

2012. 04. 14.

4. Konzultáció

Kalkulus II

 $a \in \mathbb{R}$ közeli hatványsor:

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-a)^n = C_0 + C_1 (x-a) + C_2 (x-a)^2 + \dots \quad \text{I konvergenciaintervallum.}$$

vagy plusz beírhatunk a Taylor-sorát is.

Tétel: Ha egy hatványsor konvergenciaintervalluma nem egyetlen pontból

áll, akkor az összegfüggvénynek a Taylor-sora maga a hatványsor.

Bizt. $x \in \text{I} \quad f(x) = ?$ Legyen $\sum C_n (x-a)^n$ hatványsor.

II a konvergenciaintervallum

Összegfüggvény: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-a)^n$

 $x \in \text{I}$ -re.Kell: f Taylor-sora a hatványsor, azaz: $C_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \quad \forall n \geq 0$ -re.

$$f(a) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (a-a)^n = C_0 + C_1 (a-a) + C_2 (a-a)^2 + \dots$$

$$C_0 = f(a) = \frac{f^{(0)}(a)}{0!}$$

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n n (x-a)^{n-1} = C_1 + C_2 \cdot 2(x-a) + C_3 \cdot 3(x-a)^2 + \dots$$

$$f'(a) = C_1 \Rightarrow C_1 = \frac{f^{(1)}(a)}{1!} \quad \checkmark$$

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} C_n \cdot n(n-1) (x-a)^{n-2} = 2C_2 + 3 \cdot C_3 \cdot 2(x-a) + 4 \cdot 3 \cdot C_4 \cdot (x-a)^2 + \dots$$

$$f''(a) = 2C_2 \Rightarrow C_2 = \frac{f^{(2)}(a)}{2!}$$

Teljes indukcióval: $C_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \quad n \geq 3$ esetén is. $\square$

Többváltozós függvénytan jön.

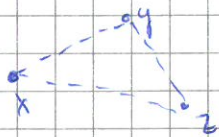
$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 = \{ (x, y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \}$$

2-dimenziós Euklideszi tér.

Távolság: $d(x, y) = |x - y|$.

Def: $H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ mérő.

A távolság egy függvény. És van három feltétel.



$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \text{ kell.}$$

EUKLIDESZI TÁVOLSÁG TELJESÍTI A TÁVOLSÁG FELTÉTELEKET.

2. példa Csebisev-metrika (l_∞ -metrika)

$$d_\infty(x, y) = \max \{ |x_1 - y_1|, |x_2 - y_2| \}$$

3. példa Manhattan-metrika.

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| \text{ látható fel.}$$

Környezetek: $U(a, \sigma) = \{ x \in \mathbb{R} : |x - a| < \sigma \} = (a - \sigma, a + \sigma)$.

Magasabb dimenzióban: $\underline{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ σ -sugárú

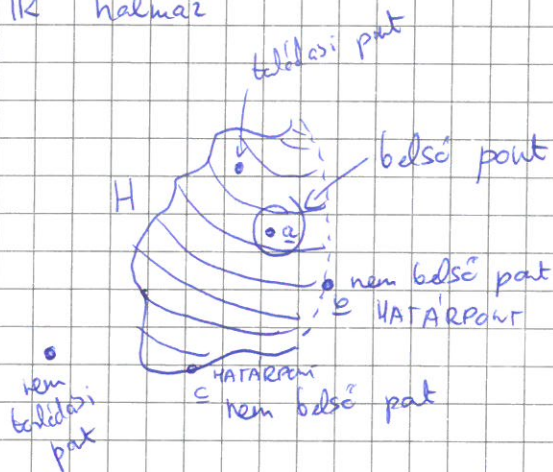
környezete $U(\underline{a}, \sigma) = \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^n : d(\underline{x}, \underline{a}) < \sigma \}$

$(\underline{x}_k)_{k=0}^\infty$ pontsorozat.

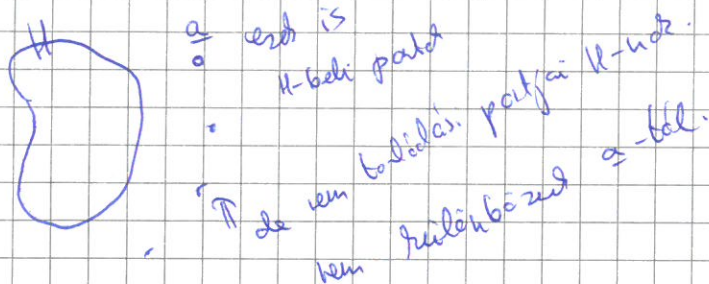
Tétel: Koordinátánkénti konvergencia tétele.

②

$H \subseteq \mathbb{R}^n$ halmaz



a határpont nem biztos, hogy benne van H -ban.



KOMPAKT: Zárt + korlátos. $\square$

① Mi az értelmezési tartomány?

$$f(x,y) = \frac{x^3 - xy^2}{x^2 + y^2}$$

$$D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$$

② $g(x,y) = \sqrt{\frac{y-2}{2x+y-1}}$

$$\frac{y-2}{2x+y-1} \geq 0$$

$$y-2 \geq 0$$

$$y-2 \leq 0$$

$$\text{és } 2x+y-1 > 0$$

$$2x+y-1 < 0$$



$$2x+y-1=0$$

③

$$D \subseteq \mathbb{R}^n, f: D \rightarrow \mathbb{R}$$

a) a torlódási pontja D -nek. t. fh.

definíálható a határérték.

példa

1. $\lim_{(x,y) \rightarrow A} f(x,y) = ?$, ahol $f(x,y) = \frac{x^3 - xy^2}{x^4 + y^2}$

a) $A = (0,0)$

A

b) $B = (\infty, \infty)$

A

c) $C = A(\infty, \infty)$

2. $\lim_{(x,y) \rightarrow A} g(x,y) = ?$, ahol $g(x,y) = \sqrt{\frac{y-2}{2x+y-1}}$

a) $A = (-1,0)$

d) $A = (-\frac{1}{2}, 2)$

b) $A = (1,1)$

e) $A = (-\infty, -\infty)$

c) $A = (1,0)$

f) $A = (\infty, -\infty)$

$\uparrow$ nem torlódási pont, nincs határérték.

$\uparrow$ ez sem.

2/a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (-1,0)} \sqrt{\frac{y-2}{2x+y-1}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (-1,0)} \sqrt{\frac{0-2}{-3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$ } a határérték "behozatali" értéke.

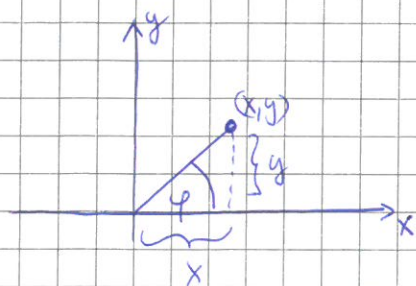
2/b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \sqrt{\frac{y-2}{2x+y-1}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \sqrt{\frac{0}{3}} = 0$ }

1/a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 - xy^2}{x^4 + y^2} =$

"0/0"-alakú. így ezt polárkoordinátákra tudjuk átírni.

STANDARD TRÜKK VÉGES PONTBAN.

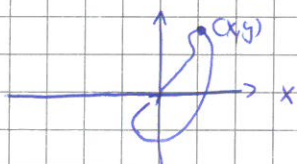
4



$$r \geq 0, \varphi \in [0, 2\pi)$$

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos \varphi \\ y = r \cdot \sin \varphi \end{cases} \Leftrightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$(x, y) \rightarrow (0, 0) \Leftrightarrow r \rightarrow 0^+$ és $\varphi \in [0, 2\pi)$ tetszőleges, változhat.



Vissza a példára:

$$= \lim_{\substack{r \rightarrow 0^+ \\ \varphi \in [0, 2\pi)}} \frac{r^3 \cos^3 \varphi - r \cdot \cos \varphi \cdot r^2 \sin^2 \varphi}{r^2} = \lim_{\substack{r \rightarrow 0^+ \\ \varphi \in [0, 2\pi)}} r (\cos^3 \varphi - \cos \varphi \sin^2 \varphi) = 0.$$

$\downarrow$
 $(\cos \varphi) < 1$
 $(\sin \varphi) < 1$
 KORLÁTOZ

Mi van, ha ez nem működik?

2. TERV jön elő!:

$$2/d) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (\frac{1}{2}, 2)} \sqrt{\frac{y-2}{2x+y-1}} = \lim_{\substack{r \rightarrow 0^+ \\ \varphi \in [0, 2\pi)}} \sqrt{\frac{r \sin \varphi}{-1/2 + 2r \cos \varphi + 2 + r \sin \varphi - 1/2}} = \lim_{\substack{r \rightarrow 0^+ \\ \varphi \in [0, 2\pi)}} \sqrt{\frac{\sin \varphi}{2 \cos \varphi + \sin \varphi}}$$

$\Downarrow$
 függ φ -től!

függést kell másolni

Sejtésünk: nincs határérték.

És kellene valahogy igazolnunk...

Legyen most $y=2$ és $x = -\frac{1}{2} + t$, $t \rightarrow 0^+$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} g\left(-\frac{1}{2} + t, 2\right) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \sqrt{\frac{2-2}{-1+2t+2-1}} =$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0^+} \sqrt{\frac{0}{2t}} = 0.$$

És most legyen $x = -\frac{1}{2}$ és $y = 2 + t$, $t \rightarrow 0^+$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} g\left(-\frac{1}{2}, 2+t\right) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \sqrt{\frac{t}{-1+2+t-1}} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \sqrt{1} = 1.$$

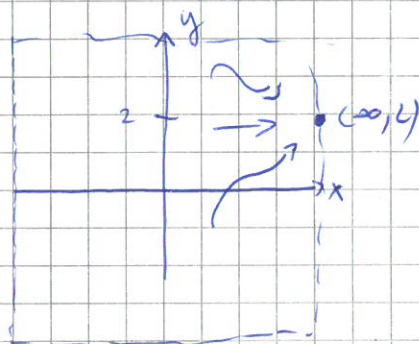
Értek nem létezik a határérték. Ennyi. ☹

(Hf) Mit jelent az, hogy f -nek a határértéke a $(2, \infty)$, $(-\infty, \infty)$

vagy $(-\infty, 2)$ okban? A szélén?

(Hf)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (\infty, 2)} \frac{x^3 - xy^2}{x^2 + y^2} = ?$$



TRÜKK: kiemelni a domináns tagot!

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (\infty, 2)} \frac{\overset{\rightarrow 0}{x^3}}{\overset{\rightarrow 0}{x^2}} \cdot \frac{\left(1 - \frac{y^2}{x^2}\right)}{\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right)} = \infty.$$

$\parallel$
 $x \rightarrow \infty$

megjegyzés: TILOS y helyébe behelyettesíteni a 2-öt!!

© ÉS ~~x~~ x is számolni

2/e módosítva

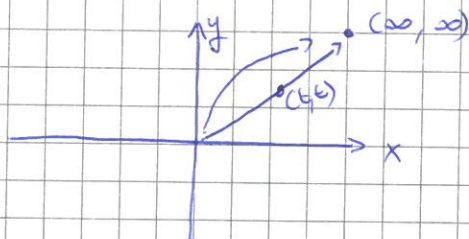
e) $A = (\infty, \infty)$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (\infty, \infty)} \sqrt{\frac{y-2}{2x+y-1}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (\infty, \infty)} \sqrt{\frac{y(1-\frac{2}{y})}{xy(\frac{2}{y} + \frac{1}{x} - \frac{1}{xy})}} = \text{gdz van}$$

ez egy nem függvény, rájöttél félre.

EBBEN A FORMÁBAN NEM KÉZELHETŐ.

TIPP: nincs határérték



legyen $x=y=t$ és $t \rightarrow \infty$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g(t,t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{t-2}{2t+t-1}} = \sqrt{\frac{1}{3}}$$

legyen most $x=t^2$, $y=t$, $t \rightarrow \infty$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g(t^2, t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{t-2}{2t^4+t-1}} = 0$$

NEM AZONOSÁK!

nincs határérték.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (\infty, \infty)} \frac{x^3 - xy^2}{x^4 + y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (\infty, \infty)} \frac{x^3 y^2}{x^2 y^2} \cdot \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{\frac{1}{y^2} + \frac{1}{x^2}} = \dots$$

0/0 alak

7.

Ebben a feladatban van veszélyes $\Rightarrow$ segíts: nincs határérték.

Lásd az bevezetőt az előző feladatnál.

$$x = y = t \quad \text{és} \quad t \rightarrow \infty$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t, t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^3 - t \cdot t^2}{t^2 + t^2} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{0}{2t^2} = \underline{\underline{0}}.$$

$$x = t^2, \quad y = t \quad \text{és} \quad t \rightarrow \infty:$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t^2, t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^6 - t^2 \cdot t^2}{t^4 + t^2} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^6 - t^4}{t^4 + t^2} = \infty.$$

konklúzió: nincs határérték.

$$f(x, y) = \arctg\left(\frac{|x| + |y|}{x^2 + y^2}\right)$$

$$\text{Határozatképes meg: } \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = ? \quad \text{(HF)}$$