

Kalkulus II előadás

-1-

2015 - 2016 / tavaszi félév

Sorozatok

Természetes számok halmara: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

Def.: Sorozat: A természetes számok halmarára értelmezett függvény.

$$a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$n \mapsto a_n$$

jelölés: $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ vagy (a_n)

(a_n) sorozat tagjai: $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$

a sorozat n -dik tagja / általános tagja: a_n

Mivel a sorozat függvény, értelmezhetőek rá a függvényeknél ismert fogalmak: pl. monotonitás, korlátosság, stb.

Def: (a_n) alulról korlátos, ha $\exists k \in \mathbb{R}$, hogy $a_n \geq k \quad \forall n \in \mathbb{N}$ esetén.

(a_n) felülről korlátos, ha $\exists K \in \mathbb{R}$, hogy $a_n \leq K \quad \forall n \in \mathbb{N}$ esetén.

(a_n) korlátos, ha felülről és alulról korlátos.

Def: Suprémum: T.f.h. (a_n) sorozat felülről korlátos. Azt mondjuk, hogy M a sorozat legkisebb felső korlátja / suprémuma, ha

- M felső korlátja a sorozatnak, azaz

$$a_n \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N} - \text{re},$$

- (a_n) bármely K felső korlátja esetén $M \leq K$.

felölés : $M = \sup (a_n)$

Axióma : Felülről korlátos sorozatnak $\exists$ legkisebb felső korlátja.

Hasonlóan definiáljuk sorozat legnagyobb alsó korlátját / infimumát.

Monotonitás: az (a_n) sorozat monoton csökkenő,

ha $\forall i, j \in \mathbb{N}, i < j$ esetén $a_i \geq a_j$

$\Leftrightarrow \forall i \in \mathbb{N}$ esetén $a_i \geq a_{i+1}$.

Az (a_n) sorozat monoton növekvő, ha ...

Műveletek sorozatokkal: Az előző feleleven értékmértük függvények összegét, szorzatát, hányadosát, stb. Mivel a sorozat is függvény, ezek a definíciókat itt is használjuk.

Pl: $a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, n \mapsto a_n$

$b: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, n \mapsto b_n$

Sorozatok szorzata : $ab: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$

$n \mapsto a_n b_n$

Hegyezés: A sorozatok indexelése kezdődhet bármely egész számtól!

Pl: $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$

$a_{2016}, a_{2017}, \dots, a_n, \dots$

Olvasmány:

- 3 -

Példaként tekintsünk egy rekurzív sorozatot:

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}, \text{ ha } n \geq 1$$

$$a_1 = \sqrt{2}$$

Vizsgáljuk a sorozatot monotonitás, korlátosság szempontjából!

Tekintsük a sorozat első néhány tagját:

$$a_1 = \sqrt{2} \approx 1,41$$

$$a_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}} \approx 1,84776$$

$$a_3 = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}} \approx 1,96157$$

Tipp: a sorozat mon. nö és korlátos!

Korlátosság: A sorozat első néhány tagjának vizsgálata után felírhatjuk a következő sejtést:

$$\text{Sejtés: } \sqrt{2} \leq a_n < 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Bizonyítás: teljes indukcióval

1. lépés: $n=1$ -re nyilván igaz az állítás:

$$\sqrt{2} \leq a_1 = \sqrt{2} < 2$$

2. lépés: Tegyük fel, hogy az állítás igaz mely $n \in \mathbb{N}$ -re.

3. lépés: Igazoljuk az állítást $(n+1)$ -re:

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \overset{\substack{\uparrow \\ \text{indukciós hipotézis} \\ a_n < 2}}{<} \sqrt{2 + 2} = \sqrt{4} = 2$$

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \overset{\substack{\uparrow \\ a_n \geq \sqrt{2} > 0}}{>} \sqrt{2 + 0} = \sqrt{2}$$

Tehát $\sqrt{2} \leq a_{n+1} < 2$.

Olvasmány (feladatás):

Monotonitás:

$$a_{n+1} - a_n = \sqrt{2+a_n} - a_n = \frac{(2+a_n) - a_n^2}{\sqrt{2+a_n} + a_n} = \frac{-(a_n^2 - a_n - 2)}{\sqrt{2+a_n} + a_n}$$

$$= \frac{-(a_n-2)(a_n+1)}{\sqrt{2+a_n} + a_n} > 0$$

↑
 $x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$

Mivel $\sqrt{2} \leq a_n \leq 2 \quad \forall n \geq 1$,
 ezért a számláló és a nevező
 is pozitív!

Tehát $a_{n+1} - a_n > 0 \Leftrightarrow a_{n+1} > a_n \quad \forall n \geq 1$.

A sorozat szig. mon. nő.

Sorozatok konvergenciája

Def: Azt mondjuk, hogy (a_n) sorozat konvergens, és a határértéke $A \in \mathbb{R}$, ha $\forall \varepsilon > 0$ -hoz megadható $N = N(\varepsilon)$ küszöbszám úgy, hogy $n > N$ esetén $|a_n - A| < \varepsilon$.

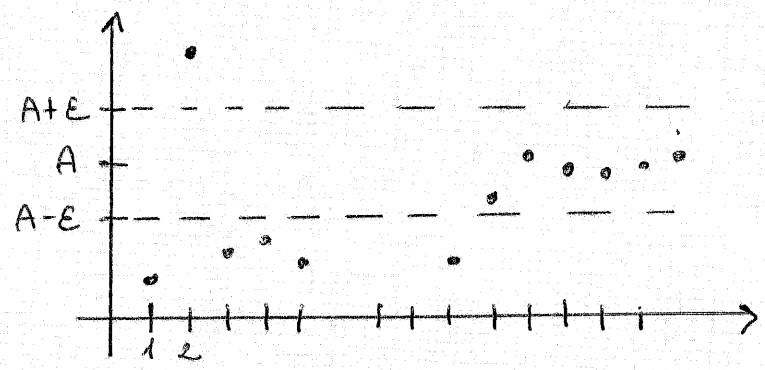
(Szemléletesen: $\forall \varepsilon > 0$ esetén véges sok n kivételével bármely $n \geq N$ igaz, hogy $|a_n - A| < \varepsilon$.)

Jelölés:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$$

VAGY:

$$a_n \rightarrow A, \text{ ha } n \rightarrow \infty$$



Ha (a_n) nem konvergens, akkor divergens.

Q. Tétel: Konvergens sorozat határértéke egyértelmű,
azaz ha $a_n \rightarrow A_1$ és $a_n \rightarrow A_2$ $n \rightarrow \infty$ esetén, akkor $A_1 = A_2$.

Példák:

$$a_n = \frac{1}{n} : \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$a_n = (-1)^n: \quad -1, 1, -1, 1, \dots \text{ a sorozat divergens}$$

$$a_n = n \quad \text{ez a sorozat is divergens}$$

1. Feladat: Mutassuk meg definíció szerint, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-3}{2n+1} = \frac{1}{2} !$$

Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges.

Kell: $\left| \frac{n-3}{2n+1} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon$, ha n elég nagy.

$$\left| \frac{n-3}{2n+1} - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{2(n-3) - (2n+1)}{2(2n+1)} \right| = \left| \frac{-7}{2(2n+1)} \right| = \frac{7}{2(2n+1)} < \varepsilon \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{7}{2\varepsilon} < 2n+1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{7}{2\varepsilon} - 1 \right) < n$$

$$\text{Legyen } \forall(\varepsilon): = \frac{1}{2} \left(\frac{7}{2\varepsilon} - 1 \right).$$

2. Feladat: Def. szerint mutassuk meg, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 2}{n^2 + 5n - 1} = 1.$$

Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges.

$$\left| \frac{n^2 - 2}{n^2 + 5n - 1} - 1 \right| = \left| \frac{n^2 - 2 - (n^2 + 5n - 1)}{n^2 + 5n - 1} \right| = \left| \frac{-5n - 1}{n^2 + 5n - 1} \right| = \frac{5n + 1}{n^2 + 5n - 1} \leq$$

Positív törtet úgy növelünk, hogy a számlálót növeljük, a nevezőt csökkentsük.

$$\leq \frac{5n + n}{n^2} = \frac{6n}{n^2} = \frac{6}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{6}{\varepsilon}$$

$n \geq 1$
esetén

$$\forall(\varepsilon): = \frac{6}{\varepsilon}$$

A korlátosság, monotonitás, konvergencia kapcsolatairól:

1. Tétel: Ha (a_n) konvergens, akkor korlátos.

Bizonyítás: $\exists A \in \mathbb{R} : \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A.$

Alkalmazzuk az előbbi definíciót $\varepsilon = 1$ -gyel!

$$\varepsilon = 1$$

$\exists N = N(1) \in \mathbb{N}$, hogy $n > N(1)$ esetén $|a_n - A| < 1$

$$-1 < \overset{\updownarrow}{a_n - A} < 1$$

$$A - 1 < a_n < A + 1$$

Legyen $K = \max \{a_1, a_2, \dots, a_N, A + 1\}$

Ekkor $\forall n > 1 - n \quad a_n \leq K$

Alsó korlát: $k = \min \{a_1, a_2, \dots, a_N, A - 1\}$ K felső korlát!

A tétel megfordítása nem igaz:

Példa olyan sorozatra, amely korlátos, de nem konvergens:

$$a_n = (-1)^n : -1, 1, -1, 1, \dots, -1, 1, \dots$$

Tehát:

$\text{korlátosság} \not\Rightarrow \text{konvergencia}$

A konvergencia és a monotonitás között nincs ekvivalencia összefüggés:

Példák: $a_n = n$ sorozat monoton, de nem konvergens.

$$b_n = \frac{(-1)^n}{n} : -\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \dots$$

(b_n) konvergens, de nem monoton

Konvergencia igazolása $b_n = \frac{(-1)^n}{n} - n$:

$$\left| \frac{(-1)^n}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} =: V(\varepsilon)$$

$$\text{Tehát } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$$

Az utolsó két példa alapján látható:

konvergencia	$\nRightarrow$ $\nLeftarrow$	monotonitás
--------------	---------------------------------	-------------

Példa olyan soratra, amely monoton, de nem

korlátos: $a_n = 2n + 1$

$$b_n = 3^n$$

Példa olyan soratra, amely korlátos, de nem

monoton: $a_n = \frac{(-1)^n}{2^n} = -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$

Látható:

korlátosság	$\nRightarrow$ $\nLeftarrow$	monotonitás
-------------	---------------------------------	-------------

○ Igaz viszont a következő tétel.

2. Tétel: Ha egy sorozat mon. nö és felülről korlátos, akkor konvergens. Ha egy sorozat monoton csökken és alulról korlátos, akkor konvergens.

Biz: Az első állítást igazoljuk. T.f.h. (a_n) mon. nö és felülről korlátos.



$\exists A = \sup(a_n)$ legkisebb felső korlát

○ Ekkor $a_n \leq A \quad \forall n \in \mathbb{N}$ -re.

Állítás : $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$, azaz "A" a határérték



$\forall \varepsilon > 0$ esetén $\exists N = N(\varepsilon)$, hogy $n > N(\varepsilon)$ -ra

$$|a_n - A| < \varepsilon,$$

$$\text{azaz } A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon.$$

Az $a_n < A + \varepsilon$ egyenlőtlenség $\forall n \geq 0$ -ra teljesül.

Kell : $A - \varepsilon < a_n$ minden nagy n indexre.

Valóban : $A - \varepsilon$ nem felső korlát $\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}$,

hogy $a_N > A - \varepsilon$.

Mivel a sorozat mon. nő, ezért $\forall n > N$ esetén

$$a_n \geq a_N > A - \varepsilon.$$

Kapjuk : $n \geq N$ esetén

$$A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon$$



$$|a_n - A| < \varepsilon.$$

Tehát a sorozat a supremumához konvergál. $\square$

Olvasmány az alábbi példa:

1. Példa : A 3. oldalon kintebbük a következő rekurzív

sorozatot : $a_1 = \sqrt{2}$

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Megállapítottuk, hogy a sorozat mon. nő és korlátos.

2. Tétel $\Rightarrow A = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ létezik.

Hogyan állapítható meg "A"?

$$\begin{array}{ccc} a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & & A \end{array}$$

"A" kielégíti az $A = \sqrt{2 + A}$ egyenletet!

$$\Rightarrow A^2 = A + 2$$

$$A^2 - A - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} A_1 = 2 \\ A_2 = -1 \end{cases}$$

A határérték egyértelmű, valamelyik megoldást hi kell zárni!

A 3. oldalon szerepelt: $\forall n \in \mathbb{N}$ -re $\sqrt{2} \leq a_n < 2. \Rightarrow$

$A_2 = -1$ nem lehet a határérték!

Tehát $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2.$

2. Példa a 2. Tételre

Legyen $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$

Az nyilvánvaló, hogy (a_n) szig. monoton nö.

Art állítjuk, hogy

$$a_n \leq 2 - \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

azaz (a_n) felülről korlátos.

Teljes indukcióval bizonyítunk.

1. lépés:

Az állítás nyilván igaz $n=1$ -re:

$$a_1 = 1 \leq 2 - \frac{1}{1}$$

2. lépés: Tegyük fel, hogy az állítás igaz valamely $n \in \mathbb{N}$ -re. (Indukciós hipotézis)

3. lépés: Igazoljuk $(n+1)$ -re.

Belátható, hogy $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$-\frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2} < -\frac{1}{n+1}$$

Ezt a segédállítást és az indukciós hipotézist használva kapjuk:

$$a_{n+1} = \underbrace{1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2}}_{a_n} + \frac{1}{(n+1)^2} \leq \underbrace{2 - \frac{1}{n}}_{\text{indukciós hipotézis}} + \frac{1}{(n+1)^2} < \underbrace{2 - \frac{1}{n+1}}_{\text{segédállítás}}$$

Tehát az állítás igaz $\forall n \in \mathbb{N}$ -re.

2. Tétel $\Rightarrow A = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ létezik

Nem bizonyítjuk, de megmutatható, hogy $A = \pi^2/6$.

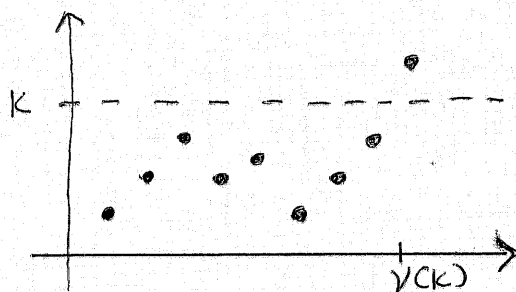
Valódi divergens sorozatok

A divergens sorozatok köré tartoznak a valódi divergens sorozatok.

Def: Azt mondjuk, hogy az $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ sorozat határértéke $+\infty$, ha $\forall K \in \mathbb{R}$ számhoz $\exists V = V(K)$, hogy $n > V(K)$ esetén $a_n > K$.

felölés: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$

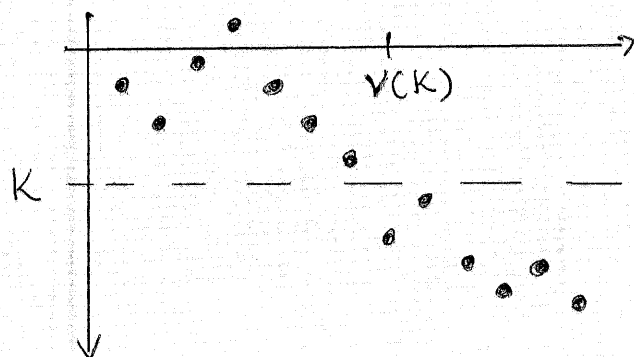
VAGY: $a_n \rightarrow \infty$, ha $n \rightarrow \infty$



Def: Azt mondjuk, hogy az $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ sorozat határértéke $-\infty$, ha $\forall K \in \mathbb{R}$ számhoz $\exists V = V(K)$ úgy, hogy $n > V(K)$ esetén $a_n < K$.

felölés: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$

VAGY: $a_n \rightarrow -\infty$, ha $n \rightarrow \infty$



Figyelem: vannak olyan sorozatok, amelyek divergensek, de nem valódi divergensek!

Példa: $a_n = (-1)^n$ $-1, 1, -1, \dots, -1, 1, \dots$

1. Feladat: Definíció szerint igazoljuk, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 - 3n + 4}{3n + 2} = \infty$$

Kell: $\forall K \in \mathbb{R}$ -hez $\exists V = V(K)$, hogy $n > V(K)$

esetén $\frac{n^4 - 3n + 4}{3n + 2} > K$.

Ezen egyenlőtlenség megoldása helyett alulról becsüljük a sorozat tagjait. Szabály: egy pozitív törtet úgy csöhhentünk, hogy a számlálót csöhhentjük, a nevezőt növeljük.

$$n^4 - 3n + 4 > n^4 - 3n > n^4 - \frac{1}{2}n^4 = \frac{1}{2}n^4$$

$$3n < \frac{1}{2}n^4, \text{ ha } n > \sqrt[3]{6}$$

$$3n + 2 \leq 3n + 2n = 5n$$

Tehát

$$\frac{n^4 - 3n + 4}{3n + 2} > \frac{\frac{1}{2}n^4}{5n} = \frac{n^3}{10} > K \Leftrightarrow n > \sqrt[3]{10K}$$

$$\text{Kaptuk: } V(K) = \max \{ \sqrt[3]{6}, \sqrt[3]{10K} \} \text{ jó}$$

2. Feladat: Def. szerint igazoljuk, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 5n}{-n + 3} = -\infty$$

Kell: $\forall K \in \mathbb{R}$ -hez megadható $V(K)$, hogy $n > V(K)$

esetén $\frac{n^2 - 5n}{-n + 3} < K$.

Adjuk, hogy nagy n -re $\frac{n^2 - 5n}{-n + 3}$ negatív. ($n > 5$ esetén a számláló pozitív, a nevező negatív).

Jobban "szeretjük" pozitív törttel dolgozni.

Igarolando: $-\frac{n^2-5n}{n-3} < k$

ez biztosan pozitív,
ha $n > 5$

Igarolando: $\frac{n^2-5n}{n-3} > -k$

Az egyenlőtlenség megoldása helyett felülről becsüljük a törtet. Szabály: pozitív törtet úgy csöhhentjük, hogy a számlálót csöhhentjük, a nevért növeljük.

$$n^2 - 5n \geq n^2 - \frac{1}{2}n^2 = \frac{1}{2}n^2$$

ha $5n < \frac{1}{2}n^2$,
azaz $10 < n$

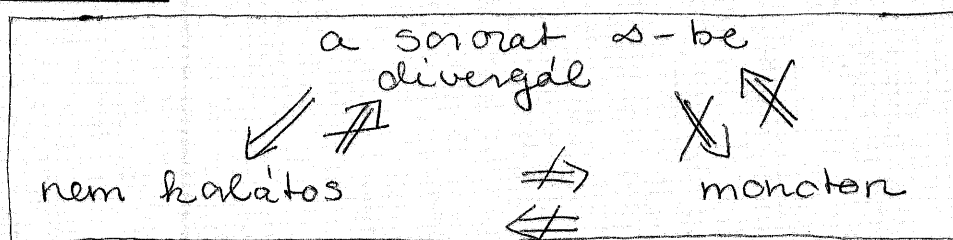
$$n-3 < n$$

Tehát: $\frac{n^2-5n}{n-3} \underset{n>10}{>} \frac{\frac{1}{2}n^2}{n} = \frac{1}{2}n > -k$

$\Downarrow$
 $n > -2k$

Kaptuk: $V(k) = \max\{10, -2k\}$ jó lesz.

Kapcsolat a divergencia, a korlátosság és a monotonitás között:



Tudunk példát adni nem korlátos sorozatra, ami nem divergál a végtelenbe? Olyanra, ami monoton nő, de nem s -divergens, stb.?

Műveletek sorozatokkal

3. Tétel Tegyük fel hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B$.

Ekkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = A \pm B,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = A \cdot B,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c \cdot a_n = c \cdot A \quad \forall c \in \mathbb{R} \text{ esetén,}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}, \text{ ha } b_n \neq 0 \quad \forall n\text{-re és } B \neq 0.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{A}, \text{ ha } a_n \geq 0 \quad \forall n\text{-re és } k \in \mathbb{N}.$$

Tegyük fel, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ és $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = C \in \mathbb{R}$.

Ekkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \infty,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + c_n) = \infty,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n = \infty.$$

Ha $C > 0$, akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n \cdot a_n = +\infty$.

Ha $C < 0$, akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n \cdot a_n = -\infty$.

Ha $C = 0$ és $c_n > 0 \quad \forall n\text{-re}$, akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{c_n} = +\infty$.

Ha $C = 0$ és $c_n < 0 \quad \forall n\text{-re}$, akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{c_n} = -\infty$.

Az is igaz, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = 0$.

Nem bizonyítottuk.

Figyelem! Ha $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$, akkor a

$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n)$ és a $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$ határértékeiről

általánosságban nem tudunk mondani semmit!

Hasonlóan problémás a $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$ határérték,
ha $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$.

4. Tétel (Rendőrelv)

(i) Ha $A \in \mathbb{R}$ és $(a_n), (b_n), (c_n)$ adott sorozatok úgy,

$$\text{hogy } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = A$$

és van olyan $n_0 \in \mathbb{N}$, hogy $n > n_0$ esetén

$$a_n \leq c_n \leq b_n,$$

akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = A$.

(ii) ha (a_n) és (b_n) adott sorozatok úgy, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty, \text{ és van olyan } n_0 \in \mathbb{N}, \text{ hogy } n > n_0$$

esetén $a_n \leq b_n$, akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty.$$

(iii) Ha (a_n) és (b_n) olyan sorozatok, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty \text{ és van olyan } n_0 \in \mathbb{N}, \text{ hogy } n > n_0$$

esetén $b_n \leq a_n$, akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty.$$

Bizonyítás: Csak (i) -t igazoljuk.

Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Def. szerint $\exists \nu_1$ és ν_2

$$\text{hogy } n > \nu_1 \text{ esetén } |a_n - A| < \varepsilon,$$

$$n > \nu_2 \text{ esetén } |b_n - A| < \varepsilon.$$

Tudjuk, hogy $n > n_0$ esetén $a_n \leq c_n \leq b_n$.

Ezért $n > \max\{\nu_1, \nu_2, n_0\}$ esetén

$$A - \varepsilon \leq a_n \leq c_n \leq b_n < A + \varepsilon.$$

Tehát $|c_n - A| < \varepsilon$. Tehát $c_n \rightarrow A$, ha $n \rightarrow \infty$.

Példék határérték számításra (amelyekben észrevétlenül használjuk a 3. Tételt)

$$\textcircled{1} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+2n}}{1+\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\frac{1}{n}+2}}{\frac{1}{\sqrt{n}}+1} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$

$$\textcircled{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2+2^2+\dots+n^2}{n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} =$$

Ismert azonosság:

$$1^2+2^2+\dots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n})}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\textcircled{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4-3n^2+2}{n^2+11n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2-3+\frac{2}{n^2}}{1+11\frac{1}{n}} = +\infty$$

$$\textcircled{4} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n(\sqrt{n^2-1}-n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2-1}+n}{n[(n^2-1)-n^2]} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2-1}+n}{-n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}+1}{-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} -\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}-1 = -2$$

Speciális sorozatok I.

$$\textcircled{1} \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \begin{cases} +\infty, & \text{ha } q > 1 \\ 1, & \text{ha } q = 1 \\ 0, & \text{ha } -1 < q < 1 \\ \text{nem létezik,} & \text{ha } q \leq -1 \end{cases}$$

Ez hihető, és könnyen bizonyítható. Nem részletezzük a bizonyítást.

Pl: $\lim_{n \rightarrow \infty} 3^n = \infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$

Példák, ahol ezt használjuk:

$$\rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n - 7^{-n}}{5^{-n} + 7^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n - \left(\frac{1}{7}\right)^n}{\left(\frac{1}{5}\right)^n + 7^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{5}{7}\right)^n - \left(\frac{1}{49}\right)^n}{\left(\frac{1}{35}\right)^n + 1} = \frac{0}{1}$$

a legnagyobb hatvánnyal leosztjuk a számlálót és a nevezőt is

$$\begin{aligned}
 &\rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^{n+1} + 2 \cdot 3^{n+1}}{(-1)^{n+1} \cdot 2^n + 3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n \cdot 2 \cdot 2^n + 2 \cdot 3 \cdot 3^n}{(-1)^{n+1} \cdot 2^n + 3^n} = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n \cdot 2 \left(\frac{2}{3}\right)^n + 6 \cdot 1}{(-1)^{n+1} \left(\frac{2}{3}\right)^n + 1} = \frac{6}{1} = 6 \\
 &\quad \quad \quad \uparrow \\
 &\quad \quad \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0
 \end{aligned}$$

② Allítás: (i) $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$, ha $n \rightarrow \infty$

(ii) $\forall a > 0$ esetén $\sqrt[n]{a} \rightarrow 1$, ha $n \rightarrow \infty$

Bizonyítás:

$$\begin{aligned}
 \text{(i)} \quad 1 &\leq \sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{\underbrace{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n} \cdot \underbrace{1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1}_{n-2 \text{ db}}}}_{\substack{\text{er} \\ \text{világos}}} \leq \frac{\sqrt{n} + \sqrt{n} + \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{n-2 \text{ db}}}{n} = \textcircled{*} \\
 &\quad \quad \quad \uparrow \\
 &\quad \quad \quad \text{számítási - mértani} \\
 &\quad \quad \quad \text{körép} \\
 &\quad \quad \quad a_1, a_2, \dots, a_n > 0 \text{ esetén} \\
 &\quad \quad \quad \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}
 \end{aligned}$$

$$\textcircled{*} = \frac{2\sqrt{n} + n - 2}{n} \leq \frac{2\sqrt{n} + n}{n} = 1 + \frac{2}{\sqrt{n}}$$

Tehát $1 \leq \sqrt[n]{n} \leq 1 + \frac{2}{\sqrt{n}} \quad \forall n \in \mathbb{N} - \text{re.}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \frac{2}{\sqrt{n}} = 1 \quad \xRightarrow{4. \text{ Tétel (Kendőrekl.)}} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

$$\begin{array}{ccc}
 \text{felölés: } 1 \leq \sqrt[n]{n} \leq 1 - \frac{2}{\sqrt{n}} \\
 \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \\
 1 \quad \quad \quad 1
 \end{array}$$

(ii) Először tegyük fel, hogy $a \geq 1$.

Ha n elég nagy, akkor $1 \leq \sqrt[n]{a} \leq \sqrt[n]{n}$.

Használjuk a
rendőrelvet:

$$\begin{array}{ccc}
 1 \leq \sqrt[n]{a} \leq \sqrt[n]{n} \\
 \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \\
 1 \quad \quad \quad 1
 \end{array}$$

Ha $a < 1$, akkor $1/a > 1$.

-17-

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Példák, ahol esetet alkalmazunk:

$$\rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{7^n - 2 \cdot 5^n + 1} = ?$$

Látjuk hogy nagy n -re $\sqrt[n]{7^n - 2 \cdot 5^n + 1} \approx \sqrt[n]{7^n} = 7$.

$\rightarrow$ Tipp: a határérték 7.

A rendőrelvet fogjuk alkalmazni. Adjunk becsléseket:

$$\frac{1}{2}7^n = 7^n - \frac{1}{2}7^n \leq 7^n - 2 \cdot 5^n \leq 7^n - 2 \cdot 5^n + 1 \leq 7^n + 1 \leq 7^n + 7^n = 2 \cdot 7^n$$

$\uparrow$
 ha n elég nagy,
 akkor
 $2 \cdot 5^n < \frac{1}{2}7^n$

Innen:

$$\underbrace{\sqrt[n]{\frac{1}{2}}}_{\downarrow 1} \cdot 7 = \sqrt[n]{\frac{1}{2}7^n} \leq \sqrt[n]{7^n - 2 \cdot 5^n + 1} \leq \sqrt[n]{2 \cdot 7^n} = \underbrace{\sqrt[n]{2}}_{\downarrow 1} \cdot 7$$

$\downarrow$
7

Tehát a határérték 7.

$$\rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^5 - 3n^3 + 2} = ?$$

Megint a rendőrelvet fogjuk alkalmazni.

$$\frac{1}{2}n^5 = n^5 - \frac{1}{2}n^5 \leq n^5 - 3n^3 \leq n^5 - 3n^3 + 2 \leq n^5 + 2 \leq n^5 + 2n^5 = 3n^5$$

$\uparrow$
 ha n elég nagy,
 akkor
 $3n^3 \leq \frac{1}{2}n^5$

$$\underbrace{\sqrt[n]{\frac{1}{2}}}_{\downarrow 1} \underbrace{(n\sqrt[n]{n})^5}_{\downarrow 1} = \sqrt[n]{\frac{1}{2}n^5} \leq \sqrt[n]{n^5 - 3n^3 + 2} \leq \sqrt[n]{3n^5} = \underbrace{\sqrt[n]{3}}_{\downarrow 1} \underbrace{(n\sqrt[n]{n})^5}_{\downarrow 1}$$

$\downarrow$
1

$$\rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt[n]{8}-1}{n\sqrt[n]{4}-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt[n]{2^3}-1}{n\sqrt[n]{2^2}-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n\sqrt[n]{2})^3-1}{(n\sqrt[n]{2})^2-1} =$$

Vegyük észre, hogy ez " $\frac{0}{0}$ " alakú sorozat!

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n\sqrt[n]{2}-1)(n\sqrt[n]{2}+1)}{(n\sqrt[n]{2}-1)((n\sqrt[n]{2})^2+n\sqrt[n]{2}+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt[n]{2}+1}{(n\sqrt[n]{2})^2+n\sqrt[n]{2}+1} = \frac{2}{3}.$$

Speciális sorozatok II.

① $\frac{\ln n}{n^k} \rightarrow ?$ ha $n \rightarrow \infty$

Itt " k " tetszőleges természetes szám lehet.

Legyen $f(x) = \frac{\ln x}{x^k}$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^k} \stackrel{\uparrow}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{k x^{k-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{k \cdot x^k} = 0$$

L'Hospital-szabály

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n^k} = 0$$

② Hasanlóan igazolható (esetleg a L'Hospital-szabály többszöri alkalmazásával) hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n} = 0 \quad \text{bármely } k \in \mathbb{N} \text{ és } a > 1 \text{ esetén.}$$

③ $\frac{a^n}{n!} \rightarrow ?$ Most " a " tetszőleges valós szám lehet.

$$\text{Ha } |a| \leq 1, \text{ akkor } |a^n| \leq 1 \Rightarrow \left| \frac{a^n}{n!} \right| \leq \frac{1}{n!} \quad \left. \vphantom{\frac{a^n}{n!}} \right\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$$

Világos, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n!} = 0$

Tehintsük az $|a| > 1$ esetet. Ekkor is igazolható,

hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$.

Az egyszerűség kedvéért csak $a = 3$ -ra igazoljuk.

Ha $n > 3$, akkor

$$0 < \frac{3^n}{n!} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdots 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots n} < \frac{3 \cdot 3 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 1 \cdot \frac{3}{n} = \frac{27}{2n}$$

$\downarrow$
0

$\downarrow$
0

$n \rightarrow \infty$ $\downarrow$ Rendőrelv miatt
0

Összegezve az utolsó három példát, azt látjuk, hogy nagy n természetes számokra, $a > 1$ -re, $k \in \mathbb{N}$ -re

$$\ln n \ll n^k \ll a^n \ll n!$$

" $\ll$ " jelentése: lényegesen kisebb

Pontosabban: $a_n \ll b_n$ jelentése: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$

Feladat: Igazoljuk, hogy:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n^2} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{3^n} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n}{n!} = 0.$$

Speciális sorozatok III. (Az Euler-szám)

Legyen most $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Igazolható (a legtöbb kalkulus tankönyvben szerepel), hogy $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ mon. növe és felülről korlátos sorozat. A 7. oldalon található 2. Tétel szerint (a_n) konvergens, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ létezik. Az Euler-számot definiálhatjuk úgy, mint a sorozat határértékét:

$$e := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Megmutatható, hogy e irracionális szám.
 $e \approx 2,71$

Másik meghatározás - Ismétlés:

-20-

Előző felévben tárgyaltuk az a^x exponenciális függvényeket $\forall a > 0$ -ra. Azt mondtuk, hogy "e" legyen az a pozitív szám, hogy az e^x ^{függvény} ^{exponenciális} deriváltja $x=0$ -ban pontosan 1.

Definiáltuk továbbá az $\ln x$ függvényt az e^x inverzént:

$$y = e^x \Leftrightarrow x = \ln y$$

$y > 0$
 $x \in \mathbb{R}$

Ekkor $x = e^{\ln x}$ bármely $x > 0$ -ra.

Teljentsük újra az $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ sorozatot.

$$f(x) := \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = ?$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} e^{x \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)} \end{aligned}$$

Probléma: $x \rightarrow \infty$

$$\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \rightarrow \ln 1 = 0, \text{ ha } x \rightarrow \infty$$

L'Hospital-szabályt használunk "0 · ∞" alakú sorozatok esetén:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = 1 \end{aligned}$$

Tehát

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{x \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = e^1 = e$$

Azonnal adódik: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$.

Ugyanígy igazolható: Legyen $g: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$.

Ha g differenciálható és $|g(x)| \rightarrow \infty$, ha $x \rightarrow \infty$, akkor

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{g(x)}\right)^{g(x)} = e. \quad (*)$$

[Valóban: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{g(x)}\right)^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{g(x) \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{g(x)}\right)}$, és

a L'Hospital-szabály alkalmazásával igazolható, hogy a
 hitvány határértéke 1, ha $x \rightarrow \infty$.]

Példák, ahol ezt alkalmazzuk: minden " 1^∞ " alakú sorozatnál

①

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+3}{n-5}\right)^{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{8}{n-5}\right)^{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{n-5}{8}}\right)^{2n} =$$

" 1^∞ " alakú sorozat

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\underbrace{\left(1 + \frac{1}{\frac{n-5}{8}}\right)^{\frac{n-5}{8}}}_{\downarrow e} \right]^{\frac{16n}{n-5} \rightarrow 16} = e^{16}$$

② $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+3}{n-5}\right)^{n^2} = ?$ ez " 1^∞ " alakú

$$\left(\frac{n+3}{n-5}\right)^n = \left(1 + \frac{8}{n-5}\right)^n = \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{n-5}{8}}\right)^{\frac{n-5}{8}} \right]^{\frac{8n}{n-5}} \rightarrow e^8 \text{ ha } n \rightarrow \infty$$

Tehát n elég, akkor

$$\left(\frac{n+3}{n-5}\right)^n > e^7$$

$$\left(\frac{n+3}{n-5}\right)^{n^2} > (e^7)^n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (e^7)^n = \infty \implies \text{Kendőrele} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+3}{n-5}\right)^{n^2} = +\infty$$

" 1^∞ " alakú sorozatoknál MINDIG $(*)$ -ot alkalmazzuk!

Múlt félévben szerepelt a definíció:

T.f.h. f értelmezve van az $\underline{a}$ pont egy környezetében. Azt mondjuk, hogy f folytonos $\underline{a}$ -ban, ha

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a),$$

azaz

$\forall \epsilon > 0$ -hoz megadható $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ úgy, hogy
 $|x - a| < \delta(\epsilon)$ esetén $|f(x) - f(a)| < \epsilon$

Idő hiányában nem igazoljuk a következő tételt:

5. Tétel: Tegyük fel, hogy f értelmezve van az $\underline{a}$ pont egy környezetében. Ekkor

f folytonos $\underline{a}$ -ban $\Leftrightarrow \forall (a_n)_{n=1}^{\infty}$ sorozat esetén,
 ha $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(a)$

Er a $\uparrow$ folytonosság
 Heine - féle definíciója.

*** **

Részsorozatok

Def. Legyen $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ természetes számok szigorúan növekvő sorozata. Ekkor az $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ sorozatot az $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ sorozat egy részsorozatának hívjuk.

Példa: $n_k := k^2 + 1$

$a_1, \textcircled{a_2}, a_3, a_4, \textcircled{a_5}, a_6, \dots, a_9, \textcircled{a_{10}}, a_{11}, \dots, a_{16}, \textcircled{a_{17}}, \dots$

Most a részsorozat:

$a_2, a_5, a_{10}, a_{17}, \dots, a_{k^2+1}, \dots$
 $\parallel \parallel \parallel \parallel$
 $a_{n_1} a_{n_2} a_{n_3} a_{n_4} \dots a_{n_k} \dots$

Def: $\underline{a} \in \mathbb{R}$ az $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ sorozat torlódási pontja, ha az $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ sorozatnak létezik olyan $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ részsorozata, amely konvergál $\underline{a}$ -hoz.

Egyszerű igazolni, hogy konvergens sorozatnak pontosan egy torlódási pontja van.

Példa: $a_n = \frac{1}{n} + (-1)^n$

Tehintsük az $(a_{2k})_{k=1}^{\infty}$ $a_2, a_4, a_6, \dots, a_{2k}, \dots$
azaz $\frac{1}{2} + 1, \frac{1}{4} + 1, \frac{1}{6} + 1, \dots$

és az $(a_{2k-1})_{k=1}^{\infty}$ $a_1, a_3, a_5, \dots, a_{2k-1}, \dots$
azaz $1 - 1, \frac{1}{3} - 1, \frac{1}{5} - 1, \dots, \frac{1}{2k-1} - 1, \dots$
részsorozatokat!

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k} = 1, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k-1} = -1$$

$\Rightarrow$ 1 és -1 torlódási pontok.

✗ ✗ ✗ ✗ ✗ ✗

○ Korlátos sorozat nem feltétlenül konvergens. Igaz viszont a következő tétel.

6. Tétel (Bolzano - Weierstrass): Minden korlátos sorozatnak van konvergens részsorozata.

Bizonyítás: $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ korlátos $\Rightarrow \exists \alpha_1, \beta_1 \in \mathbb{R}$, hogy
 $\alpha_1 < a_n < \beta_1 \quad \forall n \geq 1$.

Legyen $n_1 = 1$.

○ Felvesszük még az $[\alpha_1, \beta_1]$ intervallumot! Az $[\alpha_1, \frac{\alpha_1 + \beta_1}{2}]$ és $[\frac{\alpha_1 + \beta_1}{2}, \beta_1]$ intervallumok körül legalább

az egyike keljesül, hogy a sorozatnak végtelen sok tagja belesik. Jelöljük ezt $[\alpha_2, \beta_2]$ -vel.

Biztosan $\exists n_2 > n_1$, hogy $a_{n_2} \in [\alpha_2, \beta_2]$.

Ekkor

$$\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq a_{n_2} \leq \beta_2 \leq \beta_1 \quad \text{és} \quad \beta_2 - \alpha_2 = \frac{\beta_1 - \alpha_1}{2}.$$

Hasonlóan, jelölje $[\alpha_3, \beta_3]$ az $[\alpha_2, \beta_2]$ azon felét, amelyben az (a_n) sorozatnak végtelen sok tagja van. Biztosan $\exists n_3 > n_2$ úgy, hogy $a_{n_3} \in [\alpha_3, \beta_3]$.

Tehát

$$\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \alpha_3 \leq a_{n_3} \leq \beta_3 \leq \beta_2 \leq \beta_1, \quad \beta_3 - \alpha_3 = \frac{\beta_1 - \alpha_1}{2^2}.$$

$\vdots$

Teljes indukcióval definiálhatjuk egy monoton növe és korlátos (α_k) sorozatot, egy monoton csökkenő és korlátos (β_k) sorozatot és az $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ sorozat ^{egy} $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ részsorozatát úgy, hogy minden $k \in \mathbb{N}$ indexre

$$\alpha_1 \leq \alpha_k \leq a_{n_k} \leq \beta_k \leq \beta_1 \quad \text{és} \quad \beta_k - \alpha_k = \frac{\beta_1 - \alpha_1}{2^{k-1}}.$$

Mivel (α_k) mon. nö és korlátos

$$\alpha = \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = \sup \{ \alpha_k : k \in \mathbb{N} \}$$

Mivel (β_k) mon. csökkenő és korlátos

$$\Rightarrow \beta = \lim_{k \rightarrow \infty} \beta_k = \inf \{ \beta_k : k \in \mathbb{N} \}$$

Art is tudjuk^(*), hogy $\alpha_k \leq \alpha$ és $\beta \leq \beta_k \quad \forall k$ -ra.

Sőt, mivel $\alpha_k < \beta_k$ minden k -ra, könnyen látható, hogy $\alpha < \beta$.

(*) a supremum / infimum definíciója alapján

Innen $0 \leq \beta - \alpha \leq \beta_k - \alpha_k = \frac{1}{2^{k-1}} (\beta_1 - \alpha_1) \quad \forall k \in \mathbb{N}.$

$\downarrow$
0 ha $k \rightarrow \infty$

Sűrűségheppen $\alpha = \beta$.

Mivel $\alpha_k \leq a_{n_k} \leq \beta_k \quad \forall k \in \mathbb{N}$ -re és

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \beta_k = \alpha, \quad \text{sűrűségheppen } (a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$$

is konvergens, és a határértéke α . □

Olvasmány: egy szép alkalmazás a Bolzano-Weierstrass-tételre

Múlt félévben szerepelt az alábbi tétel, jóval bonyolultabb bizonyítással.

Tétel: Korlátos, zárt intervallumon folytonos függvény korlátos.

Bizonyítás: T. f. h. $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos és nem korlátos, például alulról nem korlátos.

Ekkor: -1 nem alsó korlát $\Rightarrow \exists a_1 \in [a, b] : f(a_1) < -1$

-2 nem alsó korlát $\Rightarrow \exists a_2 \in [a, b] : f(a_2) < -2$

$\vdots$

$-n$ nem alsó korlát $\Rightarrow \exists a_n \in [a, b] : f(a_n) < -n$

$\vdots$

Kaptunk egy (a_n) korlátos sorozatot

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a \leq a_n \leq b.$$

BW-tétel $\Rightarrow \exists (a_{n_k})$ konvergens részsorozat

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = \alpha \in [a, b]$$

5. Tétel a 22. oldalon $\Rightarrow f(a_{n_k}) \rightarrow f(\alpha)$, ha $k \rightarrow \infty$.

DE! $f(a_{n_k}) < -n_k$ tehát $\lim_{k \rightarrow \infty} f(a_{n_k}) = -\infty$ -26-

Ez ellentmondás!



Cauchy - sorozatok

Def: Azt mondjuk, hogy az (a_n) sorozat Cauchy - sorozat, ha $\forall \varepsilon > 0$ -hoz $\exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ úgy, hogy minden $n, m > N(\varepsilon)$ esetén

$$|a_n - a_m| < \varepsilon.$$

(Tehát a Cauchy - sorozat olyan, hogy ahányszor is adunk meg egy (hícsi) pozitív ε -t, valamely hűsrőbindex től kezdve a sorozat tetszőleges két tagjának a távolsága legfeljebb ε .

Fontos az alábbi tétel:

7. Tétel: Egy sorozat akkor és csak akkor konvergens, ha Cauchy - sorozat.

Azt könnyű igazolni, hogy ha egy sorozat konvergens, akkor Cauchy - sorozat. A fordított állítást általában a BW - tétellel szoktuk igazolni. Lásd például Szabó Tamás Kalkulus I című tankönyvét.

Kiegészítés a 23. oldalon bevezetett torlódási pontokhoz: minden sorozatnak van legnagyobb és legkisebb torlódási pontja. Ezek jelölése:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$$

A tárgyalt példában: $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = 1, \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = -1$.