

41. Tétel (Hűvelekek integrálható függvényekkel)

Tegyük fel, hogy $f, g : I \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ R-integrálható I -n.

Ekkor

(1) $f+g$ is R-integrálható I -n, és

$$\int_I (f+g) = \int_I f + \int_I g;$$

(2) $\forall c \in \mathbb{R}$ esetén cf is R-integrálható, és

$$\int_I cf = c \int_I f;$$

(3) $f \cdot g$ is R-integrálható;

(4) Ha $\inf \{g(x) : x \in I\} > 0$, akkor $\frac{f}{g}$ is integrálható;

(5) ha $\forall x \in I$ -re $f(x) \leq g(x)$, akkor

$$\int_I f \leq \int_I g$$

(6) $|f|$ is R-integrálható I -n, és $|\int f| \leq \int |f|$;

(7) ha I felbomlik I_1 és I_2 intervallumok uniójára úgy, hogy I_1 -nek és I_2 -nek nincs közös belső pontja, akkor

$$\int_I f = \int_{I_1} f + \int_{I_2} f.$$

42. Tétel (Oscillációs kritérium):

Legyen $f : I \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ határoz.

f integrálható I -n $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ -hoz $\exists P$ beosztás, amelyre $0 \leq \bar{S}(f, P) - \underline{S}(f, P) \leq \varepsilon$.

Erehet a tételket sem bizonyítani. A 42. Tételhez hasonló állítás az $n=1$ esetben megtalálható a kalk I jegyet 83. oldalon. A 41. Tétel 1-dimenziós verziója a 87. oldalon van.

Integrál kétszöleges korlátos halmarra

Legyen $H \subseteq \mathbb{R}^n$ korlátos halmaz, és $f: H \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos függvény.

Tehintsünk egy olyan I intervallumot, amely tartalmazza H -t: $H \subset I$

$$\hat{f}(x) := \begin{cases} f(x), & \text{ha } x \in H \\ 0, & \text{ha } x \in I, \text{ de } x \notin H. \end{cases}$$

Def: f $\mathbb{R}$ -integrálja H -n:

$$\int_H f(x) dx := \int_I \hat{f}(x) dx$$

feltéve, hogy ez utóbbi létezik!

[Jelölés $n=2$ esetén:

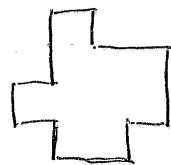
$$\iint_H f(x,y) dx dy = \iint_I \hat{f}(x,y) dx dy]$$

Ez a definíció csak akkor lehet helyes, ha $\int_H f(x) dx$ értéke független I választásától. Megmutatható, hogy $\int_H f$ valóban nem függ I -től!

Korlátos halmaz Jordan-mértéke

Def: $E \subseteq \mathbb{R}^n$ egyszerű alakzat, ha $\exists I_1, I_2, \dots, I_k$ intervallum úgy, hogy ezek nem nyúlnak egymásba, és $E = \bigcup_{j=1}^k I_j$.

Példa $n=2$ -re:



Kiterjesztjük a mértéket az egyszerű alakzatra:

$$\mu(E) = \sum_{j=1}^k \mu(I_j)$$

(Emlékeztető: $\mu(I_j)$ -t a 106. oldalon definiáltuk.)

Igarolható, hogy $\mu(E)$ nem függ a felbontástól.
Er fontos, különben $\mu(E)$ nem lenne egyértelmű,
azaz a definíció se lenne jó.

Legyen most $H \subseteq \mathbb{R}^n$ korlátos halmaz

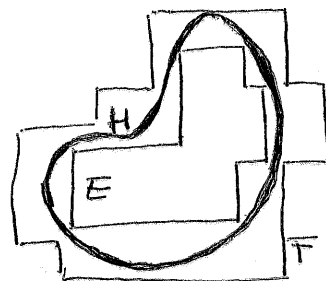
$E \subset H$ belsőjének : E belülírt egyszerű alakzat

$F \supset H$: F körülírt egyszerű alakzat

$\underline{\mu}(H) := \sup \{ \mu(E) : E \text{ belülírt egyszerű alakzat} \}$
 $\uparrow$
 H belső Jordan-mértéke

Ha H -nak nincs belső pontja, és ezért a belülírt
egyszerű alakzatok halmara üres, akkor legyen $\underline{\mu}(H) = 0$.

$\bar{\mu}(H) := \inf \{ \mu(F) : F \text{ körülírt egyszerű alakzat} \}$
 $\uparrow$
 H külső Jordan-mértéke

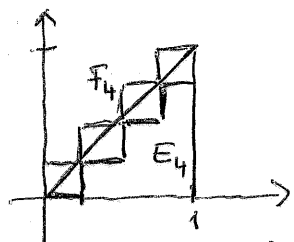


Def : $H \subseteq \mathbb{R}^n$ korlátos halmaz Jordan-mérhető, ha
 $\underline{\mu}(H) = \bar{\mu}(H)$.

Jelölés : $\mu(H) = \bar{\mu}(H) = \underline{\mu}(H)$

H Jordan-mértéke

Példa:



H : a $(0,0)$, $(1,0)$
és az $(1,1)$
pontok által
meghatározott
háromszög

$$\mu(E_k) = \sum_{i=1}^k \frac{1}{n} \frac{i-1}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^k (i-1) =$$

$$= \frac{1}{n^2} \frac{(n-1)n}{2} \rightarrow \frac{1}{2}, \text{ ha } n \rightarrow \infty$$

$$\mu(F_k) = \sum_{i=1}^k \frac{1}{n} \frac{i}{n} = \frac{1}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} \rightarrow \frac{1}{2},$$

ha $n \rightarrow \infty$

$$\Downarrow$$

$$\mu(H) = \frac{1}{2}$$

Megmutatható, hogy minden korlátos konvex
halmaz Jordan-mérhető.

Karakterisztikus függvény

Legyen $H \subseteq \mathbb{R}^n$ halmaz. H karakterisztikus függvénye:

$$\chi_H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad \chi_H(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in H \\ 0, & \text{ha } x \notin H \end{cases}$$

Megmutatható, hogy H akkor és csak akkor Jordan-mérhető, ha χ_H $\mathbb{R}$ -integrálható H -n (a 111. oldalon definiált értelemben). Ekkor

$$\mu(H) = \int_H \chi_H(x) dx$$

43. Tétel: Tegyük fel, hogy $H \subseteq \mathbb{R}^n$ Jordan-mérhető. Ha $f: H \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos, akkor $\mathbb{R}$ -integrálható is.

Kettős integrálok hiszámítása

Kérdés: Hogyan lehet egy kétváltozós függvény integrálját hiszámítani egy 2-dimenziós intervallumon (azaz téglalapon) vagy bonyolultabb H halmazon? Az alábbiakban ezt tekintjük át.

44. Tétel: Tegyük fel, hogy $f: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ $\mathbb{R}$ -integrálható $[a, b] \times [c, d]$ -n. Tegyük fel, hogy $\forall y \in [c, d]$ -re

$$\phi(y) := \int_a^b f(x, y) dx \quad \text{létezik.}$$

↑
egyváltozós integrál.

Ekkor ϕ $\mathbb{R}$ -integrálható $[c, d]$ -n, és

$$\iint_{[a, b] \times [c, d]} f(x, y) dx dy = \int_c^d \phi(y) dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy$$

44. Tétel: Tegyük fel, hogy $f: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$
 $\mathbb{R}$ -integrálható $[a, b] \times [c, d]$ -n. Tegyük fel,
 hogy bármely $x \in [a, b]$ -re a

$$\Psi(x) := \int_c^d f(x, y) dy$$

integrál létezik. Ekkor Ψ $\mathbb{R}$ -integrálható $[a, b]$ -n,
 és

$$\iint_{[a, b] \times [c, d]} f(x, y) dx dy = \int_a^b \Psi(x) dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx$$

Példa:

Legyen $f(x, y) = x^2 y$ és $I = [a, b] \times [c, d] = [2, 5] \times [1, 3]$

Ekkor

$$\begin{aligned} \iint_I f(x, y) dx dy &= \int_2^5 \left(\int_1^3 x^2 y dy \right) dx = \int_2^5 \left[x^2 \frac{y^2}{2} \right]_{y=1}^3 dx = \\ &= \int_2^5 \left(x^2 \cdot \frac{9}{2} - x^2 \frac{1}{2} \right) dx = \int_2^5 4x^2 dx = \left[\frac{4}{3} x^3 \right]_2^5 = 156 \end{aligned}$$

VAGY

$$\begin{aligned} \iint_I f(x, y) dx dy &= \int_1^3 \left(\int_2^5 x^2 y dx \right) dy = \int_1^3 \left[\frac{x^3}{3} y \right]_{x=2}^{x=5} dy \\ &= \int_1^3 \left(\frac{125}{3} y - \frac{8}{3} y \right) dy = \int_1^3 39 y dy = \left[39 \frac{y^2}{2} \right]_1^3 = 156. \end{aligned}$$

Megjegyzés: Ha f folytonos $[a, b]$ -n, akkor a 40.

Tétel szerint $\mathbb{R}$ -integrálható, tehát teljesül a 44. és a 44.?

Tétel első feltétele. Ekkor $\Phi(y)$ és $\Psi(x)$ szintén

létezik $\forall y$ -ra és x -re (mégint csak a folytonos függvények integrálhatósága végett). Tehát teljesül

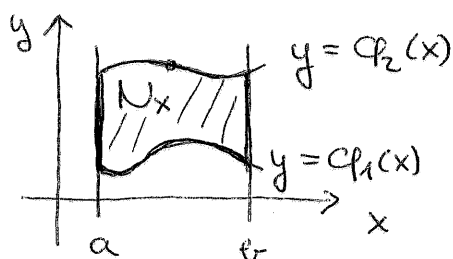
a 44. és 44. Tétel második feltétele is!

X - tengelyre vonatkoztatott normáltartomány:

Legyen $[a, b] \subset \mathbb{R}$ intervallum, $\varphi_1: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi_2: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos, és tegyük fel, hogy $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x) \quad \forall x \in [a, b]$ esetén. Az

$$N_x = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$$

halmazt X-tengelyre vonatkozó normáltartománynak hívjuk.



A normáltartomány
Jordan-mérhető
halmaz.

4.5. Tétel: Tegyük fel, hogy $f: N_x \rightarrow \mathbb{R}$ R-integrálható N_x -en. Tegyük fel, hogy $\forall$ rögzített $x_0 \in [a, b]$ esetén

$$a \quad \varphi(x_0) = \int_{\varphi_1(x_0)}^{\varphi_2(x_0)} f(x_0, y) dy$$

integrál létezik. Ekkor φ integrálható $[a, b]$ -n, és

$$\iint_{N_x} f(x, y) dx dy = \int_a^b \varphi(x) dx = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

Bizonyítás: Könnyen következik a 4.4. Tételből.

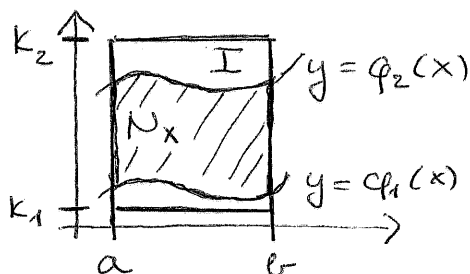
Foglaljuk bele N_x -et egy intervallumba:

$$I = \{(x, y) : a \leq x \leq b, \quad k_1 \leq y \leq k_2\}$$

Itt k_1 a φ_1 függvény alsó határa, k_2 a φ_2 függvény felső határa.

Legyen

$$\hat{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & \text{ha } (x, y) \in N_x \\ 0, & \text{ha } (x, y) \in I \setminus N_x \end{cases}$$



$\hat{f}$ $\mathbb{R}$ -integrálható I -n. Ezent

-116-

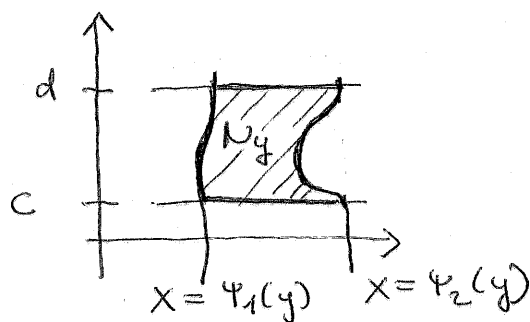
$$\begin{aligned} \iint_{N_x} f(x,y) dx dy &\stackrel{\text{def. szerint}}{=} \iint_I \hat{f}(x,y) dx dy \stackrel{44. \text{ Tétel szerint}}{=} \\ &= \iint_a^{b \times k_2} \hat{f}(x,y) dy dx = \\ &= \int_a^b \left\{ \int_{k_1}^{c_1(x)} \hat{f}(x,y) dy + \int_{c_1(x)}^{c_2(x)} \hat{f}(x,y) dy + \int_{c_2(x)}^{k_2} \hat{f}(x,y) dy \right\} dx = \\ &= \int_a^b \int_{c_1(x)}^{c_2(x)} f(x,y) dy dx. \quad \square \end{aligned}$$

y-kengelyre vonatkoztatott normáltartomány:

Legyen $[c,d]$ intervallum, $\varphi_1: [c,d] \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi_2: [c,d] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvények. Tegyük fel, hogy $\varphi_1(y) \leq \varphi_2(y)$ $\forall y \in [c,d]$ esetén. Az

$$N_y = \{(x,y) : c \leq y \leq d, \varphi_1(y) \leq x \leq \varphi_2(y)\}$$

halmast y -kengelyre vonatkoztatott normáltartomány-nak hívjuk.



4.5. Tétel:

A 4.5. Tételhez hasonló tétel igaz N_y -ra is: Ha f integrálható N_y -on és minden rögzített $y_0 \in [c,d]$ -re

$$\int_{\varphi_1(y_0)}^{\varphi_2(y_0)} f(x, y_0) dx$$

létezik, akkor

$$\iint_{N_y} f(x,y) dx dy = \int_c^d \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y) dx dy.$$

Megjegyzés: Ha f folytonos, akkor a 45. Tételben és az előbbi állításban szereplő feltételek teljesülnek.

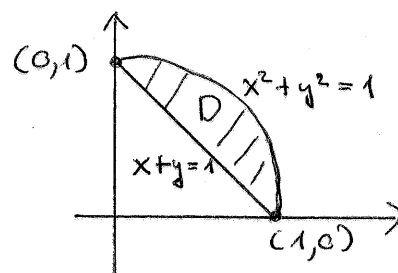
1. Példa: $\iint_D xy \, dx \, dy = ?$, ha D az $x^2 + y^2 = 1$

kör és az $x + y = 1$ egyenes által határolt síkrész.

Először meghatározzuk a két görbe metszéspontjait, és ezek segítségével ábrázoljuk D -t.

$$\left. \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 1 \\ x + y = 1 \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} (x, y) = (0, 1) \\ \text{vagy} \\ (x, y) = (1, 0) \end{array}$$



1. megoldás:

D felfogható egy x -tengelyre vanathoztatott normáltartományként:

$$D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1 \text{ és } 1 - x \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}\}$$

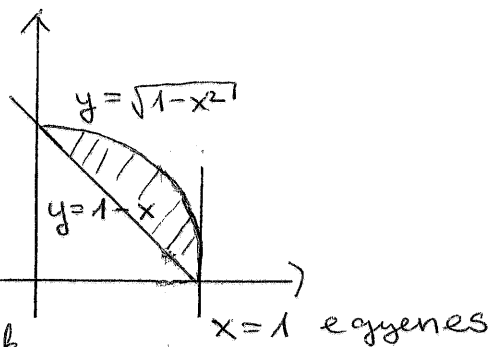
Most először

x -et rögzítjük, és

y szerint integrálunk,

másodjára integrálunk

x szerint.



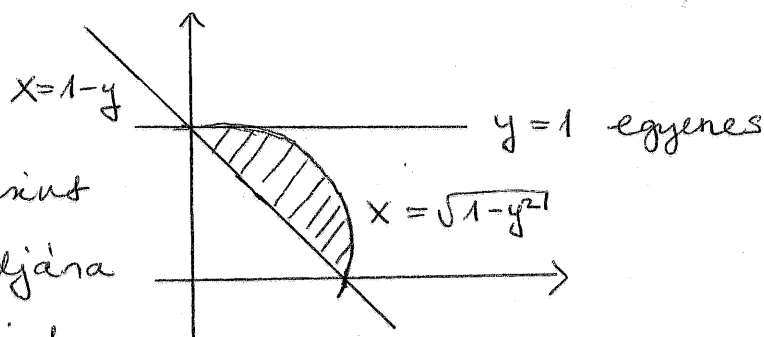
$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} xy \, dy \right) dx &= \int_0^1 \left[x \frac{y^2}{2} \right]_{y=1-x}^{y=\sqrt{1-x^2}} dx = \\ &= \int_0^1 \left(x \frac{(1-x^2)}{2} - x \frac{(1-x)^2}{2} \right) dx = \\ &= \int_0^1 (x^2 - x^3) dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

2. megoldás: D felfogható y-kengelyre vanathortatott normáltartományként:

$$D = \{(x, y) : 0 \leq y \leq 1, 1-y \leq x \leq \sqrt{1-y^2}\}$$

Először y-t

rögzítünk és x szerint integrálunk. Másodjára integrálunk y szerint.

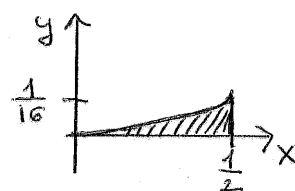


$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dx dy &= \int_0^1 \left(\int_{1-y}^{\sqrt{1-y^2}} x y dx \right) dy = \int_0^1 \left[\frac{x^2}{2} y \right]_{x=1-y}^{x=\sqrt{1-y^2}} dy \\ &= \int_0^1 \left(\frac{(1-y^2)}{2} y - \frac{(1-y)^2}{2} y \right) dy = \dots = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

2. Példa: Ábrázoljuk az integrálási tartományt, és számítsuk ki az integrált!

$$\int_0^{\frac{1}{16}} \int_{\sqrt[4]{y}}^{\frac{1}{2}} \cos(16\pi x^5) dx dy = ?$$

$$D = \{(x, y) : 0 \leq y \leq \frac{1}{16}, \sqrt[4]{y} \leq x \leq \frac{1}{2}\}$$



Vegyük észre, hogy $\int \cos(16\pi x^5) dx$ nem adható meg elemi függvényekkel! $\Rightarrow$ Cseréljük fel az integrálás sorrendjét!

$$\text{Vegyük észre: } D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, 0 \leq y \leq x^4\}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{16}} \left(\int_{\sqrt[4]{y}}^{\frac{1}{2}} \cos(\pi \cdot 16 x^5) dx \right) dy &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{x^4} \cos(16\pi x^5) dy \right) dx = \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} [\cos(16\pi x^5) y]_0^{x^4} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} x^4 \cos(16\pi x^5) dx = \left[\frac{\cos(16\pi x^5)}{80\pi} \right]_0^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{80\pi} (1 - 0) = \frac{1}{80\pi} \end{aligned}$$

Integráltranszformáció

$$n=2-m$$

Az integráltranszformáció az egyváltozós függvényeknél megismert helyettesítéssel integrálás többváltozós analógja. Alkalmazásával integrálási problémák technikailag könnyebbé válhatnak.

4.6. Tétel: Tegyük fel, hogy

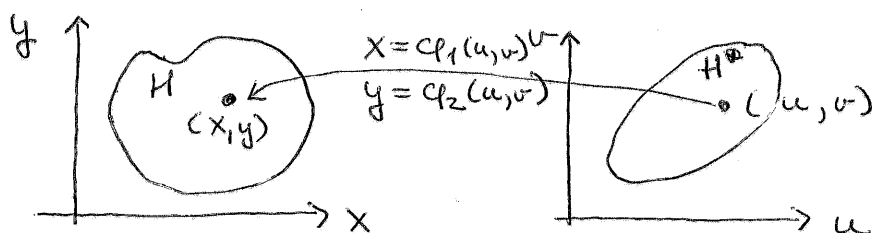
(1) H kalátos és zárt részhalmara $\mathbb{R}^2$ -nek, H Jordan-mértető és $f: H \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos;

(2) $\varphi_1, \varphi_2: H^* \rightarrow \mathbb{R}$ függvényeknek léteznek és folytonosak a parciális deriváltjai és az

$$x = \varphi_1(u, v)$$

$$y = \varphi_2(u, v)$$

egyenletek bijektív leképezést létesítenek az xy sík H halmara és az uv sík H^* halmara között;



(3.) a

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial \varphi_1}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial \varphi_2}{\partial v}(u, v) \end{vmatrix}$$

Jacobi-determináns nem nulla $\forall (u, v) \in H^*$ esetén.

Ekkor

$$\iint_H f(x, y) dx dy = \iint_{H^*} f(\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v)) |J(u, v)| du dv.$$

$\uparrow$ Jacobi-det.
abszolútértéke

A bizonyítás nagyon nehéz, elmarad.

A 3. feltétel gyengíthető: Megengedhetjük, hogy mely

$\hat{H} \subset H^*$ halmar (u,v) elemeire $\hat{J}(u,v)=0$, ha $\hat{H}$ Jordan-mé-
kére nulla.

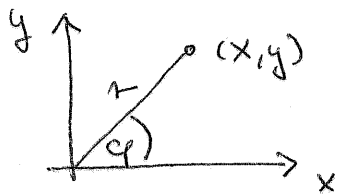
Az előző tétel alkalmazásai

-120-

Polar-koordináták

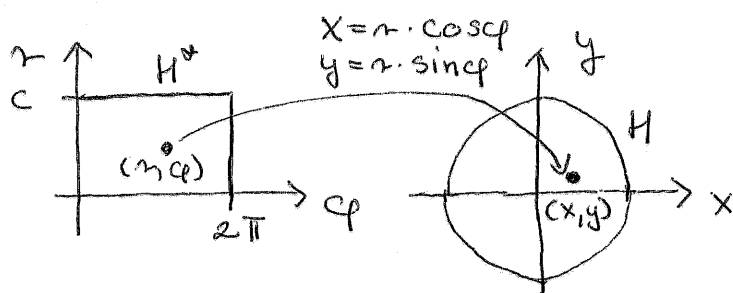
$$x = r \cdot \cos \varphi$$

$$y = r \cdot \sin \varphi$$



(x, y) eleme a $(0, 0)$ középpontú, c sugarú körnek

$$0 \leq r \leq c \text{ és } 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$



Most

$$\hat{J}(r, \varphi) = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \cdot \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cdot \cos \varphi \end{vmatrix} = r \cdot \cos^2 \varphi + r \sin^2 \varphi = r$$

1. Feladat: Számítsuk ki a c sugarú gömb
térfogatát! Ehhez persze elég a felső félgömb
térfogatát meghatározni.

A c sugarú gömb egyenlete: $x^2 + y^2 + z^2 = c^2$

Térfogatának a fele:

$$z = \pm \sqrt{c^2 - x^2 - y^2}$$

$$\frac{V}{2} = \iint_H \sqrt{c^2 - x^2 - y^2} \, dx \, dy = *$$

46. Tétel

Most H a $(0, 0)$ középpontú, c sugarú körlemez.

$$* = \iint_{H^*} \sqrt{c^2 - r^2} \cdot r \, d\varphi \, dr = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^c \sqrt{c^2 - r^2} \cdot r \, dr \right) d\varphi =$$

$u = c^2 - r^2$
 $du = -2r \, dr$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^{2\pi} \left(\int_{c^2}^0 -\frac{1}{2} \sqrt{u} \, du \right) d\varphi = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{c^2} \frac{1}{2} \sqrt{u} \, du \right) d\varphi = \\
 &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{3} u^{3/2} \right]_0^{c^2} d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{1}{3} c^3 d\varphi = \left[\frac{1}{3} c^3 \varphi \right]_0^{2\pi} = \frac{2\pi}{3} c^3
 \end{aligned}$$

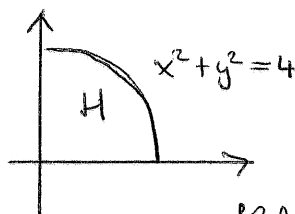
Tehát a gömb térfogata: $V = \frac{4\pi}{3} c^3$

2. Feladat

Számítsuk ki az $\{(x, y, z) : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 3 - y\}$ test

térfogatát!

$$V = \iint_H (3 - y) \, dx \, dy, \text{ ahol } H = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 4\}$$



$$V = \int_0^2 \left(\int_0^{\sqrt{4-x^2}} (3-y) \, dy \right) dx = \dots \leftarrow \begin{array}{l} \text{Így ellenőrizni, hogy} \\ \text{ért nehéz kiszámolni.} \end{array}$$

Másik megoldás: átírunk polárkoordinátákba

$$x = r \cdot \cos \varphi$$

$$y = r \cdot \sin \varphi$$

$$(x, y) \in H \Leftrightarrow 0 \leq r \leq 2 \text{ és } 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$$

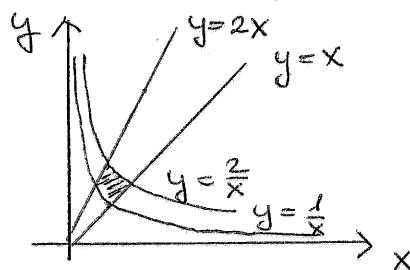
$$H^* = \{(r, \varphi) : 0 \leq r \leq 2, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\}$$

$$\begin{aligned}
 V &= \iint_H (3 - y) \, dx \, dy = \iint_{H^*} (3 - r \cdot \sin \varphi) \cdot r \, dr \, d\varphi = \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^2 (3r - r^2 \sin \varphi) \, dr \right) d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{3}{2} r^2 - \frac{r^3}{3} \sin \varphi \right]_0^2 d\varphi \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(6 - \frac{8}{3} \sin \varphi \right) d\varphi = \left[6\varphi + \frac{8}{3} \cos \varphi \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 3\pi - \frac{8}{3}
 \end{aligned}$$

3. Feladat - egy másik fajta integráltranszformáció
 Határozzuk meg a következő görbék által határolt H
 síkterületet:

$$y = x \quad y = 2x$$

$$xy = 1 \quad xy = 2$$



Ahogy a 113. oldalon megjegyeztük, H területe az

$$T = \iint_H 1 \, dx \, dy \quad \text{integrál.}$$

Veressük be a következő változókat:

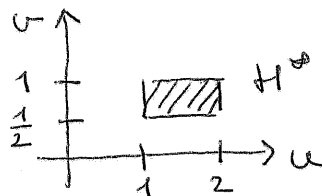
$$u = xy$$

$$v = \frac{x}{y}$$

$$\Leftrightarrow \begin{aligned} x &= \sqrt{uv} \\ y &= \sqrt{\frac{u}{v}} \end{aligned}$$

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \sqrt{uv}}{\partial u} & \frac{\partial \sqrt{uv}}{\partial v} \\ \frac{\partial \sqrt{\frac{u}{v}}}{\partial u} & \frac{\partial \sqrt{\frac{u}{v}}}{\partial v} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2v}$$

$$H^* = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq u \leq 2, \quad 1/2 \leq v \leq 1\}$$



$$\begin{aligned} T &= \iint_H 1 \, dx \, dy = \iint_{H^*} \frac{1}{2v} \, du \, dv = \int_1^2 \left(\int_{1/2}^1 \frac{1}{2v} \, dv \right) du = \\ &= \int_1^2 \frac{1}{2} \ln 2 \, du = \frac{1}{2} \ln 2 \end{aligned}$$