

Feltételes szélsőérték

Többszörös függvény szélsőértékét eddig nyílt halmazon kerestük. Az alkalmazások során gyakran van szükség egy függvény szélsőértékére abban az esetben is, amikor a változók között bizonyos összefüggés lehetünk elő egy $g(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ alakú egyenlet formájában. Ezek lesznek a feltételes szélsőérték problémák.

Példa $n=2$ -re: Keressük az $f(x, y) = x^2 + (y-2)^2$ függvény szélsőértékét az $x^2 - y^2 - 1 = 0$ feltétel mellett.

Geometria jelentés: vegyük észre, hogy $f(x, y)$ nem más, mint (x, y) a $(0, 2)$ ponttól vett távolságának a négyzete. Tehát ennek a távolságnak a minimumát /maximumát keressük abban az esetben, amikor (x, y) kielégíti az $x^2 - y^2 = 1$ egyenletet (ez egy hiperbolát ad a síkon). Könnyen látható, hogy a függvénynek csak minimuma lesz, a maximumát nem veszi fel.

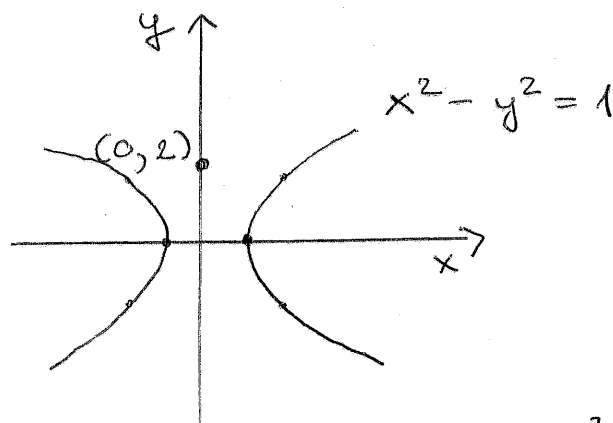
A kérdés:

A hiperbola

melyik pontja

van $(0, 2)$ -hez

a legközelebb?



$$\text{Most } f(x, y) = x^2 + (y-2)^2$$

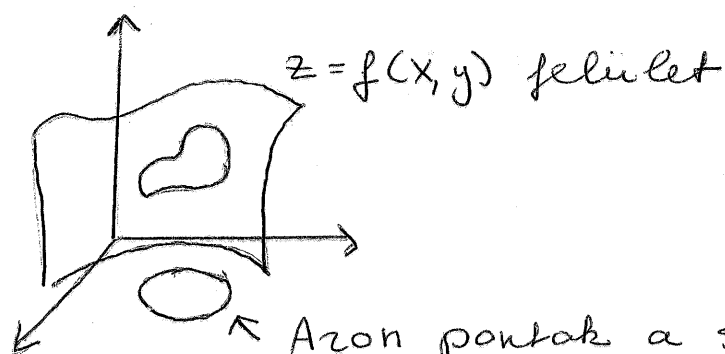
$$g(x, y) = x^2 - y^2 - 1 = 0$$

Def: $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\underline{a} \in D$.

Azt mondjuk, hogy f -nek $\underline{a}$ -ban feltételes helyi minimum van a $g(\underline{x}) = 0$ feltétel mellett, ha $g(\underline{a}) = 0$, és $\exists \delta > 0$ úgy, hogy ha $\underline{x} \in D$, $d(\underline{x}, \underline{a}) < \delta$ és $g(\underline{x}) = 0$, akkor $f(\underline{x}) \geq f(\underline{a})$.

Hasonlóan definiálható: feltételes szigorú helyi minimum, feltételes helyi maximum, feltételes szigorú helyi maximum.

$n=2$:



amelyek kielégítik a $g(x, y) = 0$ egyenletet. Ez sokszor egy görbe. (Mi a görbe? Pontos definíció és példák a 85. oldalon.) Ezen a pontthalmaron (görbén) keressük f szélsőértékeit.

Recept feltételes szélsőérték meghatározására

- Lagrange -féle multiplikátor módszer

Keressük $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, amelynek a szélsőérték keressük.

A feltételt adó függvény: $g: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Tegyük fel, hogy f és g másodrendű parciális deriváltakai léteznek és folytonosak, továbbá $\text{grad } g(\underline{x}) \neq 0$, ha $\underline{x} \in D$.

1. Felírjuk a

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) - \lambda g(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

segédfüggvényt.

$\lambda \in \mathbb{R}$: Lagrange -féle multiplikátor

2. Megoldjuk az alábbi egyenletrendszert $x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda$

ismeretlenekre:

$$\begin{cases} F'_{x_1}(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda) = 0 \\ \vdots \\ F'_{x_n}(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda) = 0 \\ g(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

Legyen $a_1, a_2, \dots, a_n, \lambda_0$ egy ilyen megoldás, ^(*) (Természetesen több megoldás is lehet.)

Fontos: Feltételes szélsőérték a D halmazon egy belső pontjában csak akkor lehet, ha a pont koordinátái kielégítik a fenti egyenletrendszert valamely λ_0 -val.

3. Vizsgáljuk meg (például a 37. vagy a 38. Tétel segítségével), hogy ha rögzítjük λ -t λ_0 -nak, akkor az $F(\underbrace{\cdot, \cdot, \dots, \cdot}_{n\text{ db}}, \lambda_0)$ segédfüggvénynek van-e feltétel nélküli szélsőértéke az $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ pontban.

Ha igen, $\underline{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ feltételes szélsőértéke f -nek a $g(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ feltétel mellett.

(Ha $\underline{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ nem szélsőértéke

$F(\cdot, \cdot, \dots, \cdot, \lambda_0)$ -nak, az nem jelenti azt, hogy $\underline{a}$ nem feltételes szélsőértéke f -nek. Ilyen példákkal gyakorlaton azonban nem találkozunk.)

(*) ahol $\underline{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ belső pontja D -nek.

Olvasmány:

- 99 -

Miért kell feltételes szélsőértékhelyen teljesülnie az

$$\begin{aligned} F'_{x_1}(a_1, \dots, a_n, \lambda_0) &= f'_{x_1}(a_1, \dots, a_n) - \lambda_0 g'_{x_1}(a_1, \dots, a_n) = 0 \\ &\vdots \\ F'_{x_n}(a_1, \dots, a_n, \lambda_0) &= f'_{x_n}(a_1, \dots, a_n) - \lambda_0 g'_{x_n}(a_1, \dots, a_n) = 0 \end{aligned}$$

egyenleteknek a $g(a_1, \dots, a_n) = 0$ feltétel mellett?

Hagyarázat azoknak, akik olvasták a "Süntvonal és gradiens kapcsolata" című fejezetet:

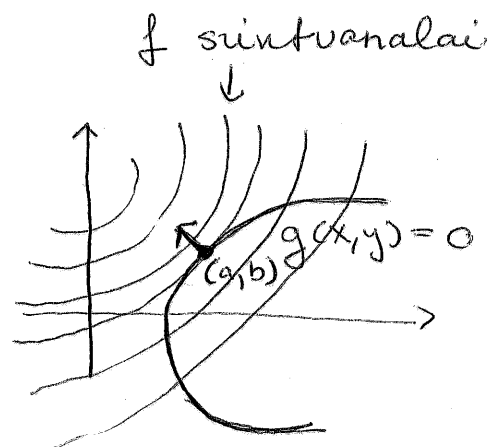
Az egységség kedvéért legyen $n=2$, $(x_1, x_2) = (x, y)$ és $(a_1, a_2) = (a, b)$.

f süntvonalai általában görbék a síkon, és a $g(x, y) = 0$ egyenlet is görbét határoz meg a síkon.

Ha a $g(x, y) = 0$ egyenletű görbe metszi f valamelyik süntvonalát, ott nem lehet szélsőérték.

Csak ott lehet szélsőérték, ahol a süntvonal ÉRINTI a $g(x, y) = 0$

egyenletű görbét.



$\Rightarrow$ Feltételes szélsőértékhelyen (most az (a, b) pontban) a süntvonal érintője egybeesik a $g(x, y) = 0$ egyenletű görbe érintőjével.

Hástepp: feltételes szélsőértékhelyen a görbék normális vektorai (érintővektorra merőleges vektorok) párhuzamosak. A 33. Tétel szerint a normális vektorok a gradiens vektorok: $\text{grad } f(a, b)$ és $\text{grad } g(a, b)$.

Tehát $\text{grad } f(a, b) \parallel \text{grad } g(a, b)$, azaz $\exists \lambda_0 \in \mathbb{R}$, hogy

$$\text{grad } f(a, b) = \lambda_0 \text{grad } g(a, b).$$

Kiírva a két vektor komponenseit:

$$f'_x(a, b) = \lambda_0 g'_x(a, b) \quad \text{és} \quad f'_y(a, b) = \lambda_0 g'_y(a, b).$$

Példa: Oldjuk meg a 89. oldalon kitűzött feltételes szélsőérték problémát!

1. Segédfüggvény:

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda \cdot g(x, y) = \\ = x^2 + (y-2)^2 - \lambda(x^2 - y^2 - 1)$$

$$2. F'_x(x, y, \lambda) = 2x - 2\lambda x$$

$$F'_y(x, y, \lambda) = 2(y-2) + 2\lambda y$$

$$\text{Tehát a } \left. \begin{array}{l} \text{I: } 2x - 2\lambda x = 0 \\ \text{II: } 2(y-2) + 2\lambda y = 0 \\ \text{III: } x^2 - y^2 = 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{egyenletrendszert} \\ \text{ kell megoldani} \\ x, y, \lambda \text{-ra.} \end{array}$$

III $\Rightarrow$ Ha $x=0$, akkor a $-y^2=1$ egyenletet kapjuk, ez nem lehetséges. Tehát $x \neq 0$.

$$\text{I tehát leosztható } x\text{-szel: } 2 - 2\lambda = 0 \\ \lambda = 1$$

$$\text{II-ba } \lambda=1\text{-et behelyettesítve: } 2(y-2) + 2y = 0 \\ y = 1$$

$$\text{III } x^2 - 1 = 1 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

A megoldások $(\sqrt{2}, 1, 1)$ és $(-\sqrt{2}, 1, 1)$.

3. Rögzítsük $\lambda=1$ -et.

$$\left. \begin{array}{l} F''_{xx}(x, y, 1) = 2 - 2\lambda = 0 \\ F''_{xy}(x, y, 1) = F''_{yx}(x, y, 1) \\ F''_{yy}(x, y, 1) = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow D(x, y) = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

A 37. Tétel alapján nem tudjuk eldönteni, hogy van-e szélsőérték.

Vegyük észre viszont, hogy

$$F(x, y, 1) = x^2 + (y-2)^2 - (x^2 - y^2 - 1) = 2y^2 - 4y + 5 =$$

$$= 2(y-1)^2 + 3$$

Ennek a függvénynek $y=1$ -ben van a minimuma!
Tehát $(\sqrt{2}, 1)$ -ben és $(-\sqrt{2}, 1)$ -ben feltétlen minimuma van f -nek. Ezek azok a pontok a hiperbolán, amelyek a legközelebb vannak a $(0, 2)$ ponthoz.

Egyváltozós implicitfüggvény - tétel $n=2$

Egyenletek, egyenletrendszerek megoldása során gyakran találkozunk arra a problémával, hogy egy $f(x, y) = 0$ alakú összefüggésből kifejezhető-e y az x segítségével, azaz van-e olyan φ függvény, hogy $f(x, \varphi(x)) = 0$.

Példák:

Az $f_1(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5 = 0$ esetben y nem fejezhető ki x függvényeként hiszen

$x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5 = (x-1)^2 + (y-2)^2$, ezért $f_1(x, y) = 0$ egyenlet csupán az $(1, 2)$ pontban teljesül.

Másik példa:

$$f_2(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$$

$$\text{azaz } f_2(x, y) = (x-1)^2 + (y-2)^2 - 1 = 0$$

$$\text{Most a } \varphi_1: [0, 2] \rightarrow [2, 3], \quad \varphi_1(x) = \sqrt{2x - x^2} + 2$$

$$\varphi_2: [0, 2] \rightarrow [1, 2], \quad \varphi_2(x) = -\sqrt{2x - x^2} + 2$$

függvényekre is igaz, hogy $f_2(x, \varphi_1(x)) = 0$, $f_2(x, \varphi_2(x)) = 0$
 $\forall x \in [0, 2]$ esetén.

Milyen feltételek mellett létezik ilyen c_f ?

39. Tétel: Legyen $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvény (azaz tegyük fel, hogy f differenciálható, és a parciális deriváltjai folytonosak). Legyen $(a,b) \in D$ belső pont olyan, hogy $f(a,b) = 0$,
és $f'_y(a,b) \neq 0$.

Ekkor $\exists \delta > 0$ és $c_f: (a-\delta, a+\delta) \rightarrow \mathbb{R}$ egyváltozós függvény, hogy $c_f(a) = b$,
 $\forall x \in (a-\delta, a+\delta)$ -ra $f(x, c_f(x)) = 0$.

Továbbá létezik az (a,b) pontnak egy U környezete D -ben úgy, hogy ha $(x,y) \in U$ és $f(x,y) = 0$,
akkor $y = c_f(x)$ valamely $x \in (a-\delta, a+\delta)$ -val.

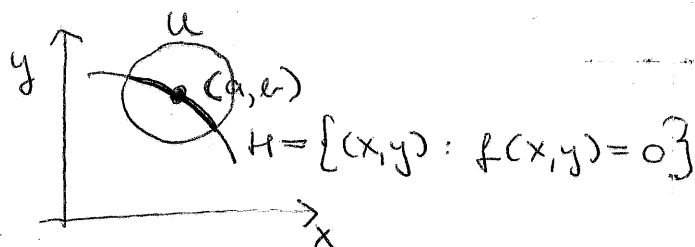
Az is igaz, hogy c_f differenciálható a -ban, és
$$c'_f(a) = - \frac{f'_x(a,b)}{f'_y(a,b)}.$$

Nem bizonyítjuk. $\square$

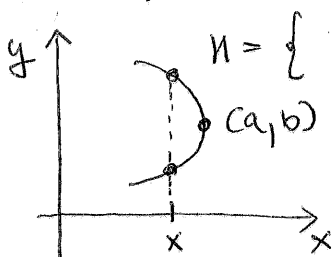
Szemléletes jelentés: Tehintsük az $f(x,y) = 0$ egyenlet által meghatározott H ponthalmart a síkon.

Ha valamely (a,b) pontra $f(a,b) = 0$ és $f'_y(a,b) \neq 0$,
akkor az (a,b) pont egy U környezetében a H

halmaz egy differenciálható függvény grafikonja



Példa, ahol nem alkalmazható a 39. Tétel:



$$H = \{ (x,y) : f(x,y)=0 \}$$

$$\text{IH } f'_y(a,b)=0$$

H halmaz az (a,b) pont egy környezetében nem függvény grafikonja!

Megjegyzés₁: Az implicitfüggvény-tétel bizonyítása nehezebb, ezért hagyjuk ki. De a φ deriváltjára vonatkozó állítás könnyen kijön a láncszabályból:

$$f(x, \varphi(x)) = 0 \quad \forall x \in (a-\delta, a+\delta)$$

$$f'_x(x, \varphi(x)) \cdot 1 + f'_y(x, \varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = 0$$

$$x = a - \tau a$$

$$f'_x(a, b) + f'_y(a, b) \cdot \varphi'(a) = 0 \Rightarrow \varphi'(a) = - \frac{f'_x(a, b)}{f'_y(a, b)}$$

Megjegyzés₂: A tételnek léteznek magasabb dimenziós változatai is.

Példák (korábbi példák újra)

① $f_1(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5, (a,b) = (1,2)$

$$f_1(1,2) = 0$$

$$(f_1)'_y(x,y) = 2y - 4 \Rightarrow (f_1)'_y(1,2) = 2 \cdot 2 - 4 = 0$$

Tehát nem alkalmazható az implicitfüggvény-tétel.

Ez nem meglepő: már megállapítottuk, hogy a

$H = \{ (x,y) : f_1(x,y) = 0 \}$ halmaz egyetlen pontból áll,

csak az $(1,2)$ pontot tartalmazza, tehát nem függvény grafikonja!

② $f_2(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4, (a,b) = (2,2)$

$$f_2(2,2) = 0$$

$$(f_2)'_y(x,y) = 2y - 4 \Rightarrow (f_2)'_y(2,2) = 0$$

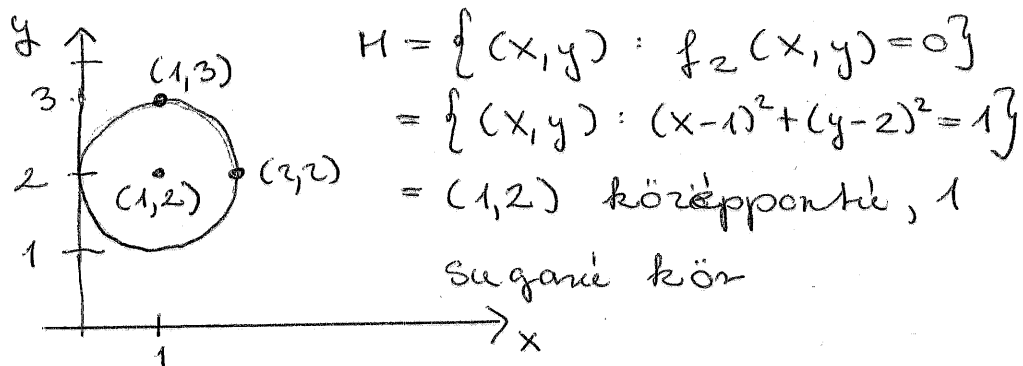
$\Rightarrow$ a $(2,2)$ pontban nem alkalmazható a tétel

Tehintsük most ugyanazt az f_2 függvényt az $(1,3)$ pontban.

$$f_2'(1,3) = 0 \quad \text{és} \quad (f_2)'_y(1,3) = 2 \cdot 3 - 4 = 2 \neq 0$$

$\Rightarrow$ 39. Tétel $\exists \delta > 0$ és $\varphi: (1-\delta, 1+\delta) \rightarrow \mathbb{R}$ függvény,

hogy $\varphi(1) = 3$ és $f_2(x, \varphi(x)) = 0 \quad \forall x \in (1-\delta, 1+\delta)$,
továbbá létezik az $(1,3)$ pontnak egy olyan U környezete, hogy ha $(x,y) \in U$ és $f_2(x,y) = 0$,
akkor $y = \varphi(x)$ valamely $x \in (1-\delta, 1+\delta)$ -val.



Az $(1,3)$ pont egy környezetében H egy φ függvény grafikonja, a $(2,2)$ pont egy környezetében nem az. Hível a példában szereplő függvény elég egyszerű, φ az $(1,3)$ pont esetén explicit kiszámolható, meg is adtuk a 94. oldalon!

Számos, bonyolultabb példában a 39. Tétel által garantált φ explicit nem felírható (= nem tudjuk a képletét), a tétel alapján csak azt tudjuk, hogy φ létezik.