

Többráértékű függvények

-59-

A n dimenziós tér

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y, z) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{n \text{ db}} = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R}, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

felölés: $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

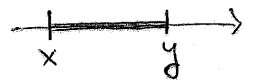
n-dimenziós vektortér

(értelmezhető a vektorok összege, c-szorzása, ahol $c \in \mathbb{R}$, de nem értelmezhető két vektor szorzata)

Távolság fogalma

$n=1$ esetén $x \in \mathbb{R}$ és $y \in \mathbb{R}$ távolsága:

$$d(x, y) = |x - y|$$



Magasabb dimenzióban több fajta távolságot is használhatunk.

Def: Legyen H egy halmaz (gondoljunk $H = \mathbb{R}^n - \{x\}$).

Azt mondjuk, hogy $d: H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ ^(*) függvény

távolság H -n, ha

1. $d(x, y) \geq 0 \quad \forall (x, y) \in H \times H$ esetén és $d(x, y) = 0$ akkor és csak akkor, ha $x = y$,

2. $d(x, y) = d(y, x) \quad \forall (x, y) \in H \times H$ -ra,

3. $\forall x \in H, y \in H$ és $z \in H$ esetén

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y).$$

$\cdot$ $\cdot$ $\cdot$
 $x \quad \quad y \quad \quad z$

(*) megjegyzés: $H \times H = \{(x, y) : x \in H, y \in H\}$

Példák távolságfüggvényekre:

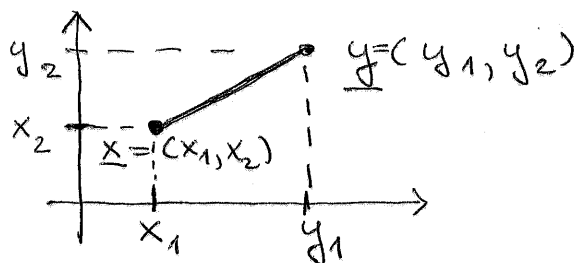
① $\mathbb{R}^2$ -ben : $\underline{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$

$\underline{y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$

Euklideszi -
távolság

$\underline{x}$ és $\underline{y}$ távolsága:

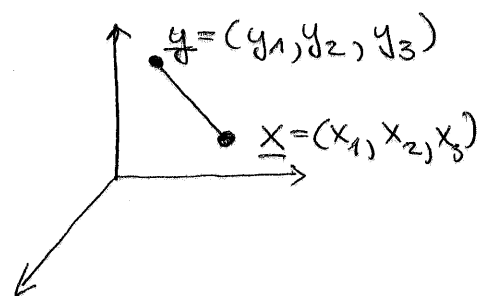
$$d_g(\underline{x}, \underline{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$



$\mathbb{R}^3$ -ban : $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$

$\underline{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$

$$d_g(\underline{x}, \underline{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}$$



$\mathbb{R}^n$ -ben $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

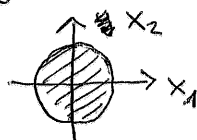
és $\underline{y} = (y_1, \dots, y_n)$ távolsága:

$$d_g(\underline{x}, \underline{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$

Azon pontok halmara amelyek legfeljebb 1 távolságra vannak az origótól:

$n=2$: zárt körlemez

$n=3$: zárt gömb



24. Tétel: d_g távolság $\mathbb{R}^n$ -en. (Er az ún. Euklideszi távolság.)

Bizonyítás: Az 1. és a 2. tulajdonság nyilvánvalóan teljesül.

3. tulajdonság bizonyítása csak olvasmány.

A Cauchy - Bunjakovszkij - Schwarz - egyenlőtlenséget használjuk segédtekként.

Segédteétel (C-B-Sch - egyenlőtlenség) - Olvasmány

Ha $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ és $b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{R}$, akkor

$$|a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n| \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2}$$

Segédteétel igazolása: $\forall x \in \mathbb{R} - \mathbb{R}$

$$0 \leq \sum_{i=1}^n (a_i x + b_i)^2 = \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) x^2 + 2 \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right) x + \sum_{i=1}^n b_i^2$$

$$(a_i x + b_i)^2 = a_i^2 x^2 + 2 a_i b_i x + b_i^2$$

Ez csak úgy lehet, hogy az itt szereplő másodfokú polinom diszkriminánsa nem pozitív, azaz

$$D = 4 \left(\sum a_i b_i \right)^2 - 4 \left(\sum a_i^2 \right) \left(\sum b_i^2 \right) \leq 0$$

Átrendezve:

$$\left(\sum a_i b_i \right)^2 \leq \left(\sum a_i^2 \right) \left(\sum b_i^2 \right)$$

$$|\sum a_i b_i| \leq \sqrt{\sum a_i^2} \sqrt{\sum b_i^2}$$

2.4. Tétel bizonyítása (folytatás) - Olvasmány

Bizonyítandó $\underline{x}, \underline{y}, \underline{z} \in \mathbb{R}^n$ esetén, hogy

$$d_g(\underline{x}, \underline{y}) \leq d_g(\underline{x}, \underline{z}) + d_g(\underline{z}, \underline{y}),$$

azaz

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - z_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n (z_i - y_i)^2}.$$

$$\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 = \sum_{i=1}^n ((x_i - z_i) + (z_i - y_i))^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^n (x_i - z_i)^2 + 2 \sum_{i=1}^n (x_i - z_i)(z_i - y_i) + \sum_{i=1}^n (y_i - z_i)^2$$

$$\leq \sum_{i=1}^n (x_i - z_i)^2 + 2 \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - z_i)^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (z_i - y_i)^2} + \sum_{i=1}^n (y_i - z_i)^2 =$$

C-B-Sch

$$a_i = x_i - z_i$$

$$b_i = z_i - y_i$$

$$= \left(\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - z_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - z_i)^2} \right)^2$$



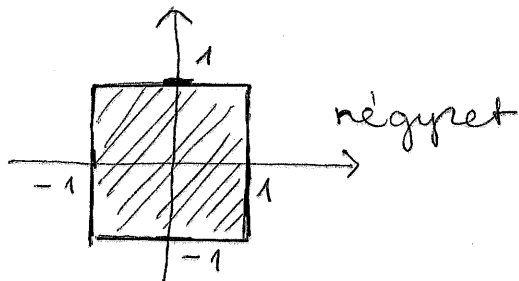
Tehát teljesül a 3. tulajdonság is!

További példák távolságfüggvényekre

② $\mathbb{R}^2$ -ben: $d_h(\underline{x}, \underline{y}) = \max \{ |x_1 - y_1|, |x_2 - y_2| \}$

Melyek azok a pontok a síkon, amelyek legfeljebb 1 távolságra vannak az origótól?

A válasz:



Csebisev - metrika
(ℓ_∞ - metrika)

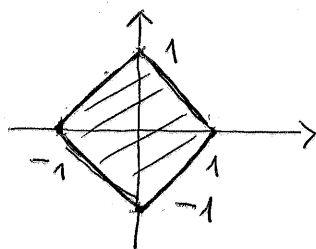
$\mathbb{R}^3$ -ban: $d_h(\underline{x}, \underline{y}) = \max \{ |x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|, |x_3 - y_3| \}$

$\mathbb{R}^n$ -ben: $d_h(\underline{x}, \underline{y}) = \max \{ |x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|, \dots, |x_n - y_n| \}$

③ Manhattan - metrika (ℓ_1 - metrika)

$$\begin{aligned} d(\underline{x}, \underline{y}) &= |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \dots + |x_n - y_n| \\ &= \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| \end{aligned} \quad \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n \text{ esetén}$$

$n=2$ esetén azok pontok a síkon, amelyek legfeljebb egy távolságra vannak az origótól:



Er a két távolságfüggvény is teljesíti a definícióban szereplő 3 tulajdonságot.

Környezetek:

$n=1$ esetén a $\in \mathbb{R}$ δ - sugarú környezetek (itt $\delta > 0$):

$$U(a, \delta) = \{ x \in \mathbb{R} : |x - a| < \delta \}$$

Magasabb dimenzióban: $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$

$\underline{a} \in \mathbb{R}^n$ δ -sugarú környezet az Euklideszi-metri-

hában: $U(\underline{a}, \delta) = \{x \in \mathbb{R}^n : d_g(x, \underline{a}) < \delta\}$ $\leftarrow$ gömbkörnyezet

a Csebisev-metrikában:

$$U(\underline{a}, \delta) = \{x \in \mathbb{R}^n : d_k(x, \underline{a}) < \delta\}$$

$\uparrow$ hockakörnyezet

Def.: Azt mondjuk, hogy az $(x_k)_{k=0}^{\infty}$ $\mathbb{R}^n$ -beli pontsorozat konvergál $\underline{a} \in \mathbb{R}^n$ -hez, ha

$$d(x_k, \underline{a}) \rightarrow 0 \quad k \rightarrow \infty \text{ esetén,}$$

azaz $\forall \varepsilon > 0$ -hoz $\exists \nu = \nu(\varepsilon)$, hogy $k > \nu$ esetén $d(x_k, \underline{a}) < \varepsilon$.

Megjegyzés a jelöléshez:

$$\text{Itt } x_k = (x_k^{(1)}, x_k^{(2)}, \dots, x_k^{(n)}) \in \mathbb{R}^n$$

$$\underline{a} = (a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(n)}) \in \mathbb{R}^n$$

2.5.

Tétel (Koordinátánkénti konvergencia tétele):

$(x_k)_{k=0}^{\infty}$ pontsorozat konvergál $\underline{a} \in \mathbb{R}^n$ -hez $\Leftrightarrow$

$\forall i \in \{1, \dots, n\}$ -re $x_k^{(i)} \in \mathbb{R}$ konvergál $a^{(i)} \in \mathbb{R}$ -hez.

Nem bizonyítjuk.

További definíciók:

$H \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt, ha $\forall \underline{a} \in H$ -hoz megadható egy $U(\underline{a}, \delta)$ környezet, hogy $U(\underline{a}, \delta) \subseteq H$



Azt mondjuk: nyílt halmaz minden pontja belső pont.

$\mathbb{R}^n$ -beli pontthalmarak egységei tulajdonságai

- 64 -

Def: Legyen $H \subseteq \mathbb{R}^n$ halmaz.

- Az $a \in H$ pontot H belső pontjának hívjuk, ha $\exists \delta > 0$ úgy, hogy $U(a, \delta) \subset H$. Jelölés: $\text{int } H$
- Azt az $a \in \mathbb{R}^n$ pontot, amelyre létezőleges $\delta > 0$ esetén $U(a, \delta)$ tartalmazza H -nak és $\mathbb{R}^n \setminus H$ -nak is pontját, a H határpontjának hívjuk. A határpontok halmazát ∂H -val jelöljük.

Def: $H \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, ha minden pontja belső pont.

Példák: $\emptyset$, $\mathbb{R}^n$, nyílt intervallum, nyílt téglák, nyílt gömb, stb.

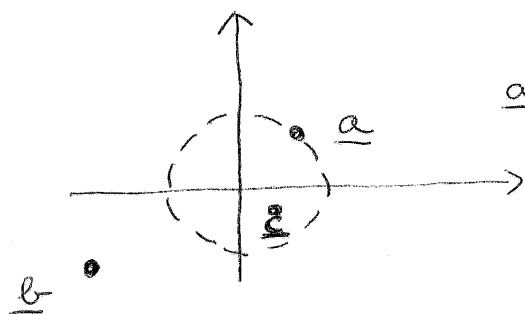
Megmutatható: véges sok nyílt halmaz metszete nyílt. Tetszőlegesen sok nyílt halmaz uniója nyílt.

Def: $H \subseteq \mathbb{R}^n$ zárt halmaz, ha H tartalmazza minden határpontját, azaz $\partial H \subseteq H$.

Példák: $\emptyset$, $\mathbb{R}^n$, zárt intervallum, zárt téglák

Ekvivalens def.: $H \subseteq \mathbb{R}^n$ halmaz zárt, ha a komplementere $H^c = \mathbb{R}^n \setminus H$ nyílt.

Def: Legyen $H \subseteq \mathbb{R}^n$ halmaz. Az $a \in \mathbb{R}^n$ pontot (vegyük észre, hogy a nem feltétlenül eleme H -nak) a H torlódási pontjának ^{nevezünk}, ha a minden környezete tartalmaz a -tól különböző H -beli pontot.



a, c találási pontjai ennek
a nyílt körlapnak

b nem találási pontja a nyílt körlapnak

Újabb, az előzőekkel ekvivalens definíció zárt halmarra:

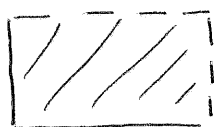
Def: $H \subseteq \mathbb{R}^n$ zárt, ha minden találási pontját tartalmazza.

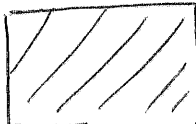
Megmutatható: Tetszőlegesen sok zárt halmaz metszete zárt. Véges sok zárt halmaz uniója zárt halmaz.

Egyszerű nyílt és zárt halmazok: $\emptyset$ és $\mathbb{R}^n$. Más ilyen nincs.

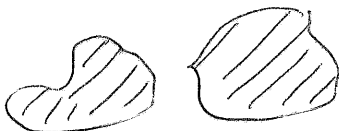
Def: $H \subseteq \mathbb{R}^n$ lezártja a $H \cup \partial H$ halmart értjük.

Példa: Nyílt körlap lezártja a zárt körlap.



lezártja: 

Def: $H \subseteq \mathbb{R}^n$ összefüggő, ha ^{vármely} ~~nem áll elő~~ két pontja összeköthető olyan folytonos vonallal, amely teljesen H -ban van.

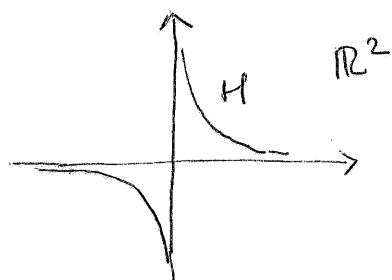
Példa:  nem összefüggő

Def:

Az összerüggő nyílt halmazokat tartományoknak hívjuk.

Def: $H \subseteq \mathbb{R}^n$ korlátos, ha létezik az origónak olyan $U(0, \delta)$ környezete, hogy $H \subseteq U(0, \delta)$.

Példa: $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \frac{1}{x}\}$ nem korlátos



Def: $H \subseteq \mathbb{R}^n$ halmart kompaktnak nevezzük, ha lecsűrőleges nyílt halmazokkal való fedéséből kiválasztható véges fedés.

Azaz: legyenek H_i , $i \in I$, nyílt halmazok, ahol I egy lecsűrőleges indexhalmaz. Ha H kompakt, és

$H \subseteq \bigcup_{i \in I} H_i$ akkor létezik olyan n pozitív egész és $i_1, i_2, \dots, i_n \in I$ indexek, hogy

$$H \subseteq \bigcup_{k=1}^n H_{i_k}.$$

Megmutatható, hogy egy $\mathbb{R}^n$ -beli H halmaz pontosan akkor kompakt, ha korlátos és zárt.

Er a Borel - fele lefedési tétel.

Határérték

Legyen $D \subseteq \mathbb{R}^n$ és $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ függvény
(vektor - skalár függvény)

Példák $n=2$ esetén vektor - skalár függvényekre:

① $f(x, y) = x^2 - 3y^2$

Itt D választható $D = \mathbb{R}^2$ -nek.

② $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

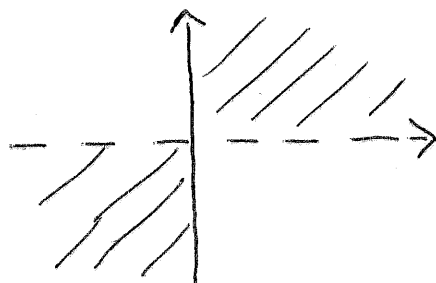
Értelmerési tartomány: $1 - x^2 - y^2 \geq 0$
 $x^2 + y^2 \leq 1$

Most $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ zárt körlemez

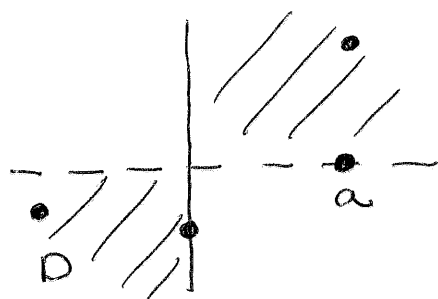
③ $f(x, y) = \sqrt{\frac{x}{y}}$

Értelmerési tartomány: $y \neq 0$ és $\frac{x}{y} \geq 0$

Tehát most D az alábbi halmaz:



Legyen $\underline{a} \in \mathbb{R}^n$ az f értelmerési tartományának
torlódási pontja ($\Leftrightarrow$ legyen $\underline{a} \in \mathbb{R}^n$ olyan, hogy
 $\forall \delta > 0$ esetén $U(\underline{a}, \delta) \setminus \{\underline{a}\}$ és D metszete
nem üres).



Példák arra, hogyan
választhatjuk meg
 $\underline{a}$ -t, ha

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x}{y} \geq 0 \text{ és } y \neq 0\}$$

Def: Legyen $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ vektor - skalár függvény és $\underline{a}$ talódási pontja D -nek. Azt mondjuk, hogy f határértéke $\underline{a}$ -ban A valós szám, ha $\forall \varepsilon > 0$ -hoz $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ úgy, hogy $\forall \underline{x} \in D$, $0 < d(\underline{x}, \underline{a}) < \delta$ esetén

$$|f(\underline{x}) - A| < \varepsilon.$$

Hegyezés: A definíciót bármelyik metrikával használhatjuk.

Szokásos jelölés: $\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{a}} f(\underline{x}) = A$

Feladatok: ① Legyen $f(x, y) = \frac{x^3 y^2}{x^2 + y^2}$

Hoz $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{0, 0\}$

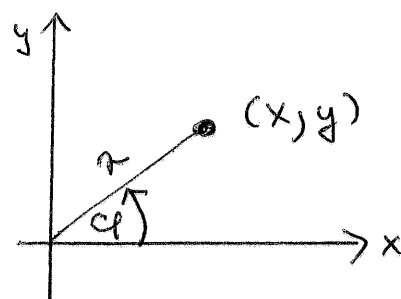
Az $a = (0, 0)$ pont talódási pontja a D halmarnak.

$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$ létezik-e?

Térjünk át polárkoordinátákra:

$$x = r \cdot \cos \varphi \quad \Leftrightarrow \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$y = r \cdot \sin \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \tan \varphi = \frac{y}{x}$$



Ehhez $(x, y) \rightarrow (0, 0) \quad \Leftrightarrow \quad r \rightarrow 0^+ \text{ és } \varphi \in [0, 2\pi)$

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = \lim_{\substack{r \rightarrow 0^+ \\ \varphi \in [0, 2\pi)}} \frac{(r \cos \varphi)^3 (r \sin \varphi)^2}{r^2} =$$

$$= \lim_{\substack{r \rightarrow 0^+ \\ \varphi \in [0, 2\pi)}} r^3 \cdot \underbrace{\cos^3 \varphi \cdot \sin^2 \varphi}_{\text{er korlátos}} = 0$$

$\downarrow$
 $0 \quad |\cos^3 \varphi \cdot \sin^2 \varphi| < 1$

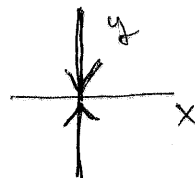
Tehát f határértéke 0 az origóban.

$$\textcircled{2} \quad f(x, y) = -\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad D = \mathbb{R}^2 \setminus \{0, 0\}$$

Létezik-e $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = ?$

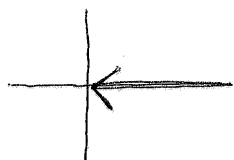
Haladjunk az y -tengely mentén!

$$\lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ x=0}} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} -\frac{0}{\sqrt{0^2 + y^2}} = 0$$



Közelítsük az origót az x -tengely mentén!

$$\lim_{\substack{y=0 \\ x \rightarrow 0+}} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0+} -\frac{x}{\sqrt{x^2 + 0^2}} = \lim_{x \rightarrow 0+} -\frac{x}{x} = -1$$



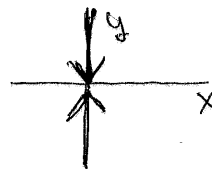
Különböző irányokból közelítve az origót, különböző határértékeket kaptunk. $\Rightarrow f$ -nek nem létezik a határértéke az origóban.

$$\textcircled{3} \quad f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} \quad \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) \text{ létezik-e?}$$

$$D = \mathbb{R}^2 \setminus \{0, 0\}$$

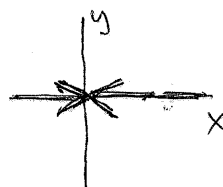
Közelítsük az origót az y -tengely mentén!

$$\lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ x=0}} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0 \cdot y}{0^2 + y^2} = 0$$



Az x -tengely mentén haladva:

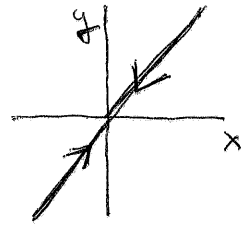
$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y=0}} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot 0}{x^2 + 0^2} = 0$$



A határérték mégsem létezik! Miért?

Azt, hogy a határérték mégsem létezik úgy láthatjuk, hogy az $y=x$ egyenes mentén tartunk a $(0,0)$ -ba:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y=x}} f(x,y) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y=x}} \frac{x \cdot x}{x^2 + x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$$



Különböző irányokból közelítve az origót, más-más határértéket kapunk $\Rightarrow f$ -nek nem létezik határértéke $(0,0)$ -ban.

④ $f(x,y) = \frac{x^3 - xy^2}{x^2 + y^2}$

$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ létezik-e?

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 - xy^2}{x^2 + y^2}$$

$$\begin{array}{ccc} x \cdot \frac{x^2}{x^2 + y^2} - x \cdot \frac{y^2}{x^2 + y^2} & = & 0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \text{er} & 0 \\ & \text{1-nél} & \text{er is} \\ & \text{hiselt} & \text{hiselt} \\ & (x^2 < x^2 + y^2) & \text{1-nél} \end{array}$$

— x —

Def: legyen $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ vektor - skalar függvény, a torlódási pontja D -nek. Azt mondjuk, hogy f határértéke a -ban $+\infty$, ha $\forall K \in \mathbb{R}$ -hez $\exists \delta = \delta(K) > 0$ úgy, hogy $\forall \underline{x} \in D$, $0 < d(\underline{x}, \underline{a}) < \delta$ esetén $f(\underline{x}) > K$.

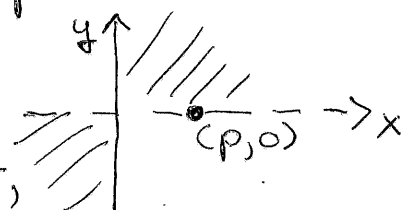
felölés: $\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{a}} f(\underline{x}) = +\infty$.

1. Példa $f(x,y) = \sqrt{\frac{x}{y}}$ 62. oldal, 3. példa

D értelmezési tartomány:

$a = (p, 0)$ torlódási pont,

Tekintsük most a $p > 0$ esetet.



Vegyük észre, hogy ha $(x, y) \rightarrow (p, 0)$ és $(x, y) \in D$ -nek, akkor y szűségheppen pozitív, tehát $\frac{1}{y} \rightarrow \infty$.

Ezért

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (p,0) \\ p>0}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (p,0) \\ p>0}} \sqrt{\frac{x}{y}} = +\infty$$

2. Példa:

$$f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2} \quad D = \mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{x^2+y^2} = +\infty$$

"1/0+" alakú

Folytonosság - definíció:

$D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $\underline{a} \in D$ pont

Azt mondjuk, hogy f folytonos $\underline{a}$ pontban, ha

$$\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{a}} f(\underline{x}) \text{ létezik és } \lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{a}} f(\underline{x}) = f(\underline{a}).$$

(Tehát f folytonos $\underline{a}$ -ban, ha $\forall \varepsilon > 0$ -hoz létezik $\delta > 0$, hogy $\forall \underline{x} \in D$, $d(\underline{x}, \underline{a}) < \delta$ esetén $|f(\underline{x}) - f(\underline{a})| < \varepsilon$.)

Def: f folytonos a D halmazon, ha $\forall$ minden pontjában folyt.

Érvenyen marad számos, az egyváltozós esetben tanult tétel. Ezek a következők, nem bizonyítjuk őket.

2.6. Tétel: (i) Legyen $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$, $\underline{a} \in D$, $c \in \mathbb{R}$ konstans.

Ha f és g folytonos $\underline{a}$ -ban, akkor $f \pm g$, $f \cdot g$, cf és $g(\underline{a}) \neq 0$ esetén $\frac{f}{g}$ is folytonos $\underline{a}$ -ban.

(ii) Legyen $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $\underline{a} \in D$. Legyen g olyan (skalár - skalár) függvény, amely értelmezve van az $f(\underline{a})$ pontban. Ekkor a $g \circ f$ összetett függvény folytonos $\underline{a}$ -ban.

Pl: $f(x,y) = x^3 + y^3$ folytonos az $(1,1)$ pontban
 $g(z) = \sin z$ - 11- 2-ben

$\Downarrow$
 $g \circ f$ folytonos $(1,1)$ -ben
 Most $(g \circ f)(x,y) = \sin(x^3 + y^3)$

A 26. Tétel alkalmazni fogjuk a következő oldal példáiban.

27. Tétel: Tegyük fel, hogy D kompakt (azaz korlátos és zárt) halmaz $\mathbb{R}^n$ -ben és f folytonos D -n. Ekkor igazak az alábbiak:

(i) f korlátos D -n, azaz $\exists k \in \mathbb{R}$ és $K \in \mathbb{R}$,
 hogy $\forall x \in D$ esetén $k < f(x) < K$,

(ii) f felveszi a szélsőértékeit D -n, azaz

$\exists x_1, x_2 \in D$, hogy

$$f(x_1) = \max_{x \in D} f(x) \text{ és } f(x_2) = \min_{x \in D} f(x).$$

Feladatok: Folytonosak-e az alábbi függvények?

$$\textcircled{1} \quad f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 y^2}{x^2 + y^2}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

f definíciójának első sorában szereplő függvényműveletek megőrik a folytonosságot, ha $(x,y) \neq (0,0)$
 $\Rightarrow$ csak $(0,0)$ -ban kell ellenőrizni a folytonosságot.
 Igaz-e, hogy

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0?$$

Ezt a 63. oldalon már megvizsgáltuk (1. példa), a válasz igen. Tehát f folytonos $\mathbb{R}^2$ -en.

$$\textcircled{2} \quad f(x,y) = \begin{cases} \frac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Megint csak $(0,0)$ -ban kell vizsgálni a folytonosságot, a függvény mindenhol máshol folytonos.

A 64. oldal 2. példájában láttuk, hogy

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \text{ nem is létezik!}$$

Tehát f nem lehet $(0,0)$ -ban folytonos.

$$\textcircled{3} \quad f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Megint csak $(0,0)$ -ban vizsgáljuk a folytonosságot. Vegyük észre, hogy

$$\frac{\sin(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2} = \frac{\sin(x^3 + y^3)}{x^3 + y^3} \cdot \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} \quad \text{ha } (x,y) \neq (0,0)$$

Tudjuk: $\sin(u)/u \rightarrow 1$, ha $u \rightarrow 0$.

Tehát $\frac{\sin(x^3+y^3)}{x^3+y^3} \rightarrow 1$, ha $(x,y) \rightarrow (0,0)$.

A szorzat második tényezőjének határértékét polárkoordinátákkal vizsgáljuk:

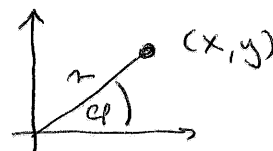
$$x = r \cdot \cos \varphi$$

$$y = r \cdot \sin \varphi$$

 $\Leftrightarrow$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\varphi = \arctg \frac{y}{x}$$



Azt kapjuk, hogy

$$\frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} = \frac{r^3 (\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi)}{r^2} = r (\underbrace{\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi}_{\text{ez konstans}}) \rightarrow 0 \quad \text{ha } r \rightarrow 0+$$

↓
0

Tehát

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^3+y^3)}{x^3+y^3} \cdot \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = 1 \cdot 0 = 0 = f(0,0)$$

f folyt $(0,0)$ -ban.

$$\textcircled{4} \quad f(x,y) = \begin{cases} \cos(x^2+y^2)^{\frac{1}{\sin(x^2+y^2)}} & , \text{ ha } 0 < x^2+y^2 < \pi \\ 1 & , \text{ ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Csak $(0,0)$ -ban kell a folytonosságot vizsgálni.
Dezen most $u = x^2 + y^2$

$$(x,y) \rightarrow (0,0) \Leftrightarrow u \rightarrow 0+$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = \lim_{u \rightarrow 0+} \cos u^{\frac{1}{\sin u}} = \lim_{u \rightarrow 0+} e^{\ln \cos u \cdot \frac{1}{\sin u}} =$$

$$= \lim_{u \rightarrow 0+} e^{\frac{1}{\sin u} \ln \cos u} = e^0 = 1$$

$$\lim_{u \rightarrow 0+} \frac{\ln \cos u}{\sin u} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{u \rightarrow 0+} \frac{\frac{1}{\cos u} (-\sin u)}{-\cos u} = \lim_{u \rightarrow 0+} \frac{-\sin u}{\cos u} = 0$$

Tehát a függvény folytonos $(0,0)$ -ban.