

Sorok

$$(a_n)_{n=0}^{\infty} : a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$$

$$\text{Szorozhatunk: } a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

$$\text{Legyen: } a_n = q^n \quad 3^0 + 3^1 + 3^2 + \dots + 3^n + \dots$$

$$S_0 = a_0$$

$$S_1 = a_0 + a_1$$

$$S_2 = a_0 + a_1 + a_2$$

$$S_3 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3$$

⋮

$$S_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n \quad n\text{-edik részletösszeg.}$$

$$\text{Ha } (S_n)_{n=0}^{\infty} \text{ konvergens} \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ konvergens.}$$

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$$

S_n bármilyen n -re kiszámolható.

konvergens-e a sor?

NEM HAGYOMÁNYOS ÖSSZEG, HA NEM HATÁRÉRTÉK.

példa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots = ?$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = ? \quad \text{ezt kell nézni}$$

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} =$$

↑ parciális törtre bontás

$$\frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} = \frac{An+A+Bn}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

$$A=1$$

$$A=1 \quad B=-1.$$

$$A+B=0$$

ennyi

lgy:
$$O_n = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

$$O_n = 1 - \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

(Hf.: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)} = ?$ Szabó Tamás videója járallott! (el)

példa:
$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n + \dots$$

értelmezhető-e?

ált:
$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n + \dots$$

$$S_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = ?$$

$$q S_n = q + q^2 + \dots + q^{n+1}$$

$$S_n (1-q) = 1 - q^{n+1}$$

$$S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad \text{Ha } q \neq 1.$$

Ha $|q| < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{1-q}$ lesz.

$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ ig $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$.

ennyi.

Ha $|q| > 1$: $S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1-q}$ $\swarrow$ nem korlátos.

$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ nem létezik. (véges $\nexists$).

Ha $S_n = 1 + 1 + \dots + 1 = n+1 \rightarrow \infty$.

$\uparrow$
 $|q| = 1$

Ha $q = -1$:

$S_n = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots + (-1)^n =$

$= \begin{cases} 1 & \text{ha } n \text{ páros} \\ 0 & \text{ha } n \text{ páratlan.} \end{cases}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n \nexists$.

$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^0 - \left(\frac{1}{2}\right)^1$ lesz igaz.

pár tag elhagyható, a konvergencia nem változik

$= 2 - 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ Konvergens marad

tétellel jönnek

Tétel: $\sum a_n$ konvergens $\Rightarrow a_n \rightarrow 0$ ha $n \rightarrow \infty$.

legyen $s = \sum a_n$. Ekkor: $s = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$

$$a_n = S_n - S_{n-1} = 0.$$

$\uparrow_s \quad \quad \uparrow_s$

Tfh $\sum a_n$ konvergens. Ekkor legyen

ϵ_2 miét jó?

$A \rightarrow B$ feltevése: $\neg B \rightarrow \neg A$.

Következtetés: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0 \Rightarrow \sum a_n$ divergens.

Példa: Konvergens-e? $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n} + 1}{\sqrt[n]{n} - 2}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n} + 1}{\sqrt[n]{n} - 2} = \frac{1+1}{1-2} = -\frac{1+1}{1} = \underline{\underline{-2}}$$

A sor divergens.

$\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ konvergens-e?

$\exists f: [2, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ hogy f folytonos, monoton csökkenő és pozitív.

$\forall n \geq 2$ -ra $f(n) = a_n$.

Ekkor: $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ pontosan akkor konvergens, ha

$$\int_2^{\infty} f(x) dx \text{ létezik.}$$

példa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad (\text{létezik?}) \text{ konvergencia?}$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad [1, \infty) \text{ -en}$$

↑
folytonos, monoton csökkenő és pozitív.

folytonos ✓

mon csökken ✓

Ell!

pozitív ✓

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \frac{1}{x} dx = \ln t - \ln 1 = \underline{\underline{\infty}}$$

Nincs.

Az imp. int nem létezik $\rightarrow$ a sor divergens.

② Konvergencia?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \quad p > 0 \text{ paraméter}$$

$$f(x) = \frac{1}{x^p} \quad [1, \infty) \text{ -en}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \frac{1}{x^p} dx = \left[\frac{x^{1-p}}{1-p} \right]_1^t =$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{t^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p} \right] \text{ véges} \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} t^{1-p}$$

Ha $p < 1$ (negatív hatványfokú)

$$1-p < 0 \quad p > 1$$

Tehát: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ akkor konvergens, ha $p > 1$.

⑤

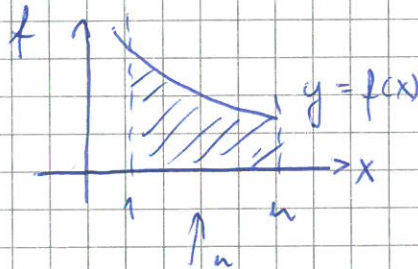
Ez baromi fontos.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ is konvergens, összege $\frac{\pi^2}{6}$.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{1/2}}$ divergens lesz.

($\xi = 1$)

$$\int_1^{\infty} f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n f(x) dx.$$



"bizonyítás feleség"
a jegyzetben.

$\int_1^n f(x) dx$ terület a függvény alatt.
csoport végezeté kell lennie.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n}$$

$$f(x) = \frac{1}{x \ln x}$$

$$f: [2, \infty) \rightarrow \mathbb{R}.$$

folytonos. ✓

pozitív. ✓

$$x \uparrow, \ln x \uparrow \Rightarrow x \cdot \ln x \uparrow \Rightarrow$$

HF befejezni.

$$\Rightarrow \frac{1}{x \ln x} \downarrow$$

Összehasonlító teszt

Szabó Tamás példátán kellene.

$\sum a_n$ és $\sum b_n$ sorok.

$$0 < \bar{a}_n < b_n \text{ mely indextől kezdve.}$$

(6)

Ih ez teljesül.

Majordus kritérium: Ha $\sum b_n$ konvergens $\Rightarrow \sum a_n$ is az.

Minordus - II - : Ha $\sum a_n$ divergens $\Rightarrow \sum b_n$ is az.

(pl.) Konvergens-e?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{n+1}{n^2(n+2)}}_{a_n}$$

$$\frac{n+1}{n^2(n+2)} < \frac{2n}{n^2 \cdot n} = \frac{2n}{n^3} = \frac{2}{n^2} \rightarrow 2 \sum \frac{1}{n^2}$$

konvergens.

Igy az adott is.

EZ VOLT A MAJORDUS.

Minordus:

↑ div-e
vizsgálható.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{4n^2 - 1}} > \frac{1}{\sqrt{4n^2}} = \frac{1}{2n}$$

$2 \sum \frac{1}{n}$ első része divergens, tehát
a vizsgált sor is divergens.

El kell dönteni, hogy melyiket használjuk!!

Kell egy tipp!

Első nagy n -re

kell tipp.

(pl.)

$$\frac{n+1}{n^2(n+2)} \approx \frac{1}{n^2} \quad \text{eml tudjuk, hogy konvergens}$$

Tfh.: Vmely indextől kezdve $0 \leq a_n \leq b_n$

Észrevétel pozitív tagú sorokra:

$$\left. \begin{aligned} \sum a_n \quad S_n &= \sum_{k=0}^n a_k \geq 0 \\ S_{n+1} &= S_n + a_{n+1} \geq S_n \end{aligned} \right\} \begin{aligned} (S_n)_{n=0} \\ \text{nemnegatív,} \\ \text{monoton nö.} \end{aligned}$$

$\sum a_n$ konvergencia def szerint ha $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ véges
határérték létezik.

A részletösszegek sorozata felülről korlátozott kell, hogy legyen.

Feltétel: $n \geq 0$ esetén $0 \leq a_n \leq b_n$

$$S_n(a) = \sum_{k=0}^n a_k$$

$$S_n(b) = \sum_{k=0}^n b_k$$

$\sum b_k$ konvergencia $\Rightarrow (S_n(b))_{n=0}^{\infty}$ felülről korlátozott

a másik is az.

(példa)

$$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{n-3}{n^3+n+1}$$

a_n kell egy b_n a hasonlításához.

$$a_n = \frac{n-3}{n^3+n+1} = \frac{n}{n^3} \cdot \frac{1 - \frac{3}{n}}{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}} = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1 - \frac{3}{n}}{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}}$$

b_n

legyen $b_n = \frac{1}{n^2}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n-3}{n^3+n+1}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1 - \frac{3}{n}}{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}} = 1.$$

(2)

Egyek legrövidebb. Pozitív és véges

$\sum \frac{1}{n^2}$ az konvergens $\rightarrow$ a vizsgált sor is konvergens.

Újabb teszt:

Tfh $a_n \geq 0 \quad \forall n$ -re és $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$ létezik.

Ha $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} < 1 \Rightarrow \sum a_n$ konvergens.

és a többi. (jegyzet 42. oldal).

(pl)

$\sum \frac{n^{100}}{1,001^n}$ konvergens-e.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^{100}}{1,001^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt[n]{n})^{100}}{1,001} = \frac{1}{1,001} < 1.$$

A sor konvergens.

(HF) hányadoskritériummal

(pl)

$$\sum \frac{3^n}{n^2 \cdot 7^n}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3^{n+1}}{(n+1)^2 \cdot 7^{n+1}}}{\frac{3^n}{n^2 \cdot 7^n}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^2 \cdot \frac{3}{7} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{7} \cdot \frac{n^2}{n^2 + 2n + 1} = \frac{3}{7} < 1. \end{aligned}$$

konvergens.

(5)

pl

$$\sum \frac{100^n}{(n!)^2} \leftarrow \text{Hányados krit}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{100^{n+1}}{((n+1)!)^2} \cdot \frac{(n!)^2}{100^n} = \frac{100}{(n+1)^2} \rightarrow 0$$

a sor konvergens

amikor nem jó:

$$\sum \frac{1}{n}$$

$$\sum \frac{1}{n^2}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{n+1} \cdot n = \frac{n}{n+1} \rightarrow 1 \text{ ha } n \rightarrow \infty.$$

$\sum \frac{1}{n}$ esetén 1 és a sor divergens

$\sum \frac{1}{n^2}$ esete:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{(n+1)^2} \cdot n^2 = \frac{n^2}{n^2 + 2n + 1} \Rightarrow 1 \text{ ha } n \rightarrow \infty.$$

pedig tudjuk, hogy a sor konvergens

Ezért nem működik itt a hányadoskritérium.

Alternáló sorok:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} + \dots = \ln 2$$

~~Sor~~ $2n$ -edik részletösszeg:

$$S_{2n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{-1}{2n} =$$

10

Levezethető:

$$S_{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \frac{1}{1+\frac{2}{n}} + \dots + \frac{1}{1+\frac{n}{n}} \right)$$

$$f(x) = \frac{1}{1+x} \quad \text{alsó}$$

Közelítő összege.

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \left[\ln|1+x| \right]_0^1 = \ln 2 - \ln 1 = \underline{\ln 2}.$$

emgyi

Leibniz-Kritérium

Látjuk: $\sum (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ konvergens.

Tfh $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ pozitív, monoton csökkenő sorozat és

tfh $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Ekkor

$\sum (-1)^n a_n$ konvergens.

emgyi

A tétellel belátható, hogy konvergens.

(példa)

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n(n+2)}$$

$$a_n = \frac{n+1}{n(n+2)} > 0 \quad \checkmark$$

monotonitás?

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2+2x}$$

$$f'(x) = \frac{x^2+2x - (x+1)(2x+2)}{(x^2+2x)^2} =$$

$$= \frac{x^2+2x - (2x^2+4x+2)}{(x^2+2x)^2} =$$

$$= \frac{-x^2-2x-2}{(x^2+2x)^2} < 0 \quad \text{ha } x \text{ pozitív.}$$

(11)

$f(x)$ monoton csökkenő. (szigorúan)

$$a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n(n+2)} = 0. \checkmark$$

Leibniz-kritérium: a sor konvergens ehhez.

$$\sum a_n = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots, \quad a_n \in \mathbb{R}.$$

ehhez:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = |a_0| + |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| + \dots$$

$\uparrow$ az eredeti sor abszolút konvergens,
ha ez a sor abszolút konvergens

példa

Leibniz-tétellel: $\sum (-1)^n \frac{1}{n^2}$ konvergens.

Integralkritériummal: $\sum \frac{1}{n^2}$ is konvergens.

Tehát $\sum (-1)^n \frac{1}{n^2}$ abszolút konvergens.

Leibniz-tétel: $\sum (-1)^n \frac{1}{n}$ konvergens

Integralkritérium: $\sum \frac{1}{n}$ divergencia!

Tehát $\sum (-1)^n \frac{1}{n}$ feltételesen konvergens.

$$\textcircled{3} \quad \sum (-1)^n \frac{n+1}{n(n+2)} \quad \frac{n+1}{n(n+2)} > \frac{n}{n(n+2n)} = \frac{n}{3n^2} = \frac{1}{3n}$$

MINORÁKS: ez divergencia!

$$\textcircled{12} \quad \frac{1}{3} \sum \frac{1}{n} \text{ divergencia.}$$

Tehát az eredeti sor feltételeesen konvergens.

Abszolút konvergencia $\longrightarrow$ "sima" konvergencia

TIPP $\sum (-1)^n a_n$ alakú sor konvergenciája, $a_n > 0$

$\longrightarrow$ Leibniz - tétel

$\longrightarrow \sum a_n = n$ Májoráns, gyök és hányados kritérium.

A gyök- és hányadoskritérium kimondható negatív tagú sorokra is. (38-39. oldal).

Függvénytörés:

$$f_n : D \mapsto \mathbb{R} \quad \forall n.$$

csináljunk belőle függvényt

pl

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{x(x-1)^n} = \frac{x+1}{x-1} + \frac{(x+1)^2}{2(x-1)^2} + \frac{(x+1)^3}{3(x-1)^3} + \dots + \frac{(x+1)^n}{x(x-1)^n} + \dots$$

$$D: \mathbb{R} \setminus \{1\} \quad \text{Röviden el. tart.}$$

meghatározása

speciális függvények a hatványok.

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \dots$$

$\forall x_0 \in D$ összehelyesítés esetén konkrét számsort kapunk.

Konvergenzialma: $x_0 \in D$, hogy $\sum f_n(x_0)$ számsor konvergens

$\Uparrow$ meg kell határozni ezt.

gyökkritérium.

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|f_n(x)|} \quad \exists.$$

$|S| < 1$ esetén $\sum f_n(x)$ abszolút konvergens x -ben.

Hányadoskritérium is definiálható.

Tfha $f_n(x) \neq 0 \quad \forall n$ -re. és $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} \right|$ létezik.

① $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$

$|x| < 1$ esetén konvergens és $\sum x^n = \frac{1}{1-x}$.

$|x| \geq 1$ esetén divergens

② $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = ?$
 $\underbrace{\hspace{1cm}}_{f_n(x)}$

$$\left| \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} \right| = \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n} \right| = \frac{|x|}{n+1} \rightarrow 0 \text{ ha } n \rightarrow \infty.$$

Bármely x -re abszolút konvergens az egész számsíkon.

③ $\sum n^n \cdot x^n$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^n \cdot |x|^n} = n|x| = \begin{cases} \infty & \text{ha } x \neq 0 \\ 0 & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

és csak $x=0$ -ban konvergens

④ Hol konvergens?

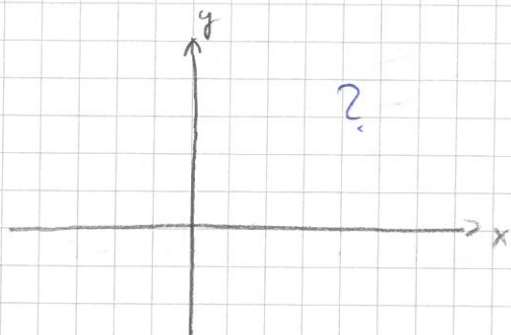
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n(x-1)^n}$$

Értelmezési tartomány: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Legyen görbe? Legyen.

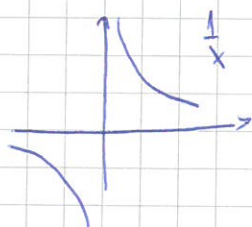
$$\sqrt[n]{\frac{|x+1|^n}{n|x-1|^n}} = \frac{|x+1|}{\sqrt[n]{n}|x-1|} \Rightarrow \left| \frac{x+1}{x-1} \right|$$

Ha $\left| \frac{x+1}{x-1} \right| < 1 \Rightarrow$ a sor abszolút konvergens x -ben.



megoldható analitikus
úton is.

$$g = \frac{x+1}{x-1} = \frac{x-1+2}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1} \quad \text{ábr!}$$



elemi transzfunkciók

$x < 0$ a megoldás.

$$\left| \frac{x+1}{x-1} \right| < 1$$

$$-1 < \frac{x+1}{x-1} < 1$$

megoldható

gyökkritérium: a sor abszolút konvergens akkor, ha $x < 0$, tehát
a $(-\infty, 0)$ intervallumon

A sor divergens ha $\left| \frac{x+1}{x-1} \right| > 1 \Rightarrow x \in (0, 1) \cup (1, \infty)$
(5)

Ha $\left| \frac{x+1}{x-1} \right| = 1$, akkor tovább vizsgálhatjuk!



$$x = 0$$

Vissza kell helyettesíteni!

$$x = 0 \text{-ra: } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1^n}{n(-1)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$$

Leibniz-tétel szerint konvergens (feltételes!),

net $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$ nem konvergens.