

Integrálszámítás (Riemann - integrál)

- 105 -

Fogalmak:

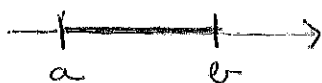
Def: $\underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{R}^n$ -re $\underline{a} < \underline{b}$, ha $a_i < b_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$ esetén. (Ez egy parciális rendelés)

Def: Legyen $\underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{a} < \underline{b}$.

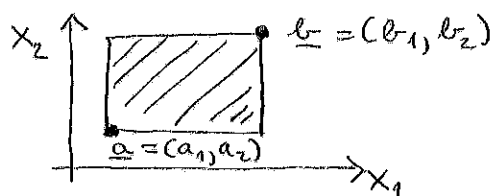
$[\underline{a}, \underline{b}] \subseteq \mathbb{R}^n$ intervallum:

$$[\underline{a}, \underline{b}] := \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^n : a_i \leq x_i \leq b_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \}$$
$$= \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^n : \underline{a} \leq \underline{x} \leq \underline{b} \}$$

$n=1$ -re:



$n=2$ -re:



Def: $I = [\underline{a}, \underline{b}] \subseteq \mathbb{R}^n$ intervallum.

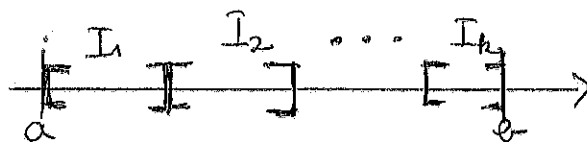
$\mathcal{P} = \{ I_1, I_2, \dots, I_k \}$ beosztása I -nek, ha

- $I_1, I_2, \dots, I_k$ intervallumok (résziintervallumai I -nek);

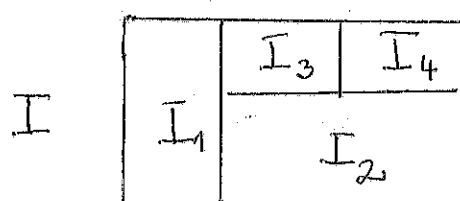
- $I_1, I_2, \dots, I_k$ nem nyúlnak egymásba (nincs közös belső pontjuk);

- $I = I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_k$.

$n=1$ esetén:



$n=2$ -re egy példa:



$$\mathcal{P} = \{ I_1, I_2, I_3, I_4 \}$$

Def: Legyen $I \subseteq \mathbb{R}^n$, $I = [a, b]$ intervallum

I mértéke : $\mu(I) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$

$$= (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \cdot \dots \cdot (b_n - a_n)$$

$n = 1$: hossz

$n = 2$: terület

$n = 3$: térfogat

Darboux - összegek :

Legyen $f : I \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ^{KORLATOS} vektor - skalár függvény,
ahol $I = [a, b]$ intervallum.

Tehintsük I egy P leosztását : $P = \{I_1, \dots, I_k\}$

$m_j := \min_{x \in I_j} f(x)$, ha f folytonos

$m_j := \inf_{x \in I_j} f(x)$ általában.

Darboux - kéle alsó integrálközelítő összeg:

$$\underline{S} = \underline{S}(f, P) = \sum_{j=1}^k m_j \mu(I_j) \\ = m_1 \mu(I_1) + m_2 \mu(I_2) + \dots + m_k \mu(I_k)$$

$M_j := \max_{x \in I_j} f(x)$, ha f folytonos,

$M_j := \sup_{x \in I_j} f(x)$, általában.

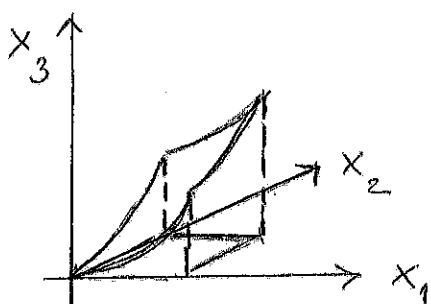
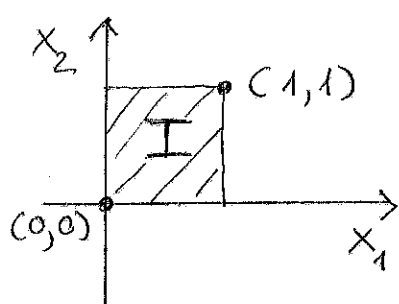
Darboux - kéle felső integrálközelítő összeg:

$$\bar{S} = \bar{S}(f, P) = \sum_{j=1}^k M_j \mu(I_j) \\ = M_1 \mu(I_1) + M_2 \mu(I_2) + \dots + M_k \mu(I_k)$$

1. Példa $n=2$ -re

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

$$I = [(0,0), (1,1)] = [0,1] \times [0,1]$$

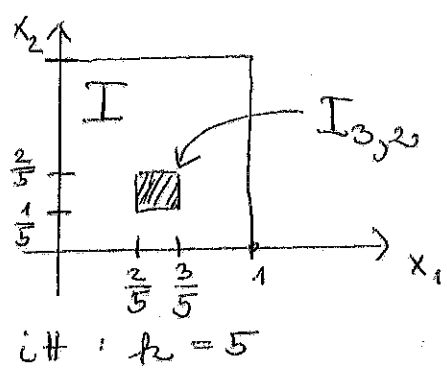


Allyon a P_k beosztás a következő résintervallumból:

$$I_{ij} = \left[\frac{i-1}{k}, \frac{i}{k} \right] \times \left[\frac{j-1}{k}, \frac{j}{k} \right]$$

(Most helyes indexelést használunk)

$$S(f, P_k) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \min_{(x_1, x_2) \in I_{ij}} f(x_1, x_2) \cdot \mu(I_{ij})$$



$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \left(\frac{(i-1)^2}{k^2} + \frac{(j-1)^2}{k^2} \right) \cdot \frac{1}{k^2} \\ &= \frac{1}{k^4} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k ((i-1)^2 + (j-1)^2) \\ &= \frac{1}{k^4} \sum_{i=1}^k \left(k \cdot (i-1)^2 + \frac{(k-1)k(2k-1)}{6} \right) \\ &= \frac{1}{k^4} \left(k \cdot \frac{(k-1)k(2k-1)}{6} + k \cdot \frac{(k-1)k(2k-1)}{6} \right) \\ &= \frac{(k-1)(2k-1)}{3k^2} \leq \frac{k \cdot 2k}{3k^2} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Art is látni, hogy $S(f, P_k) \rightarrow \frac{2}{3}$, ha $k \rightarrow \infty$.

$$\begin{aligned} \bar{S}(f, P_k) &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \left(\frac{i^2}{k^2} + \frac{j^2}{k^2} \right) \cdot \frac{1}{k^2} = \\ &= \frac{(k+1)(2k+1)}{3k^2} \geq \frac{k \cdot 2k}{3k^2} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Art is látni, hogy $\bar{S}(f, P_k) \rightarrow \frac{2}{3}$, ha $k \rightarrow \infty$.

2. Példa: $f(x_1, x_2) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x_1 \text{ és } x_2 \text{ racionális} \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$

Legyen $I = [0, 0], [1, 1] = [0, 1] \times [0, 1]$ (ugyanaz, mint az 1. Példában).

Most bármilyen P beosztásra

$$\underline{S}(f, P) = 0 \quad \overline{S}(f, P) = 1$$

~~****~~

Igazolható, hogy bármely P, Q beosztásra és f korlátos függvényre $\underline{S}(f, P) \leq \overline{S}(f, Q)$.

Az is igaz, hogy létezik legalább egy $S \in \mathbb{R}$ valós szám, hogy $\underline{S}(f, P) \leq S \leq \overline{S}(f, Q)$

bármely P, Q beosztásra. [Lásd: Kalk. I jegyzet, 81-82. oldal]

Def: Legyen $I \subseteq \mathbb{R}^n$ intervallum, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos. Azt mondjuk, hogy f ^{Riemann-}integrálható I -n, ha létezik pontosan egy valós S szám, hogy bármely P, Q beosztásra $\underline{S}(f, P) \leq S \leq \overline{S}(f, Q)$.

$$\text{felölés: } \int_I f(x) dx \stackrel{f \text{ Riemann-integrálható}}{=} S$$

[Megjegyzés: kicsit szofisztikáltabb az előbbi megfogalmazás:

Def: Legyen $f: I \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos I -n.

f I -n vett Darboux-féle felső integrálja:

$$\int_I^+ f(x) dx := \inf \{ \overline{S}(f, P) : P \text{ beosztása } I\text{-nek} \}$$

f I -n vett Darboux-féle alsó integrálja:

$$\int_I^- f(x) dx := \sup \{ \underline{S}(f, P) : P \text{ beosztása } I\text{-nek} \}$$

f Riemann-integrálható I -n, ha $\int_I^+ f = \int_I^- f$

felölés : $n=2$ esetén inkább az alábbi jelölés

terjedt el :
$$\iint_I f(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

vagy
$$\iint_I f(x, y) dx dy$$

$n=3$:
$$\iiint_I f(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3$$

$$\iiint_I f(x, y, z) dx dy dz$$

Térjünk vissza az előző példákhoz :

1. Példa : Látszik, hogy pontosan egy olyan való

S szám van, hogy $\forall P, Q$ beosztásra

$$\underline{S}(f, P) \leq S \leq \overline{S}(f, Q).$$

Ez a szám a $\frac{2}{3}$.

Tehát
$$\iint_I f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \iint_{[0,1] \times [0,1]} (x_1^2 + x_2^2) dx_1 dx_2 = \frac{2}{3}$$

2. Példa : ez a függvény NEM $\mathbb{R}$ -integrálható.

Milyen függvények integrálhatóak?

40. Tétel (Folytonos függvény integrálhatósága)

Ha $f : I \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ vektor - skalar függvény

folytonos az I kálátos, zárt intervallumon,

akkor f $\mathbb{R}$ -integrálható.

Nem bizonyítjuk.

Léteznek olyan $\mathbb{R}$ -integrálható függvények is,
amelyek nem folytonosak!