

2018. 02. 10.

1. Konvergenia

Kalkulus II.

Előadó: Vas Gabriella

április 14. ZH, 45 min. 1 def.
3-4 feladat.

felév végén: VIZSGA:

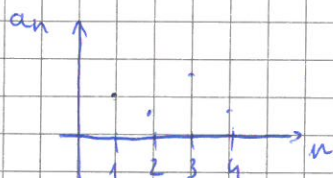
$\left. \begin{array}{l} \rightarrow \text{elmélet} \\ \rightarrow \text{gyakorlat} \end{array} \right\}$ a gyakorlat súlyosabb.

ennyi.

Sorozatokról:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

$$a: \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}, \quad n \mapsto a_n$$



felírás: $a_1, a_2, \dots, a_n$ $(a_n)_{n=1}^{\infty}$

Sorozat fogalma.

$\uparrow$ axióma. Nem bizonyítható.

Ennyi, most nem ind, mert van hiányzó régi jegyek.

Konvergenia: a_n határértéke $A \in \mathbb{R}$, ha

$\forall \epsilon > 0$ -hoz $\exists \nu(\epsilon)$, hogy ha $n > \nu$ esetén

$$|a_n - A| < \epsilon.$$

$$a_n \in (A - \epsilon, A + \epsilon)$$

példák:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0.$$

$$\textcircled{1} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-2}{2n+5} = \frac{3}{2}.$$

Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Kell: $\exists \gamma(\varepsilon)$ ha $n > \gamma$ akkor

$$\left| \frac{3n-2}{2n+5} - \frac{3}{2} \right| < \varepsilon.$$

$$\left| \frac{3n-2}{2n+5} - \frac{3}{2} \right| = \left| \frac{6n-4-6n-15}{2(2n+5)} \right| = \left| \frac{-19}{2(2n+5)} \right| =$$

$$= \frac{19}{2(2n+5)} < \varepsilon.$$



$$\frac{19}{2\varepsilon} < 2n+5$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{19}{2\varepsilon} - 5 \right) < n$$

$\gamma(\varepsilon)$

ennyi az egész.

Másik bef. BECSLÉS!

$$\frac{19}{2(2n+5)} < \frac{19}{2 \cdot 2n} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{19}{4n\varepsilon} < n$$

$$\gamma(\varepsilon) = \underline{\underline{\frac{19}{4\varepsilon}}}$$

Konvergens sorozat korlatos.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \rightarrow \exists z, K \in \mathbb{R}$$

$$z \leq a_n \leq K \quad \forall n.$$

Választjuk $\epsilon = 1$ -et.

$$\exists \nu(1), \text{ hogy } n > \nu(1) \text{ esetén } |a_n - A| < 1.$$



$$A-1 < a_n < A+1$$

Felső korlát: $K = \max \{ A+1, a_1, a_2, \dots, a_{\nu(1)} \}$

Alsó korlát: $K = \min \{ A-1, a_1, a_2, \dots, a_{\nu(1)} \}$.

Vannak minden korlátos sorozat konvergens.

2. Tétel.

Biz.: (a_n) felül korlátos. $\rightarrow \exists A = \sup(a_n)$.

Állítás: $A = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

Kell: $\epsilon > 0$ -hoz $\exists \nu(\epsilon)$ hogy $n > \nu$ esetén $|a_n - A| < \epsilon$.

$$\boxed{A - \epsilon < a_n < A + \epsilon}$$

$\uparrow$
 $\epsilon/2$?

$A - \epsilon$ nem felső korlát. $\Rightarrow \exists \nu$ index, hogy

$$a_\nu > A - \epsilon.$$

a_n monoton nö: $n > \nu$ akkor $a_n \geq a_\nu > A - \epsilon$.

(3)

Ez a $\forall$ jó kritériumok. $n \geq \nu$ esetén

$$A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon.$$

Valódi divergens sorozat.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty.$$

Def: Azt mondjuk, hogy a_n határért. $+\infty$, ha

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}$ -hez $\exists \nu(\varepsilon)$ adható, hogy

$$n > \nu(\varepsilon) \text{ esetén } a_n > \varepsilon.$$

példa.

Ígazoljuk:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^4 - 3n + 4}}{3n + 2} = \infty.$$

Legyen $K \in \mathbb{R}$ tetszőleges. (Tfh pozitív is.) Kell:

$\exists \nu(K)$, hogy $n > \nu(K)$ esetén

$$a_n > K.$$

$$\frac{\sqrt{n^4 - 3n + 4}}{3n + 2} > K.$$

also becsült kell adni.

$$3n + 2 \leq 4n \Rightarrow (2 \leq n)$$

$$\left(\begin{array}{c} 3n + 2 \leq 3n + 2n \\ \parallel \\ 5n \end{array} \right) \text{ est van kell indokolni}$$

$$n^4 - 3n + 4 \geq n^4 - 3n \geq n^4 - \frac{1}{3}n^4 = \boxed{\frac{2}{3}n^4}$$

$\uparrow$ nem nagyobb a. $\uparrow$ nagyobb volt az.

$$\left(\begin{array}{l} 3n \leq \frac{1}{3}n^4 \\ g \leq n^3 \\ \sqrt[3]{g} \leq n \end{array} \right) \quad \text{Beszünk.}$$

$$\frac{\sqrt{n^4 - 3n + 4}}{3n + 2} \geq \frac{\sqrt{\frac{2}{3}n^4}}{4n} = \frac{\sqrt{\frac{2}{3}}n^2}{4n} = \frac{\sqrt{\frac{2}{3}}}{4}n > K.$$

$$n > \frac{4K}{\sqrt{\frac{2}{3}}}$$

A legnagyobb hatvány is bejön az!

$$V(K) = \max \left\{ \frac{4K}{\sqrt{\frac{2}{3}}}, 3 \right\}.$$

$\downarrow$ a feltétel miatt.

Mivel végtelenre is megfigyelhetjük.

Mivel az sorozat.

(példa.)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n^4 - 3n}{3n^2 + 11} = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{n^4}{n^2}}_{\rightarrow \infty} \cdot \underbrace{\frac{-1 - \frac{3}{n^3}}{3 + \frac{11}{n^2}}}_{\rightarrow -\frac{1}{3}} = -\infty$$

$\rightarrow 0$ (for $\frac{3}{n^3}$)
 $\rightarrow 0$ (for $\frac{11}{n^2}$)
 $\rightarrow -\frac{1}{3}$

$$d) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \cdot (\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \cdot (\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}) \cdot \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \cdot \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}} \cdot \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{1-\frac{1}{n}}} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

Rendőrv.

Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Kell:

$$\exists \nu(\varepsilon) \text{ hogy } n > \nu(\varepsilon) \text{ esetén } |c_n - A| < \varepsilon.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \rightarrow \exists \nu_1 \text{ hogy } n > \nu_1 \text{ esetén } |a_n - A| < \varepsilon.$$

$$\underline{A - \varepsilon} < \underline{a_n} < \underline{A + \varepsilon}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = A \rightarrow \exists \nu_2 \text{ hogy } n > \nu_2 \text{ esetén } |b_n - A| < \varepsilon$$

↓

$$A - \varepsilon < b_n < A + \varepsilon$$

$n > n_0$ esetén

$$a_n \leq c_n \leq b_n.$$

$$\text{Ha } n > \max \{ n_0, \nu_1, \nu_2 \}$$

$$\underline{A - \varepsilon} < \underline{a_n} \leq \underline{c_n} \leq \underline{b_n} < \underline{A + \varepsilon}$$

$$|c_n - A| < \varepsilon.$$

Speci sorozatok:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \begin{cases} 0 & \text{ha } |q| < 1 \\ 1 & \text{ha } q = 1 \\ \infty & \text{ha } q > 1 \\ \text{nem létezik} & \text{ha } q \leq -1 \end{cases}$$

↑ oszcillál.

2.) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4n-3}{5n+11} \right)^{n-2} =$

l), m) is igen ↑

alap háta tart? Egnel kisebb számhoz tart.

Kest. $\left(\rightarrow \frac{4}{5} \right)$

$$\left(\frac{4}{5} \right)^{n-2} = \left(\frac{4}{5} \right)^{-2} \cdot \left(\frac{4}{5} \right)^n \rightarrow 0 \quad \text{Ha } n \rightarrow \infty.$$

→ 0.

Sztyük, hogy 0 a
határérték.

Rendőselves pelda. Típuspelda es.

Mivel: $\frac{4n-3}{5n+11} = \frac{4}{5}$, ezt egy nagy n -re.

$$\frac{7}{10}$$

$$\frac{7}{10} < \frac{4n-3}{5n+11} < \frac{9}{10}$$

$$\left(\frac{7}{10} \right)^{n-2} < \left(\frac{4n-3}{5n+11} \right)^{n-2} < \left(\frac{9}{10} \right)^{n-2}$$

⑦

A bel oldal mellékes tart.

A jobb oldal is.

⇓

a középső is mellékes tart

$$\underbrace{\left(\frac{7}{10}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{7}{10}\right)^n}_{\rightarrow 0} < \left(\frac{4n-3}{5n+1}\right)^{n-2} < \underbrace{\left(\frac{9}{10}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^n}_{\rightarrow 0}$$

$n \rightarrow \infty$

e.) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4n+2}{3n-9} \right)^{3n} = ?$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n+2}{3n-9} = \frac{4}{3}$$

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{3n} = \left(\frac{4}{3}\right)^3 \cdot \underbrace{\left(\frac{4}{3}\right)^n}_{\rightarrow +\infty}$$

Szükség: A határérték $+\infty$.

Mivel $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n+2}{3n-9}$ határértéke $\frac{4}{3}$, ezért elég nagy n

esetén

$$\frac{4n+2}{3n-9} > \frac{7}{6}$$

$$\left(\frac{4n+2}{3n-9}\right)^{3n} > \left(\frac{7}{6}\right)^{3n}$$

$\downarrow n \rightarrow \infty$

∞ .

⑧

Speci dolog:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1 \quad \text{lesz...}$$

$$1 \leq \sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n} \cdot \underbrace{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdots 1}_{n-2 \text{ db}}} \leq \frac{\sqrt{n} + \sqrt{n} + 1 + \cdots + 1}{2} =$$

$$= \underbrace{\frac{2}{\sqrt{n}}}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\frac{n-2}{n}}_{\rightarrow 1} = 1$$

emitt tart egyhez.

Ez csak érdekesség.

$\sqrt[n]{a}$ sorozat.

$$a, \sqrt{a}, \sqrt[2]{a}, \dots, \sqrt[n]{a}$$

Ez is rendelhető bizonyítható.

$$\begin{array}{ccc} 1 \leq \sqrt[n]{a} \leq \sqrt[n]{n} & & \\ \downarrow \quad \downarrow & \text{ha } n \text{ elég nagy} & \\ 1 & & 1 \end{array}$$

példát nézzünk rá.

$$f) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{7^n - 2 \cdot 5^n + 1} \underset{\text{nagy } n\text{-re}}{\approx} \sqrt[n]{7^n} = 7. \quad \text{Ezt segítjük}$$

legyen n természetes.

$$\underbrace{7^n - \frac{1}{2} 7^n}_{\geq 0} \leq 7^n - 2 \cdot 5^n \leq 7^n - 2 \cdot 5^n + 1 \leq 7^n + 1 \leq 7^n + 7^n = 2 \cdot 7^n$$

$$\therefore \text{Ha } n \text{ elég nagy: } \frac{1}{2} 7^n \geq 2 \cdot 5^n$$

$\frac{1}{2} 7^n \geq 2 \cdot 5^n$

Radjik össze.

$$\sqrt[n]{\frac{1}{2} 7^n} \leq \sqrt{7^n - 2 \cdot 5^n + 1} \leq \sqrt[n]{2 \cdot 7^n}$$

$\downarrow 1 \cdot 7$
 $\downarrow 1 \cdot 7$

$\downarrow n \rightarrow \infty$

$\underline{\underline{7}}$

Speci sorozatok.

$$z \in \mathbb{N}.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n^z} = 0$$

Def.: $f(x) = \frac{\ln x}{x^z} \quad x > 0 - \text{ra.}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^z} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{z x^{z-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{z x^z} = 0.$$

A L'Hospital-szabályt így is meg lehet használni, de ez van.

$$\underline{\ln n \ll n^z}.$$

Tehát nulla a sorozat határértéke.

Legyen $a > 1$: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^z}{a^n} = 0$ L'Hospital-szabály szerint.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0.$$

$$\ln n \ll n^z \ll a^n \leq n!$$

"Ki az erősebb?"

Ha $|a| \leq 1$:

$$\left| \frac{a^n}{n!} \right| = \frac{|a|^n}{n!} \leq \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0 \text{ ha } n \rightarrow \infty.$$

Ha $|a| > 1$: pelda $a=3$ esete.

$$\begin{aligned} n > 3: \quad 0 \leq \frac{3^n}{n!} &= \frac{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n} \leq \frac{3 \cdot 3 \cdot \cancel{3}}{1 \cdot 2 \cdot \cancel{3}} \cdot 1 \cdot \frac{3}{n} = \\ &= \frac{9}{2} \cdot \frac{3}{n} \end{aligned}$$

$\downarrow$
0

Rendőrelvű bőlátás est is.

Euler - szám

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad \text{Igazolhatóan konvergens sorozat.}$$

e:
 $\uparrow$
Euler-szám

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Eszrevétel:

Legyen $g: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható és

$$|g(x)| \rightarrow \infty \text{ ha } x \rightarrow \infty.$$

$$\text{Ekkor } \left(1 + \frac{1}{g(x)}\right)^{g(x)} \rightarrow e \text{ ha } x \rightarrow \infty.$$

Valóban:

$$\left(1 + \frac{1}{g(x)}\right)^{g(x)} = e^{\ln\left(1 + \frac{1}{g(x)}\right)^{g(x)}} = e^{g(x) \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{g(x)}\right)}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{g(x)}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{g(x)}\right)}{\frac{1}{g(x)}} \stackrel{L'H}{=} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{1 + \frac{1}{g}} \cdot \frac{-1}{g^2(x)} \cdot g'(x)}{\frac{-1}{g^2(x)} \cdot g'(x)} = 1.$$

Mi a hancra jó ez?

$$\left(1 + \frac{1}{g(x)}\right)^{g(x)} \rightarrow e$$

Ugyanígy használható sorozatokhoz is ez a tétel.

Ez a klasszikus eset.

$$\begin{aligned} \text{m)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n-2}\right)^{3n-5} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-2+3}{n-2}\right)^{3n-5} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{n-2}\right)^{3n-5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{n-2}{3}}\right)^{3n-5} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\left(1 + \frac{1}{\frac{n-2}{3}}\right)^{\frac{n-2}{3}}}_{e}^{\frac{3}{n-2} \cdot (3n-5)} = \underline{\underline{e^9}} \end{aligned}$$

Részsorozat.

$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}$

Részsorozat: $a_n, a_5, a_6 \dots$

Másik: dobjuk ki a páratlan indexűeket.

Meg illeszkedik

legyen $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ a természetes számok egy szigorúan növe sorozata.

A példánkban: $4, 5, 6, 7, \dots$

$2, 4, 6, 8, \dots$

$2, 5, 10, 17, \dots$

Ekkor az $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ sorozat az a_n sorozat részsorozatának tekinthető.

Ez a formalizálás.

Törlekési pont:

$$a_n = \frac{1}{n} + (-1)^n$$

$$1-1, \quad \frac{1}{2}+1, \quad \frac{1}{3}-1, \quad \frac{1}{n}+1, \quad \dots$$

$\parallel$
 0

$1, -1$ a törlekési pontok.

Kivételjelek a páros vagy a páratlan törlekési pontokat.

$$a_{2k} = \frac{1}{2k} + (-1)^{2k} = \frac{1}{2k} + 1 \rightarrow 1 \text{ ha } k \rightarrow \infty.$$

Az 1 az törlekési pont

$$a_{2k-1} = \frac{1}{2k-1} + (-1)^{2k-1} = \frac{1}{2k-1} - 1 \rightarrow -1 \text{ ha } k \rightarrow \infty.$$

A -1 is törlekési pont.

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = +1$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = -1$$

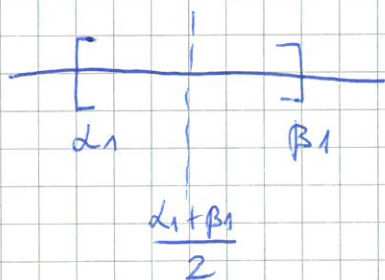
Bolzano-Weierstrass-tétel:

Minden korlátos sorozatnak van konvergens részsorozata.

Ez a lényeg.

Biz.: $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ korlátos $\Rightarrow \alpha_1, \beta_1 \in \mathbb{R}$ úgy, hogy
 $\alpha_1 < \beta_1$
 $\alpha_1 < a_n < \beta_1 \quad \forall n$ -re.

Legyen $n_1 = 1$. (a_1 a részsorozat első tagja).



Felcsonkít meg!

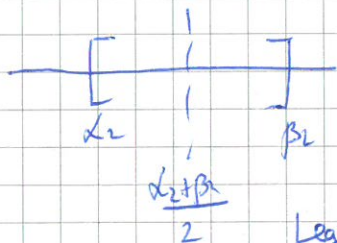
Valamely részintervallumban tutya végtelen sok elem van.

Ez legyen $[\alpha_2, \beta_2]$.

$\uparrow$
 $\exists n_2 > n_1$ hogy $a_{n_2} \in [\alpha_2, \beta_2]$

És $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq a_{n_2} \leq \beta_2 \leq \beta_1$

$$\beta_2 - \alpha_2 = \frac{\beta_1 - \alpha_1}{2}$$



Legyen megint $[\alpha_3, \beta_3]$ az egyik

fel, ahol végtelen sok elem van az adott sorozatnak

$\exists n_3 > n_2$ hogy $a_{n_3} \in [\alpha_3, \beta_3]$.

$$\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \alpha_3 \leq a_{n3} \leq \beta_3 \leq \beta_2 \leq \beta_1$$

$$\beta_3 - \alpha_3 = \frac{\beta_1 - \alpha_1}{2^2}$$

lesz igaz.

Teljes indukcióval:

$(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ monoton nö és korlátos;

$(\beta_n)_{n=1}^{\infty}$ monoton csökken és korlátos;

$(a_n)_{n=1}^{\infty}$ egy $(a_{nk})_{k=1}^{\infty}$ részsorozat

Rapport.

$$\alpha_k \leq a_{nk} \leq \beta_k \quad \beta_k - \alpha_k = \frac{\beta_1 - \alpha_1}{2^{k-1}}$$

Ha $k \rightarrow \infty$

$$\alpha = \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = \sup \alpha_k$$

$$\beta = \lim_{k \rightarrow \infty} \beta_k = \inf \beta_k$$

$$\alpha < \beta.$$

$\alpha \leq \beta$ lesz igaz

$$\alpha_k \leq \alpha \quad \forall k - n.a.$$

$$\beta_k \geq \beta \quad \forall k - n.a.$$

$$\boxed{0 \leq \beta - \alpha} \leq \beta_k - \alpha_k = \frac{\beta_1 - \alpha_1}{2^{k-1}} \xrightarrow{\downarrow 0} 0$$

$$\boxed{\alpha = \beta}$$

Mivel $\alpha_k \leq a_{nk} \leq \beta_k$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ \alpha & & \beta \\ & \searrow_{k \rightarrow \infty} & \downarrow \\ & \alpha & \beta \end{array}$$

Tehát $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = \alpha.$