

Hatványsor:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1 (x-a) + c_2 (x-a)^2 + \dots + c_n (x-a)^n + \dots$$

$$a \in \mathbb{R}, \quad c_n \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \text{binomiális együttható!}$$

 $\alpha \in \mathbb{R}, \quad n \geq 0$ egész.

Legyen: $\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}$ kiterjesztés

 $\alpha \in \mathbb{R}!!!$

(pl): $\binom{7}{3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3!}$ lex. De: $\binom{7}{8} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 0}{8!} = 0$

$$\alpha \text{ egész}, \quad n > \alpha \Rightarrow \binom{\alpha}{n} = 0.$$

$$\binom{\frac{1}{2}}{3} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)}{3!}$$

Def szerint: $\binom{\alpha}{0} = 1.$

Binomiális sorok:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \quad \text{alakú.}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{4!} x^4 \\ &+ \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)(\alpha-4)}{5!} x^5 + \dots \end{aligned}$$

Abszolút konvergens, ha $|x| < 1.$

Ha $|x| < 1$: $(1+x)^a = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n$.

(12.) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-3x}}$ hatványsora

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} x^n, \text{ ha } |x| < 1.$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-3x}} = (1+(-3x))^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-3x)^n, \text{ ha } |-3x| < 1$$

$$\updownarrow$$

$$|x| < \frac{1}{3}.$$

$$\frac{x}{\sqrt{1-3x}} = x \cdot (1+(-3x))^{-\frac{1}{2}} = x \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-3x)^n, \text{ ha } |-3x| < 1$$

$$\updownarrow$$

$$|x| < \frac{1}{3}.$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-3)^n x^{n+1}$$

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} x^n, \text{ ha } |x| < 1$$

$$\sqrt{5} = \sqrt{1+4} = \sqrt{1+\textcircled{4}} \stackrel{|4| > 1 \text{ :-(}}{=} \sqrt{4} \cdot \sqrt{1+\frac{1}{4}} = 2\sqrt{1+\frac{1}{4}} =$$

$$= 2 \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} \left(\frac{1}{4}\right)^n. \quad \text{ez egy tipikus példa}$$

Van ilyen hf is. $\square$

Hatványsorok integrálhatósága, differenciálhatósága.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-a)^n, \quad x \in \mathbb{I}$$

$\uparrow$
konvergenciaintervallum.

örök folyvós.

Tétel: $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n n (x-a)^{n-1} = C_1 + 2C_2(x-a) + C_3 \cdot 3 \cdot (x-a)^2 + \dots$

El kell igazolni minden függvényre.

Példa $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} \quad x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \quad k=n-1$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$f'(x) = f(x) \quad \text{Ezt kapjuk}$$

$$\frac{df}{dx} = f \quad \frac{df}{f} = dx$$

$$\int \frac{df}{f} = \int dx + c$$

$$\ln |f| = x + c$$

$$|f| = e^{x+c} = C e^x$$

$$f = C_3 e^x$$

$$f(0) = 1 \quad \text{rendelti feltétel}$$

$$C_3 = 1$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{ez igaz}$$

példa

$$f(x) = \frac{1}{(1-3x)^2} \quad \text{hatványsora.}$$

1. megoldás: binomiális sorol. KF!

2. megoldás:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad |x| < 1.$$

$$\left((1-x)^{-1} \right)' = \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} \quad |x| < 1.$$

$$k = n-1$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) x^k$$

$$\frac{1}{(1-3x)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) 3^k x^k, \quad |3x| < 1 \quad |x| < \frac{1}{3}.$$

□

A hatványsorok integrálhatóak is.

f -nek $\exists$ primitív függvénye.

$$\int f(x) dx = g(x) + C.$$

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} (x-a)^{n+1}, \quad x \in I.$$

alkalmazás (~ 11. példa).

Példa

$\ln(1+x)$ hatványsora.

Volt: $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, |x| < 1$

X helyett $-x$

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n, |x| < 1 \Leftrightarrow |x| < 1.$$

$$\ln(1+x) \stackrel{\text{int.}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} + C, |x| < 1 \text{ marad.}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + C, |x| < 1$$

C kell! Helyettesítsük 0-at!

$$0 = \sum_{k=1}^{\infty} 0 + C \Rightarrow \boxed{C=0}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k, |x| < 1.$$

VOLT: $x=1$ esetén is fennáll az egyenlőség.

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots +$$

Taylor-polinom, Taylor-sor.

A tanult módon.

$$P_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n.$$

VEGES ÖSSZEG.

$\forall Q_n$ n -edfokú polinom

$$|f(x) - Q_n(x)| > |f(x) - P_n(x)|$$

lesz igaz $\forall x$ -re

az a pont δ -szögű környezetéből.

Azaz ha $|x-a| < \delta$, $x \neq a$.

Nem bizonyítjuk.

$f: (a-\delta, a+\delta) \rightarrow \mathbb{R}$ $\delta > 0$.
(iii) - szer diffható.

$\forall x \in (a-\delta, a+\delta)$ esetén:

$$f(x) = P_n(x) + f^{(n+1)}(\xi) \cdot \frac{1}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}.$$

$\exists \xi$ a és x között, hogy

$$\Rightarrow |f(x) - P_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1} \right|.$$

Lagrange-féle maradéktag.

Ha $f(x)$ egy a pontban akárhányszor diffható.

$\Rightarrow \exists f(x)$ a -köeli Taylor-sora.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n.$$

ez egy hatványsor.

$f(x) \neq \sum \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$ Van konvergencia-intervallus
nem feltétlenül $x \in \mathbb{I}$.