y=1$$

$$\boxed{f(1,1) = 4}$$

② (a) OA szakaszon $0 \leq x \leq 9, y=0$.

$$\text{Itt } f(x,y) = 2 + 2x - x^2 = f(x,0)$$

a végpontokban lehet szélsőérték.

$$f'(x,0) = 2 - 2x$$



$2x=2, x=1, f(1,0)$ -ban lehet még szélső-
érték.

$f(0,0)$ " 2	$f(9,0)$ " -61
--------------------	----------------------

$$\boxed{f(1,0) = 3}$$

(b) OB szakaszon $x=0, 0 \leq y \leq 9$

$$\text{Itt } f(x,y) = f(0,y) = 2 + 2y - y^2$$

szimmetria miatt: $f(0,0), f(0,9)$ és $f(0,1)$

"	"	"
2	-61	3

(c) AB szakaszon $0 \leq x \leq 9$ és $y = 9 - x$

$$f(x, 9-x) = 2 + 2x + 2(9-x) - x^2 - (9-x)^2 = -61 + 18x - 2x^2.$$

A végpontokat már vizsgáltuk, csak a belső részt érdemes

$$f'(x, 9-x) = 18 - 4x \Rightarrow x = \frac{18}{4} = \frac{9}{2} \Rightarrow y = 9 - x = \frac{9}{2}$$

$$f\left(\frac{9}{2}, \frac{9}{2}\right) = 2 + 2 \cdot \frac{9}{2} + 2 \cdot \frac{9}{2} - \left(\frac{9}{2}\right)^2 - \left(\frac{9}{2}\right)^2 = -\frac{41}{2}$$

globális max: ~~$f(0,0) = f(0,9) = f(9,0) = f(9,9)$~~ $f(1,1) = 4$

globális min: $f(9,0) = f(0,9) = -61$

Készen vagy? ☒

